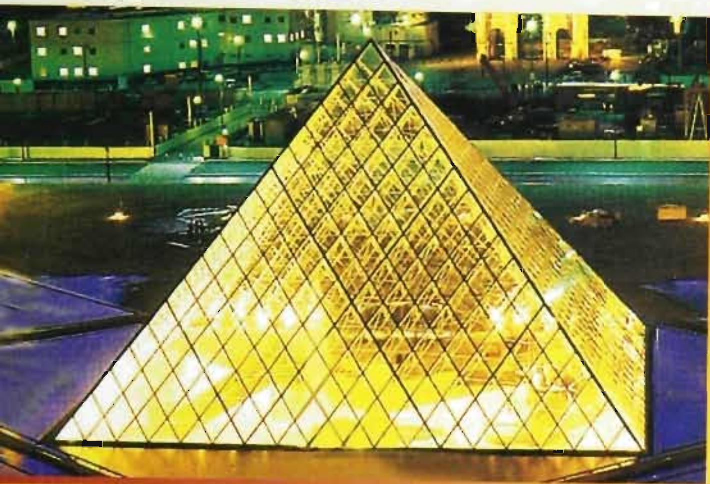
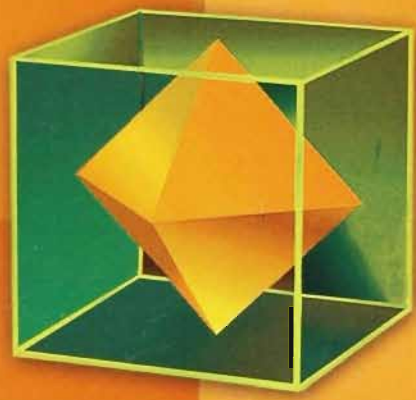
MÔNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – NGUYỄN HÀ THANH

BÀI TẬP
HÌNH HỌC
11





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – NGUYỄN HÀ THANH

BÀI TẬP
HÌNH HỌC
11

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01-2010/CXB/479-1485/GD Mã số : CB104T0

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **BÀI TẬP HÌNH HỌC 11** *được biên soạn nhằm giúp cho học sinh lớp 11 có thêm tài liệu tự học và tự rèn luyện để nắm vững các kiến thức và kĩ năng cơ bản đã được học trong sách giáo khoa Hình học 11, tạo điều kiện góp phần đổi mới phương pháp dạy và học ở trường THPT hiện nay. Nội dung cuốn sách bám sát theo nội dung của sách giáo khoa mới, phù hợp với chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo vừa ban hành năm 2006.*

Nội dung cuốn sách này gồm :

Chương I : ***Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng***

Chương II : ***Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song***

Chương III : ***Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian***

Bài tập cuối năm

Nội dung của mỗi chương được chia ra nhiều chủ đề, mỗi chủ đề là một xoắn (§). Trong từng xoắn, cấu trúc được trình bày theo thứ tự như sau :

A. Các kiến thức cần nhớ : *Phần này nêu tóm tắt những kiến thức cơ bản và kĩ năng cơ bản cần nhớ đã được trình bày trong sách giáo khoa Hình học 11.*

B. Dạng toán cơ bản : *Phần này hệ thống lại các dạng toán thường gặp trong khi làm bài tập, nêu các phương pháp giải chủ yếu và cho các ví dụ minh hoạ, đồng thời cho thêm các điều lưu ý cần thiết.*

C. Câu hỏi và bài tập : *Phần này nhằm mục đích củng cố và vận dụng kiến thức và kĩ năng cơ bản để trả lời câu hỏi và làm bài tập thuộc các dạng vừa nêu ở trên, tạo điều kiện cho học sinh rèn luyện thêm về phong cách tự học. Cuối mỗi chương có các bài tập mang tính chất ôn tập và một số câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp học sinh làm quen với một dạng bài tập mới.*

Cuối sách có phần hướng dẫn giải và đáp số cho các loại câu hỏi và bài tập.

Mặc dù các tác giả đã cố gắng rất nhiều, nhưng chắc rằng không thể tránh được các thiếu sót. Rất mong các độc giả vui lòng góp ý để cho những lần tái bản sau, cuốn sách sẽ được hoàn thiện tốt hơn.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHÉP BIẾN HÌNH

Định nghĩa

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Ta thường kí hiệu phép biến hình là F và viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$, khi đó điểm M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $\mathscr{H}' = F(\mathscr{H})$ là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc $\mathscr{H}$. Khi đó ta nói F biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$, hay hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F.

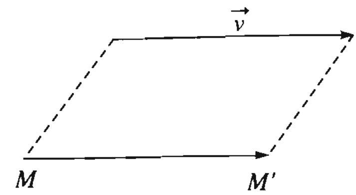
Để chứng minh hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F ta có thể chứng minh : Với điểm M tuỳ ý thuộc $\mathscr{H}$ thì $F(M) \in \mathscr{H}'$ và với mỗi M' thuộc $\mathscr{H}'$ thì có $M \in \mathscr{H}$ sao cho $F(M) = M'$.

Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là *phép đồng nhất.*

II. PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là *phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}$ (h.1.1).



Hình 1.1

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

Như vậy $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Nhận xét. Phép tịnh tiến theo vectơ - không chính là *phép đồng nhất*.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x\,;y)$, $\vec{v}\,(a\,;b)$. Gọi điểm $M'(x'\,;y') = T_{\vec{v}}(M)$.

Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$

IV. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Phép tịnh tiến

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho ;
3) Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép tịnh tiến

1. Phương pháp giải

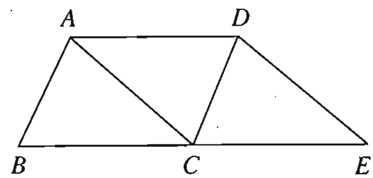
Dùng định nghĩa hoặc biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Giải

Vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ nên phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ biến điểm A thành điểm D, biến điểm B thành điểm C (h.1.2). Để tìm ảnh của điểm C ta dựng hình bình hành $ADEC$. Khi đó ảnh của điểm C là điểm E. Vậy ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ là tam giác DCE.



Hình 1.2

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (-2\ ;\ 3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x - 5y + 3 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1. Lấy một điểm thuộc d, chẳng hạn $M = (-1\ ;\ 0)$. Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-1-2\ ;\ 0+3) = (-3\ ;\ 3)$ thuộc d'. Vì d' song song với d nên phương trình của nó có dạng $3x - 5y + C = 0$. Do $M' \in d'$ nên $3(-3) - 5.\ 3 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 24$. Vậy phương trình của d' là $3x - 5y + 24 = 0$.

Cách 2. Từ biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ suy ra $x = x' + 2$, $y = y' - 3$. Thay vào phương trình của d ta được $3(x' + 2) - 5(y' - 3) + 3 = 0$, hay $3x' - 5y' + 24 = 0$. Vậy phương trình của d' là : $3x - 5y + 24 = 0$.

Cách 3. Ta cũng có thể lấy hai điểm phân biệt M, N trên d, tìm toạ độ các ảnh M', N' tương ứng của chúng qua $T_{\vec{v}}$. Khi đó d' là đường thẳng $M'N'$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2\ ;\ 3)$.

Giải

Cách 1. Dễ thấy (C) là đường tròn tâm $I(1\ ;\ -2)$, bán kính $r = 3$. Gọi $I' = T_{\vec{v}}(I) = (1 - 2\ ;\ -2 + 3) = (-1\ ;\ 1)$ và (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ thì (C') là đường tròn tâm I' bán kính $r = 3$. Do đó (C') có phương trình

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Cách 2. Biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3. \end{cases}$

Thay vào phương trình của (C) ta được

$$(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 2(x' + 2) + 4(y' - 3) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' - 1)^2 = 9.$$

Do đó (C') có phương trình : $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

VẤN ĐỀ 2

Dùng phép tịnh tiến để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép tịnh tiến, hoặc xem điểm M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-1\ ;\ -1)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(2\ ;\ 3)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

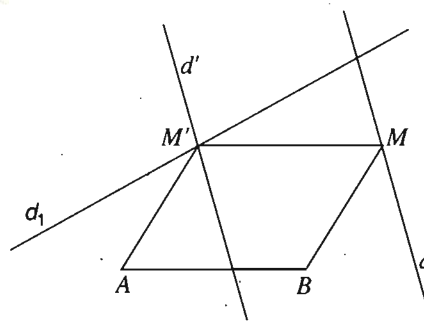
Xem điểm $D(x; y)$ là ảnh của điểm C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA} = (-4\ ;\ -2)$. Từ đó suy ra $x = 2 - 4 = -2$; $y = 3 - 2 = 1$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d_1 cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó sao cho đường thẳng AB không song

song hoặc trùng với d (hay d_1). Hãy tìm điểm M trên d và điểm M' trên d_1 để tứ giác $ABMM'$ là hình bình hành.

Giải

Xem điểm M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ (h.1.3). Khi đó điểm M' vừa thuộc d_1 vừa thuộc d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$. Từ đó suy ra cách dựng :



Hình 1.3

– Dựng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

– Dựng $M' = d_1 \cap d'$.

– Dựng điểm M là ảnh của điểm M' qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Dễ thấy tứ giác $ABMM'$ chính là hình bình hành thoả mãn yêu cầu của đầu bài.

VẤN ĐỀ 3

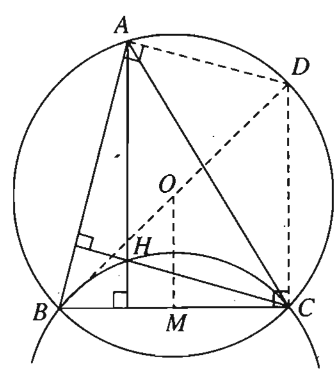
Dùng phép tịnh tiến để giải một số bài toán tìm tập hợp điểm

1. Phương pháp giải

Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép tịnh tiến.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai điểm phân biệt B và C cố định trên đường tròn (O) tâm O, điểm A di động trên đường tròn (O). Chứng minh rằng khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.



Hình 1.4

Giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Vì $\widehat{BCD} = 90^{\circ}$, nên DC // AH (h.1.4). Tương tự AD // CH. Do đó tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$. Ta thấy rằng $\overrightarrow{OM}$ không đổi, nên có thể xem H là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$. Do đó khi điểm A di động trên đường tròn (O) thì H di động trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (2 ; -1)$, điểm $M = (3 ; 2)$. Tìm toạ độ của các điểm A sao cho :

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$;

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$.

1.2. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{v} = (-2 ; 1)$, đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 3 = 0$, đường thẳng d_1 có phương trình $2x - 3y - 5 = 0$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm toạ độ của $\vec{w}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{w}}$.

1.3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y - 9 = 0$. Tìm phép tịnh tiến theo vectơ có phương song song với trục Ox biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc toạ độ và viết phương trình đường thẳng d'.

1.4. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 5)$.

1.5. Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O, bán kính r nằm về một phía của đường thẳng AB. Lấy điểm M trên (C), rồi dựng hình bình hành $ABMM'$. Tìm tập hợp các điểm M' khi M di động trên (C).

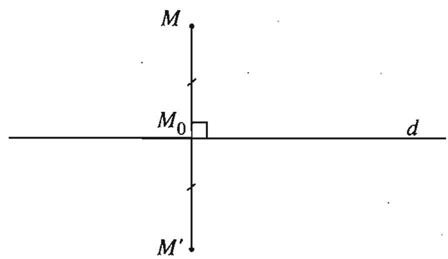
§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng qua đường thẳng d* hay *phép đối xứng trục d* (h.1.5).

Phép đối xứng qua trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$. Như vậy $M' = Đ_d(M)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d.



Hình 1.5

Đường thẳng d được gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathscr{H}$ nếu $Đ_d$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathscr{H}$ được gọi là *hình có trục đối xứng*.

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với mỗi điểm $M = (x\,;y)$, gọi $M' = Đ_d(M) = (x'\,;y')$.

Nếu chọn d là trục Ox, thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$

Nếu chọn d là trục Oy, thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$

III. TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng ;
3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép đối xứng trục

1. Phương pháp giải

Để xác định ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$ qua phép đối xứng qua đường thẳng d ta có thể dùng các phương pháp sau :

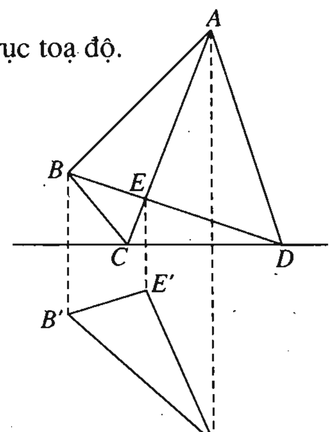
– Dùng định nghĩa của phép đối xứng trục ;

– Dùng biểu thức vectơ của phép đối xứng trục ;

– Dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua các trục toạ độ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Xác định ảnh của tam giác ABE qua phép đối xứng qua đường thẳng CD.



Hình 1.6

Giải

Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác A, B, E qua phép đối xứng đó. Ảnh phải tìm là tam giác $A'B'E'$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1; 5)$, đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Giải

a) Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox.

Khi đó $M' = (1 ; -5)$.

Để tìm d' ta sử dụng biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục Ox : Gọi điểm $N'(x' ; y')$ là ảnh của điểm $N(x ; y)$ qua phép đối xứng trục Ox.

Khi đó $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

Ta có $N \in d \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x' - 2(-y') + 4 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 4 = 0$

$\Rightarrow$ N' thuộc đường thẳng d' có phương trình $x + 2y + 4 = 0$.

Vậy ảnh của d là đường thẳng d' có phương trình $x + 2y + 4 = 0$.

Để tìm (C'), trước hết ta để ý rằng (C) là đường tròn tâm $J = (1 ; -2)$, bán kính $R = 3$. Gọi J' là ảnh của J qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $J' = (1 ; 2)$. Do đó (C') là đường tròn tâm J' bán kính bằng 3. Từ đó suy ra (C') có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

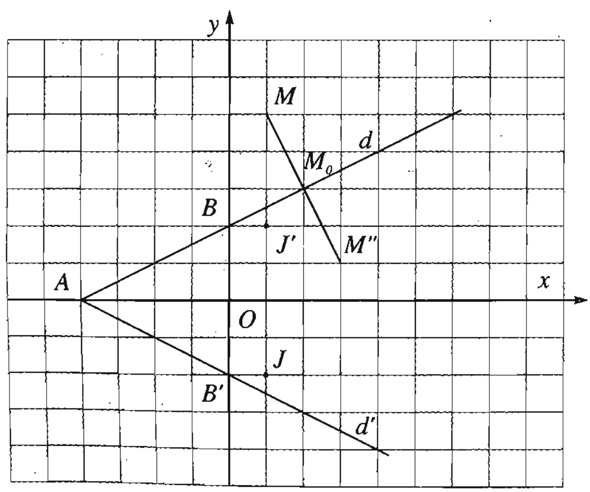
b) Đường thẳng d_1 qua M vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0 \text{ (h.1.7).}$$

Giao của d và d_1 là điểm M_0 có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $M_0 = (2 ; 3)$. Từ đó suy ra ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d là M'' sao cho M_0 là trung điểm của MM'', do đó $M'' = (3 ; 1)$.



Hình 1.7

VẤN ĐỀ 2

Tìm trục đối xứng của một đa giác

1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất : Nếu một đa giác có trục đối xứng d thì qua phép đối xứng trục d mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác bằng cạnh ấy.

2. Ví dụ

Ví dụ. Tìm các trục đối xứng của một hình chữ nhật.

Giải

Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB > BC$. Gọi F là phép đối xứng qua trục d biến $ABCD$ thành chính nó. Khi đó cạnh AB chỉ có thể biến thành chính nó hoặc biến thành cạnh CD.

Nếu AB biến thành chính nó thì chỉ có thể xảy ra $F(A) = B$ (vì nếu $F(A) = A$ thì $F(B) = B$ suy ra d trùng với đường thẳng AB, điều này vô lí). Khi đó d là đường trung trực của AB.

Nếu AB biến thành CD, thì không thể xảy ra $F(A) = C$, $F(B) = D$. Vì nếu thế thì $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với d) điều đó vô lí. Vậy chỉ có thể $F(A) = D$, $F(B) = C$. Khi đó d là đường trung trực của AD.

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có hai trục đối xứng là các đường trung trực của AB và AD.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép đối xứng trục để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng trục, hoặc xem điểm M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép đối xứng trục.

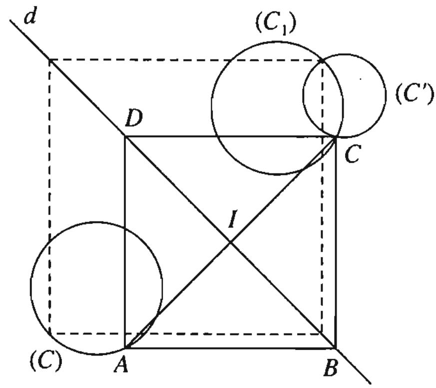
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai đường tròn (C), (C') có bán kính khác nhau và đường thẳng d. Hãy dựng hình vuông $ABCD$ có hai đỉnh A, C lần lượt nằm trên (C), (C') còn hai đỉnh kia nằm trên d.

Giải

Phân tích

Giả sử hình vuông đã dựng được. Ta thấy hai đỉnh B và D của hình vuông $ABCD$ luôn thuộc d nên hình vuông hoàn toàn xác định khi biết đỉnh C. Xem C là ảnh của A qua phép đối xứng qua trục d. Vì A thuộc đường tròn (C) nên C thuộc đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trục d. Mặt khác C luôn thuộc đường tròn (C'). Vậy C phải là giao của đường tròn (C_1) với đường tròn (C').



Hình 1.8

Từ đó suy ra cách dựng.

Cách dựng

a) Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trục d.

b) Từ C thuộc $(C_1)\cap(C')$ dựng điểm A đối xứng với C qua d. Gọi I là giao của AC với d.

c) Lấy trên d hai điểm B và D sao cho I là trung điểm của BD và $IB = ID = IA$.

Khi đó hình vuông $ABCD$ là hình cần dựng.

Chứng minh

Dễ thấy $ABCD$ là hình vuông có B và D thuộc d, C thuộc (C'). Ta chỉ cần chứng minh A thuộc (C). Thật vậy vì A đối xứng với C qua d, mà C thuộc (C') nên A phải thuộc (C) là ảnh của (C') qua phép đối xứng qua trục d.

Biện luận

Bài toán có một, hai, hay vô nghiệm tuỳ theo số giao điểm của (C_1) với (C').

VẤN ĐỀ 4

Dùng phép đối xứng trục để giải một số bài toán tìm tập hợp điểm

1. Phương pháp giải

Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép đối xứng trục.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai điểm phân biệt B và C cố định trên đường tròn (O) tâm O, điểm A di động trên đường tròn (O). Chứng minh rằng khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Giải

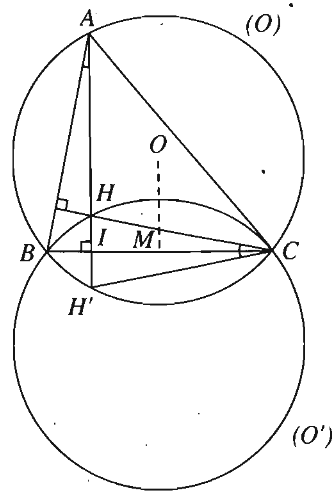
Gọi I, H' theo thứ tự là giao của tia AH với BC và đường tròn (O). Ta có

$\widehat{BAH} = \widehat{HCB}$ (tương ứng vuông góc)

$\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$ (cùng chắn một cung).

Vậy tam giác CHH' cân tại C, suy ra H và H' đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Khi A chạy trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O). Do đó H phải chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng qua đường thẳng BC.



Hình 1.9

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(3\,;-5)$, đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox.

1.7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x - 5y + 7 = 0$ và đường thẳng d' có phương trình $5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng trục biến d thành d'.

1.8. Tìm các trục đối xứng của hình vuông.

1.9. Cho hai đường thẳng c, d cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng điểm C trên c, điểm D trên d sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nhận AB là một cạnh đáy (không cần biện luận).

1.10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B không thuộc d nhưng nằm cùng phía đối với d. Tìm trên d điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến A và B là bé nhất.

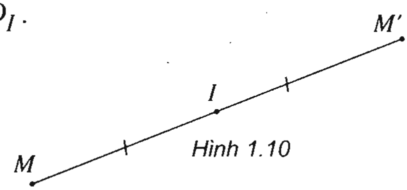
§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng tâm I*.

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Đ_I$.



Hình 1.10

Từ định nghĩa ta suy ra :

1) $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

Từ đó suy ra :

- Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$.
- Nếu $M \not\equiv I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow I$ là trung điểm của MM'.

2) Điểm I được gọi là *tâm đối xứng* của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathcal{H}$ được gọi là *hình có tâm đối xứng*.

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $I = (x_0\ ;\ y_0)$, gọi $M = (x\ ;\ y)$ và $M' = (x'\ ;\ y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y. \end{cases}$$

III. CÁC TÍNH CHẤT

Phép đối xứng tâm

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho ;
3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép đối xứng tâm

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa, biểu thức toạ độ hoặc tính chất của phép đối xứng tâm.

2. Ví dụ

Ví dụ. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(2\ ;\ -3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 1 = 0$. Tìm toạ độ của điểm I' và phương trình của đường thẳng d' lần lượt là ảnh của I và đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O.

Giải

$I' = (-2\ ;\ 3)$.

Để tìm d' ta có thể làm theo các cách sau :

Cách 1. Từ biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ ta có

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y'. \end{cases}$$

Thay biểu thức của x và y vào phương trình của d ta được

$3(-x') + 2(-y') - 1 = 0$, hay $3x' + 2y' + 1 = 0$. Do đó phương trình của d' là $3x + 2y + 1 = 0$.

Cách 2. Vì d' song song hoặc trùng với d nên phương trình của d' có dạng $3x + 2y + C = 0$. Lấy điểm $M(0\ ;\ \frac{1}{2})$ thuộc d, thì ảnh của nó là $M' = (0\ ;\ -\frac{1}{2})$.

Vì M' thuộc d' nên $-2 \cdot \frac{1}{2} + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 1$.

Cách 3. Ta cũng có thể lấy hai điểm M, N thuộc d. Tìm ảnh M', N' tương ứng của chúng. Khi đó d' chính là đường thẳng $M'N'$.

Vấn đề 2

Tìm tâm đối xứng của một hình

1. Phương pháp giải

Nếu hình đã cho là một đa giác thì sử dụng tính chất : Một đa giác có tâm đối xứng I thì qua phép đối xứng tâm I mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác song song và bằng cạnh ấy.

Nếu hình đã cho không phải là một đa giác thì sử dụng định nghĩa.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong phép đối xứng tâm I nếu điểm M biến thành chính nó thì M phải trùng với I.

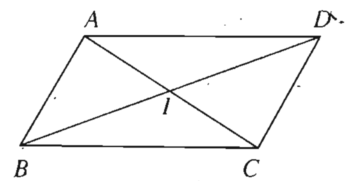
Giải

Ta có $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM} \Rightarrow 2\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv I$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Giải

Giả sử tứ giác $ABCD$ có tâm đối xứng là I. Qua phép đối xứng tâm I, tứ giác $ABCD$ biến thành chính nó nên đỉnh A chỉ có thể biến thành A, B, C hay D.



Hình 1.11

– Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì theo ví dụ trên A trùng I. Khi đó tứ giác có hai đỉnh đối xứng qua đỉnh A. Điều đó vô lí.

– Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác nên cũng suy ra điều vô lí.

Vậy A chỉ có thể biến thành đỉnh C.

Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác $ABCD$ phải là hình bình hành.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép đối xứng tâm để giải một số bài toán hình học

1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất của phép đối xứng tâm.

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép đối xứng tâm, hoặc xem điểm M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép đối xứng tâm.

2. *Ví dụ*

Ví dụ. Cho góc nhọn xOy và một điểm A thuộc miền trong của góc đó.

a) Hãy tìm một đường thẳng đi qua A và cắt Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN.

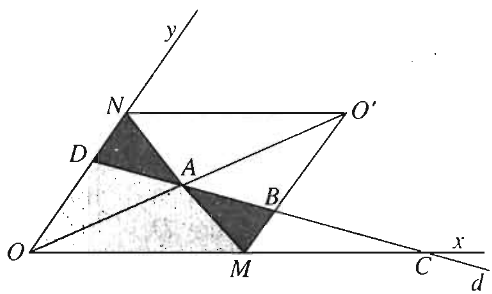
b) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox và Oy lần lượt tại C và D thì ta luôn có diện tích tam giác OCD lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác OMN.

Giải

a) Giả sử M, N đã dựng được (h.1.12). Gọi O' là ảnh của O qua phép đối xứng qua tâm A. Khi đó tứ giác $OMO'N$ là hình bình hành. Từ đó suy ra cách dựng :

– Dựng O' là ảnh của O qua phép đối xứng qua tâm A.

– Dựng hình bình hành $OMO'N$ sao cho M, N lần lượt thuộc Ox, Oy. Dễ thấy đường thẳng MN đi qua A và $AM = AN$. Do đó đường thẳng MN là đường thẳng cần tìm.



Hình 1.12

b) Giả sử đường thẳng d bất kì đi qua A cắt $O'M$, Ox, Oy lần lượt tại B, C, D (C thuộc tia Mx). Do phép đối xứng qua tâm A biến đường thẳng $O'M$ thành đường thẳng Oy, nên nó biến B thành D. Từ đó suy ra $\Delta ABM = \Delta ADN$.

Do đó diện tích ΔOMN = diện tích tứ giác $OMBD \leq$ diện tích ΔOCD.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.11. Cho tứ giác $ABCE$. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm E.

1.12. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $I(1\ ;\ 2)$, $M(-2\ ;\ 3)$, đường thẳng d có phương trình $3x - y + 9 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0.$$

Hãy xác định toạ độ của điểm M', phương trình của đường thẳng d' và đường tròn (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua

a) Phép đối xứng qua gốc toạ độ ;

b) Phép đối xứng qua tâm I.

1.13. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình : $x - 2y + 2 = 0$ và d' có phương trình : $x - 2y - 8 = 0$. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó.

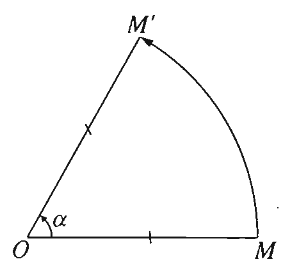
1.14. Cho ba điểm không thẳng hàng I, J, K. Hãy dựng tam giác ABC nhận I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB, AC.

§5. PHÉP QUAY

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM ; OM')$ bằng α được gọi là *phép quay tâm O góc α* (h.1.13).



Hình 1.13

Điểm O được gọi là *tâm quay*, α được gọi là *góc quay*.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

Nhận xét

– Phép quay tâm O góc quay $\alpha = (2k+1)\pi$ với k nguyên, chính là phép đối xứng tâm O.

– Phép quay tâm O góc quay $\alpha = 2k\pi$ với k nguyên, chính là phép đồng nhất.

II. TÍNH CHẤT

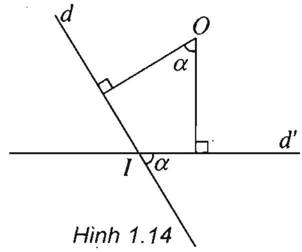
Phép quay

1) Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì ;
2) Biến một đường thẳng thành đường thẳng ;
3) Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho ;
4) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho ;
5) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

☞ ***Chú ý.*** Giả sử phép quay tâm I góc α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' (h.1.14). Khi đó

– Nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α ;

– Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



Hình 1.14

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

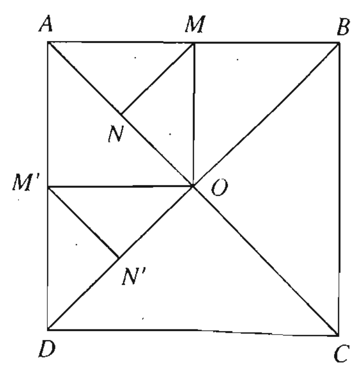
Xác định ảnh của một hình qua một phép quay

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa của phép quay.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (h.1.15). M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc 90^o.



Hình 1.15

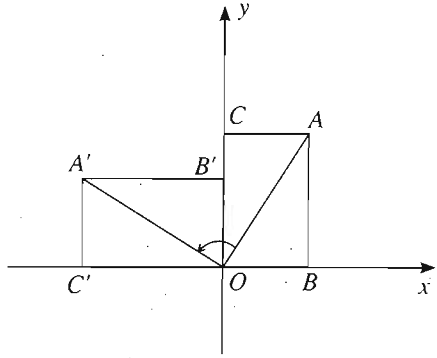
Giải

Phép quay tâm O góc 90^o biến A thành D, biến M thành M' là trung điểm của AD, biến N thành N' là trung điểm của OD. Do đó nó biến tam giác AMN thành tam giác $DM'N'$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(3 ; 4)$. Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^o.

Giải

Gọi các điểm $B(3 ; 0)$, $C(0 ; 4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy (h.1.16). Phép quay tâm O góc 90^o biến hình chữ nhật $OBAC$ thành hình chữ nhật $OB'A'C'$. Dễ thấy $B' = (0 ; 3)$, $C' = (-4 ; 0)$. Từ đó suy ra $A' = (-4 ; 3)$.



Hình 1.16

VẤN ĐỀ 2

Sử dụng phép quay để giải một số bài toán hình học

1. Phương pháp giải

Chọn tâm quay và góc quay thích hợp rồi sử dụng tính chất của phép quay. Lưu ý đến chú ý nói ở mục A.II.

2. Ví dụ

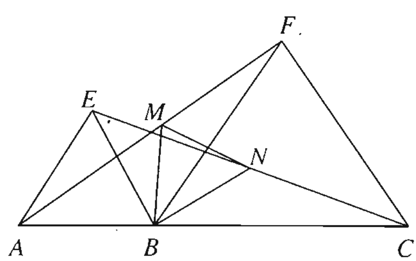
Ví dụ. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C, điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

a) Chứng minh rằng $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^o.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC, chứng minh tam giác BMN đều.

Giải

a) Gọi $Q_{(B,60^o)}$ là phép quay tâm B góc quay 60^o. $Q_{(B,60^o)}$ biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F nên nó biến đoạn thẳng EC thành đoạn thẳng AF. Do đó $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^o (h.1.17).



Hình 1.17

b) $Q_{(B,60^\circ)}$ cũng biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF nên $BN = BM$ và $(BN, BM) = 60^\circ$, do đó tam giác BMN đều.

VẤN ĐỀ 3

Dùng phép quay để giải một số bài toán dựng hình

1. Phương pháp giải

Để dựng một điểm M ta tìm cách xác định nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép quay, hoặc xem M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép quay.

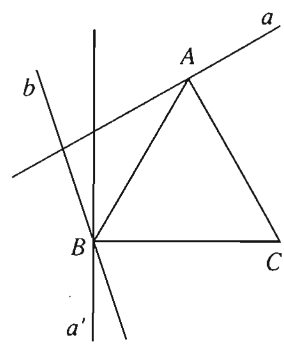
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai đường thẳng a, b và điểm C không nằm trên chúng. Hãy tìm trên a và b lần lượt hai điểm A và B sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Giải

Nếu xem B là ảnh của A qua phép quay tâm C góc quay 60° thì B sẽ là giao của đường thẳng b với đường thẳng a' là ảnh của a qua phép quay nói trên (h.1.18).

Số nghiệm của bài toán tuỳ thuộc vào số giao điểm của đường thẳng b với đường thẳng a'.



Hình 1.18

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.15. Cho lục giác đều $ABCDEF$, O là tâm đối xứng của nó, I là trung điểm của AB.

a) Tìm ảnh của tam giác AIF qua phép quay tâm O góc 120°.

b) Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm E góc 60°.

1.16. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(3\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 5)$, $C(1\ ;\ 1)$ và đường thẳng d có phương trình $5x - 3y + 15 = 0$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$ và phương trình của đường thẳng d' theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC và đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

1.17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.

1.18. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông $BCIJ$, $ACMN$, $ABEF$ và gọi O, P, Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân đỉnh D.

b) Chứng minh AO vuông góc với PQ và $AO = PQ$.

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nhận xét

- Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và quay đều là những phép dời hình.
- Nếu thực hiện liên tiếp hai phép dời hình thì được một phép dời hình.

II. TÍNH CHẤT

Phép dời hình

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy ;

b) Biến một đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó ;

c) Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho, biến một góc thành góc bằng góc đã cho ;

d) Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

III. HAI HÌNH BẰNG NHAU

Định nghĩa : Hai hình được gọi là *bằng nhau* nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép dời hình

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa và tính chất của phép dời hình.

2. Ví dụ

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y - 3 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I(1 ; 2)$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 1)$.

Giải

Gọi phép dời hình cần tìm là F. Gọi d_1 là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $I(1 ; 2)$, d' là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 1)$. Khi đó $d' = F(d)$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d, d' song song hoặc trùng với d_1 nên d' song song hoặc trùng với d. Từ đó phương trình của d' có dạng : $3x - y + C = 0$. Bây giờ ta lấy điểm $M(1 ; 0)$ thuộc d. Phép đối xứng tâm $I(1 ; 2)$ biến M thành $M_1(1 ; 4)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 1)$ biến M_1 thành $M' = (1 - 2 ; 4 + 1) = (-1 ; 5)$. Khi đó $M' = F(M)$. Do đó M' thuộc d'. Thay toạ độ của M' vào phương trình của d' ta được $3.(-1) - 1.5 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 8$. Vậy phương trình của d' là $3x - y + 8 = 0$.

VẤN ĐỀ 2

Các bài toán về mối liên quan giữa một số phép dời hình quen biết

1. Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa của các phép dời hình có liên quan.

2. Ví dụ

Ví dụ. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai trục song song với nhau.

Giải

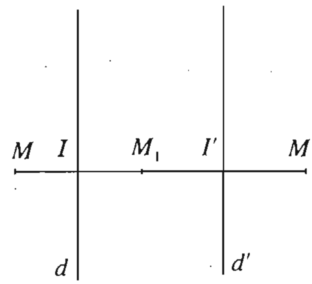
Lấy đường thẳng d nhận $\vec{v}$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Lấy điểm M tuỳ ý. Gọi $M_1 = Đ_d(M)$, $M' = Đ_{d'}(M_1)$. Khi đó ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1I'}$$

$$= 2\overrightarrow{II'} = \vec{v}.$$

Vậy $T_{\vec{v}}(M) = M'$.



Hình 1.19

VẤN ĐỀ 3

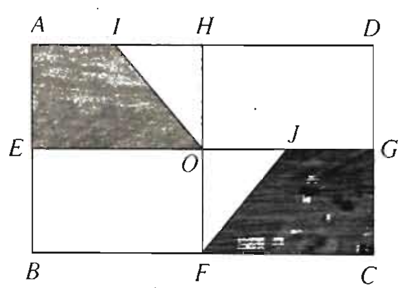
Chứng minh hai hình bằng nhau

1. Phương pháp giải

Chứng minh hai hình đó là ảnh của nhau qua một phép dời hình.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là tâm đối xứng của nó ; E, F, G, H, I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, AH, OG. Chứng minh rằng hai hình thang $AIOE$ và $GJFC$ bằng nhau.



Hình 1.20

Giải

Ta có phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AO}$ biến A, I, O, E lần lượt thành O, J, C, F. Phép đối xứng qua đường trung trực của OG biến O, J, C, F lần lượt thành G, J, F, C.

Từ đó suy ra phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên sẽ biến hình thang $AIOE$ thành hình thang $GJFC$. Do đó hai hình thang ấy bằng nhau.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.19. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}(2;0)$ và điểm $M(1\ ;\ 1)$.

a) Tìm toạ độ của điểm M' là ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

b) Tìm toạ độ của điểm M'' là ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng qua trục Oy.

1.20. Trong mặt phẳng Oxy, cho vectơ $\vec{v} = (3\ ;\ 1)$ và đường thẳng d có phương trình $2x - y = 0$. Tìm ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 90^{o} và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

1.21. Chứng minh rằng mỗi phép quay đều có thể xem là kết quả của việc thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục.

1.22. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trên tia BC lấy điểm E sao cho $BE = AI$.

a) Xác định một phép dời hình biến A thành B và I thành E.

b) Dựng ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép dời hình ấy.

§7. PHÉP VỊ TỰ

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ được gọi là *phép vị tự tâm I, tỉ số k*.

II. TÍNH CHẤT

1) Giả sử M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k. Khi đó

a) $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$; b) $M'N' = |k|.MN$;

2) Phép vị tự tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy ;

b) Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng ;

c) Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó ;

d) Biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

III. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

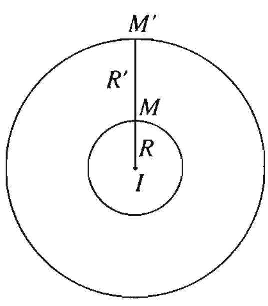
Định lí : *Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.*

Tâm của phép vị tự nói trên được gọi là *tâm vị tự* của hai đường tròn

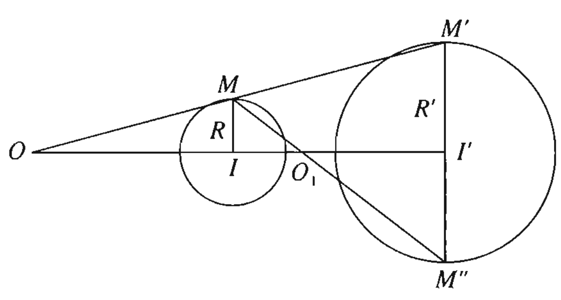
Cho hai đường tròn $(I\ ;R)$ và $(I'\ ;R')$. Có ba trường hợp xảy ra :

- *Nếu I trùng với I'* thì phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I\ ;R)$ thành đường tròn $(I\ ;R')$ (h.1.21).

- *Nếu I khác I' và $R \neq R'$* thì phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn $(I\ ;R)$ thành đường tròn $(I'\ ;R')$. Ta gọi *O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên* (h.1.22).

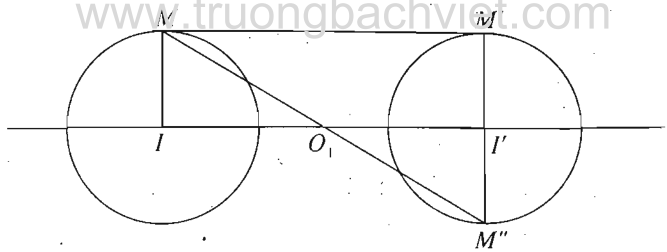


Hình 1.21



Hình 1.22

- *Nếu I khác I' và $R = R'$* thì chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R}{R} = -1$ biến đường tròn $(I\ ;R)$ thành đường tròn $(I'\ ;R')$ (h.1.23). Đó chính là phép đối xứng tâm O_1.



Hình 1.23

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép vị tự

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

2. Ví dụ

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Giải

Do d' song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng : $3x + 2y + C = 0$. Lấy $M(0\ ;\ 3)$ thuộc d. Gọi $M'(x'\ ;\ y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$. Để ý rằng $\overrightarrow{OM} = (0;3)$, $\overrightarrow{OM'} = (x';\ y') = -2\overrightarrow{OM}$, ta có $x' = 0$, $y' = -2.3 = -6$. Do M' thuộc d' nên $2.(-6) + C = 0$. Do đó $C = 12$.

Từ đó suy ra phương trình của d' là $3x + 2y + 12 = 0$.

Bài này cũng có thể giải bằng cách sau :

Lấy hai điểm M, N phân biệt thuộc d, tìm ảnh M', N' của chúng qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$. Khi đó d' chính là đường thẳng $M'N'$.

Gọi $M'(x'\ ;\ y')$ là ảnh của M qua phép vị tự trên. Khi đó

$$x' = -2x,\ y' = -2y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}x',\ \ y = -\frac{1}{2}y'.$$

Ta có : $M \in d \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x' - \frac{2}{2}y' - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 12 = 0$

$\Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng d' có phương trình $3x + 2y + 12 = 0$.

Vậy ảnh của d qua phép vị tự trên chính là d'.

VẤN ĐỀ 2

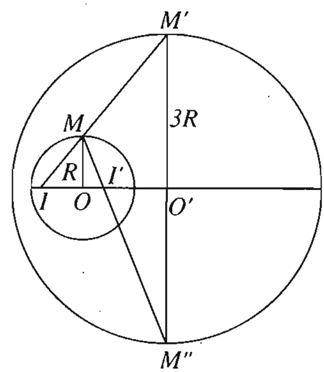
Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

1. Phương pháp giải

Sử dụng cách tìm tâm vị tự đã nêu ở mục III.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O\ ;R)$ và $(O'\ ;3R)$ như hình 1.24. Tìm các phép vị tự biến đường tròn $(O\ ;R)$ thành đường tròn $(O'\ ;3R)$.



Hình 1.24

Giải

Sử dụng cách tìm tâm vị tự đã nêu ở mục III ta được hai phép vị tự $V_{(I,\,3)}$ và $V_{(I',\,-3)}$ biến đường tròn $(O\ ;R)$ thành đường tròn $(O'\ ;3R)$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2\ ;1)$ và $B(8\ ;4)$. Tìm toạ độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A\ ;2)$ và $(B\ ;4)$.

Giải

Đây là hai đường tròn không đồng tâm và khác bán kính, nên có hai phép vị tự tỉ số ± 2 biến đường tròn $(A\ ;2)$ thành đường tròn $(B\ ;4)$. Gọi $I(x\ ;y)$ là tâm vị tự. Khi đó ta có $\overrightarrow{IB} = \pm 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = \pm 2(2 - x) \\ 4 - y = \pm 2(1 - y). \end{cases}$

Giải các hệ phương trình trên sẽ tìm được tâm vị tự ngoài là $I(-4\ ;-2)$ và tâm vị tự trong là $I'(4\ ;2)$.

Sử dụng phép vị tự để giải toán

1. Phương pháp giải

Để xác định một điểm M ta xem nó như là ảnh của một điểm đã biết qua một phép vị tự, hoặc xem M như là giao của một đường cố định với ảnh của một đường đã biết qua một phép vị tự.

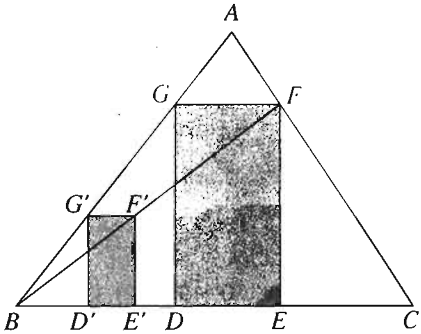
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho tam giác ABC có hai góc B, C đều nhọn. Dựng hình chữ nhật $DEFG$ có $EF = 2DE$ với hai đỉnh D, E nằm trên BC và hai đỉnh F, G lần lượt nằm trên AC, AB.

Giải

Giả sử đã dựng được hình chữ nhật $DEFG$ thoả mãn điều kiện đầu bài (h.1.25). Khi đó từ một điểm G' tuỳ ý trên đoạn thẳng AB ta dựng hình chữ nhật $D'E'F'G'$ có $E'F' = 2D'E'$, hai đỉnh D', E' nằm trên BC. Ta có

$$\frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'} = \frac{2GF}{2G'F'} = \frac{GF}{G'F'}.$$



Hình 1.25

Do đó B, F', F thẳng hàng.

Từ đó có thể xem hình chữ nhật $DEFG$ là ảnh của hình chữ nhật $D'E'F'G'$ theo phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{BG}{BG'}$. Từ đó ta có cách dựng :

– Lấy điểm G' tuỳ ý trên cạnh AB ;

– Dựng hình chữ nhật $D'E'F'G'$ có $E'F' = 2D'E'$, hai đỉnh D', E' nằm trên BC ;

– Đường thẳng BF' cắt AC tại F. Đường thẳng qua F song song với BC cắt AB tại G. Gọi E, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của F, G lên đường thẳng BC.

Ta sẽ chứng minh $DEFG$ là hình cần dựng.

Thật vậy, vì $GF \,//\, G'F'$, $GD \,//\, G'D'$ nên $\frac{GF}{G'F'} = \frac{BG}{BG'} = \frac{GD}{G'D'}$. Từ đó suy ra $\frac{GD}{GF} = \frac{G'D'}{G'F'} = 2$. Do đó hình chữ nhật $DEFG$ là hình cần dựng.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 4 = 0$.

a) Hãy viết phương trình của đường thẳng d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

b) Hãy viết phương trình của đường thẳng d_2 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1 ; 2)$ tỉ số $k = -2$.

1.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Hãy viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1 ; 2)$ tỉ số $k = -2$.

1.25. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên nửa đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính AB của nửa đường tròn đó.

1.26. Cho góc nhọn xOy và điểm C nằm trong góc đó. Tìm trên Oy điểm A sao cho khoảng cách từ A đến Ox bằng AC.

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = k.MN$.

Nhận xét

– Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.

– Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

– Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng.

II. TÍNH CHẤT

Phép đồng dạng tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy ;

b) Biến một đường thẳng thành đường thẳng ; biến tia thành tia ; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng ;

c) Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho ; biến góc thành góc bằng nó ;

d) Biến một đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR.

III. HÌNH ĐỒNG DẠNG

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định ảnh của một hình qua một phép đồng dạng

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng.

2. Ví dụ

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1 ; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°.

Giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1 ; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng : $x + y + C = 0$.

Lấy $M(1 ; 1)$ thuộc d, thì ảnh của nó qua phép vị tự nói trên là O thuộc d_1.

Vậy phương trình của d_1 là : $x + y = 0$. Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy. Vậy phương trình của d' là $x = 0$.

VẤN ĐỀ 2

Tìm phép đồng dạng biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$

1. Phương pháp giải

Tìm cách biểu thị phép đồng dạng đó như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp các phép đồng dạng quen biết.

2. Ví dụ

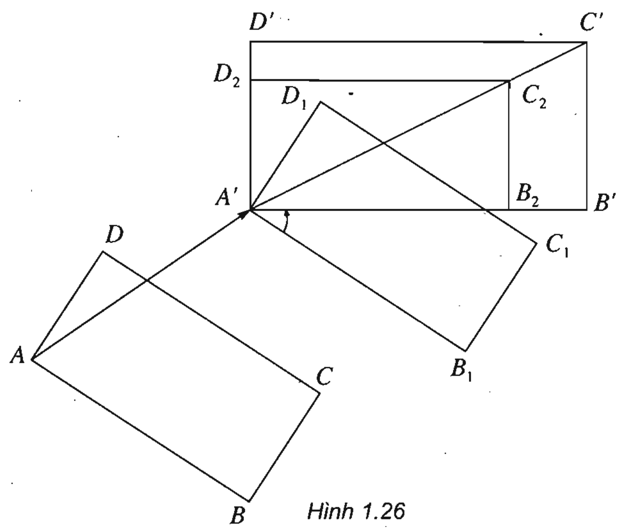
Ví dụ. Cho hai hình chữ nhật có tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài bằng $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng luôn có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Giải

Giả sử ta có hai hình chữ nhật $ABCD$, $A'B'C'D'$ và $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{1}{2}$ (h.1.26).

Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AA'}}$ biến hình chữ nhật $ABCD$ thành hình chữ nhật $A'B_1C_1D_1$.

Phép quay $Q_{(A',\alpha)}$ với $\alpha = (A'B_1, A'B')$ biến hình chữ nhật $A'B_1C_1D_1$ thành hình chữ nhật $A'B_2C_2D_2$.



Hình 1.26

Vì $\frac{A'D_2}{A'B_2} = \frac{A'D'}{A'B'} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{A'D_2}{A'D'} = \frac{A'B_2}{A'B'} = \frac{A'C_2}{A'C'}$. Từ đó suy ra phép vị tự $V_{(A',k)}$ với $k = \frac{A'D'}{A'D_2} = \frac{A'D'}{AD}$ sẽ biến hình chữ nhật $A'B_2C_2D_2$ thành hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Vậy phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép biến hình $T_{\overrightarrow{AA'}}$, $Q_{(A',\alpha)}$ và $V_{(A',k)}$ sẽ biến hình chữ nhật $ABCD$ thành hình chữ nhật $A'B'C'D'$.

Vấn đề 3

Dùng phép đồng dạng để giải toán

1. Phương pháp giải

Dùng các tính chất của phép đồng dạng.

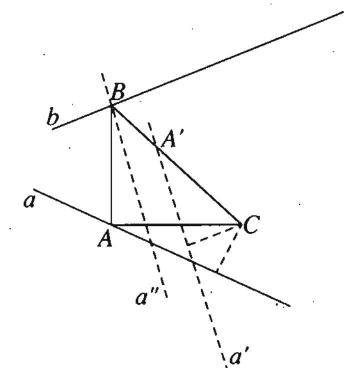
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và điểm C (h.1.27). Tìm trên a và b các điểm A và B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.

Giải

Ta thấy góc lượng giác $(CA\,;\,CB) = -45^{\circ}$ và $\dfrac{CB}{CA} = \sqrt{2}$. Do đó có thể xem B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C, góc -45° và phép vị tự tâm C, tỉ số $\sqrt{2}$.

Vì $A \in a$ nên $B \in a'' = F(a)$, B lại thuộc b. Do đó B là giao của a'' với b.



Hình 1.27

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.27. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x = 2\sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 45°.

1.28. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục Ox.

1.29. Chứng minh rằng hai đa giác đều có cùng số cạnh luôn đồng dạng với nhau.

1.30. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD, $AD = a$, $DC = b$ còn hai đỉnh A, B cố định. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo.

a) Tìm tập hợp các điểm C khi D thay đổi.

b) Tìm tập hợp các điểm I khi C và D thay đổi như trong câu a).

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.31. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - 5y + 3 = 0$ và vectơ $\vec{v}$ (2 ; 3). Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

1.32. Cho hình bình hành $ABCD$ có AB cố định, đường chéo AC có độ dài bằng m không đổi. Chứng minh rằng khi C thay đổi, tập hợp các điểm D thuộc một đường tròn xác định.

1.33. Cho tam giác ABC. Tìm một điểm M trên cạnh AB và một điểm N trên cạnh AC sao cho MN song song với BC và $AM = CN$.

1.34. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - 2y - 6 = 0$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d_1 là ảnh của d qua phép đối xứng qua trục Oy.

b) Viết phương trình của đường thẳng d_2 là ảnh của d qua phép đối xứng qua đường thẳng Δ có phương trình $x + y - 2 = 0$.

1.35. Cho đường tròn (C) và hai điểm cố định phân biệt A, B thuộc (C). Một điểm M chạy trên đường tròn (trừ hai điểm A, B). Hãy xác định hình bình hành $AMBN$. Chứng minh rằng tập hợp các điểm N cũng nằm trên một đường tròn xác định.

1.36. Cho hai đường tròn cùng có tâm O, bán kính lần lượt là R và r, $(R > r)$. A là một điểm thuộc đường tròn bán kính r. Hãy dựng đường thẳng qua A cắt đường tròn bán kính r tại B, cắt đường tròn bán kính R tại C, D sao cho $CD = 3AB$.

1.37. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc 45°.

1.38. Qua tâm G của tam giác đều ABC, kẻ đường thẳng a cắt BC tại M và cắt AB tại N, kẻ đường thẳng b cắt AC tại P và AB tại Q, đồng thời góc giữa a và b bằng 60°. Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là một hình thang cân.

1.39. Gọi A', B', C' tương ứng là ảnh của ba điểm A, B, C qua phép đồng dạng tỉ số k. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

1.40. Gọi A', B' và C' tương ứng là ảnh của ba điểm A, B và C qua phép đồng dạng. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = p\overrightarrow{AC}$ thì $\overrightarrow{A'B'} = p\overrightarrow{A'C'}$, trong đó p là một số. Từ đó chứng minh rằng phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và nếu điểm B nằm giữa hai điểm A và C thì điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C'.

1.41. Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x\ ;\ y)$ thành $M'(2x - 1\ ;\ -2y + 3)$. Chứng minh F là một phép đồng dạng.

1.42. Dựng tam giác BAC vuông cân tại A có C là một điểm cho trước, còn hai đỉnh A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng a, b song song với nhau cho trước.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.43. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2\ ;\ 5)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\,(1\ ;\ 2)$ biến A thành điểm nào trong các điểm sau ?

(A) $B(3\ ;\ 1)$; (B) $C(1\ ;\ 6)$; (C) $D(3\ ;\ 7)$; (D) $E(4\ ;\ 7)$.

1.44. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(4\ ;\ 5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\,(2\ ;\ 1)$?

(A) $B(3\ ;\ 1)$; (B) $C(1\ ;\ 6)$; (C) $D(4\ ;\ 7)$; (D) $E(2\ ;\ 4)$.

1.45. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng cho trước thành chính nó ?

(A) Không có ; (B) Chỉ có một ; (C) Chỉ có hai ; (D) Vô số.

1.46. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó ?

(A) Không có ; (B) Một ; (C) Hai ; (D) Vô số.

1.47. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó ?

(A) Không có ; (B) Một ; (C) Bốn ; (D) Vô số.

1.48. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2\ ;\ 3)$, hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng qua trục Ox ?

(A) $A(3\ ;\ 2)$; (B) $B(2\ ;\ -3)$; (C) $C(3\ ;\ -2)$; (D) $D(-2\ ;\ 3)$.

1.49. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2\ ;\ 3)$, hỏi M là ảnh của điểm nào trong bốn điểm sau qua phép đối xứng qua trục Oy ?

(A) $A(3\ ;\ 2)$; (B) $B(2\ ;\ -3)$; (C) $C(3\ ;\ -2)$; (D) $D(-2\ ;\ 3)$.

1.50. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2\ ;\ 3)$, hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng $x - y = 0$?

(A) $A(3\ ;\ 2)$; (B) $B(2\ ;\ -3)$; (C) $C(3\ ;\ -2)$; (D) $D(-2\ ;\ 3)$.

1.51. Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng ?

(A) Không có ; (B) Một ; (C) Hai ; (D) Vô số.

1.52. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

(A) Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng.

(B) Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là đường tròn.

(C) Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm những đường tròn đồng tâm.

(D) Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm hai đường thẳng vuông góc.

1.53. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $I(1\ ;\ 2)$ và $M(3\ ;\ -1)$. Trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I ?

(A) $A(2\ ;\ 1)$; (B) $B(-1\ ;\ 5)$; (C) $C(-1\ ;\ 3)$; (D) $D(5\ ;\ -4)$.

1.54. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $x = 2$. Trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm O ?

(A) $x = -2$; (B) $y = 2$; (C) $x = 2$; (D) $y = -2$.

1.55. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

(A) Phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.

(B) Phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.

(C) Có phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.

(D) Có phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó.

1.56. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 4 = 0$. Hỏi trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào có thể biến thành Δ qua một phép đối xứng tâm ?

(A) $2x + y - 4 = 0$; (B) $x + y - 1 = 0$;

(C) $2x - 2y + 1 = 0$; (D) $2x + 2y - 3 = 0$.

1.57. Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng ?

(A) Không có ; (B) Một ; (C) Hai ; (D) Vô số.

1.58. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(1 ; 1)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 45^{o} ?

(A) $A(-1 ; 1)$; (B) $B(1 ; 0)$; (C) $C(\sqrt{2} ; 0)$; (D) $D(0 ; \sqrt{2})$.

1.59. Cho tam giác đều tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó ?

(A) Một ; (B) Hai ; (C) Ba ; (D) Bốn.

1.60. Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình vuông trên thành chính nó ?

(A) Một ; (B) Hai ; (C) Ba ; (D) Bốn.

1.61. Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình chữ nhật trên thành chính nó ?

(A) Không có ; (B) Hai ; (C) Ba ; (D) Bốn.

1.62. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc $\alpha \neq 2k\pi$, k là một số nguyên ?

(A) Không có ; (B) Một ; (C) Hai ; (D) Vô số.

1.63. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2 ; 1)$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2 ; 3)$ biến M thành điểm nào trong các điểm sau ?

(A) $A(1 ; 3)$; (B) $B(2 ; 0)$; (C) $C(0 ; 2)$; (D) $D(4 ; 4)$.

1.64. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2 ; 3)$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau ?

(A) $x^2 + y^2 = 4$; (B) $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$;

(C) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$; (D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

1.65. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\,(3\,;\,2)$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau ?

(A) $3x + 3y - 2 = 0$; (B) $x - y + 2 = 0$;

(C) $x + y + 2 = 0$; (D) $x + y - 3 = 0$.

1.66. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

(A) Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.

(B) Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục sẽ được một phép đối xứng trục.

(C) Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm và phép đối xứng trục sẽ được một phép đối xứng qua tâm.

(D) Thực hiện liên tiếp phép quay và phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.

1.67. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

(A) Có một phép tịnh tiến theo vectơ khác không biến mọi điểm thành chính nó.

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

(C) Có một phép đối xứng tâm biến mọi điểm thành chính nó.

(D) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

1.68. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(-2\,;\,4)$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến M thành điểm nào trong các điểm sau ?

(A) $A(-8\,;\,4)$; (B) $B(-4\,;\,-8)$;

(C) $C(4\,;\,-8)$; (D) $D(4\,;\,8)$.

1.69. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 3 = 0$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau ?

(A) $2x + y + 3 = 0$; (B) $2x + y - 6 = 0$;

(C) $4x - 2y - 3 = 0$; (D) $4x + 2y - 5 = 0$.

1.70. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau ?

(A) $2x + 2y = 0$; (B) $2x + 2y - 4 = 0$;

(C) $x + y + 4 = 0$; (D) $x + y - 4 = 0$.

1.71. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau ?

(A) $(x-2)^2+(y-4)^2=16$; (B) $(x-4)^2+(y-2)^2=4$;

(C) $(x-4)^2+(y-2)^2=16$; (D) $(x+2)^2+(y+4)^2=16$.

1.72. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2\ ;\ 4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến M thành điểm nào trong các điểm sau ?

(A) $A(1;\ 2)$; (B) $B(-2;\ 4)$;

(C) $C(-1;\ 2)$; (D) $D(1;\ -2)$.

1.73. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x-y=0$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau ?

(A) $2x-y=0$; (B) $2x+y=0$;

(C) $4x-y=0$; (D) $2x+y-2=0$.

1.74. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau ?

(A) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$; (B) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

(C) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$; (D) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. PHÉP BIẾN HÌNH – §2. PHÉP TỊNH TIẾN

1.1. a) Giả sử $A = (x\ ;\ y)$. Khi đó $\begin{cases} x = 3+2 \\ y = 2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy $A = (5\ ;\ 1)$

b) Giả sử $A = (x\ ;\ y)$. Khi đó $\begin{cases} 3 = x+2 \\ 2 = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-2 \\ y = 2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy $A = (1\ ;\ 3)$.

1.2. a) Lấy một điểm thuộc d, chẳng hạn $M = (0\ ;\ 1)$. Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (0-2\ ;\ 1+1) = (-2\ ;\ 2)$ thuộc d'. Vì d' song song với d nên phương trình của nó có dạng $2x - 3y + C = 0$. Do $M' \in d'$ nên $2(-2) - 3.2 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 10$. Do đó d' có phương trình $2x - 3y + 10 = 0$.

b) Lấy một điểm thuộc d, chẳng hạn $M = (0\ ;\ 1)$. Đường thẳng d_2 qua M vuông góc với d có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (2\ ;\ -3)$. Do đó phương trình của d_2 là $\dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-1}{-3}$ hay $3x + 2y - 2 = 0$. Gọi M' là giao của d_1 với d_2 thì toạ độ của nó phải thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{13} \\ y = -\dfrac{11}{13}. \end{cases}$

Từ đó suy ra $\vec{w} = \overrightarrow{MM'} = \left(\dfrac{16}{13}\ ;\ -\dfrac{24}{13}\right)$.

1.3. Giao của d với trục Ox là điểm $A(3\ ;\ 0)$. Phép tịnh tiến phải tìm có vectơ tịnh tiến $\vec{v} = \overrightarrow{AO} = (-3\ ;\ 0)$. Đường thẳng d' song song với d và đi qua gốc toạ độ nên nó có phương trình $3x - y = 0$.

1.4. *Cách 1.* Dễ thấy (C) là đường tròn tâm $I(1\ ;\ -2)$, bán kính $r = 3$. Gọi $I' = T_{\vec{v}}(I) = (1-2\ ;\ -2+5) = (-1\ ;\ 3)$ và (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ thì (C') là đường tròn tâm I' bán kính $r = 3$. Do đó (C') có phương trình

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

Cách 2. Biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 5. \end{cases}$

Thay vào phương trình của (C) ta được

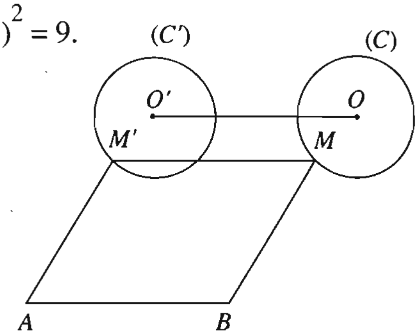
$$(x' + 2)^2 + (y' - 5)^2 - 2(x' + 2) + 4(y' - 5) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x'^2 + y'^2 + 2x' - 6y' + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = 9.$$

Do đó (C') có phương trình $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

1.5. Do tứ giác $ABMM'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MM'}$. Từ đó suy ra M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$. Từ đó suy ra tập hợp các điểm M' là đường tròn (C'), ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ (h.1.28).



Hình 1.28

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1.6. Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox. Khi đó $M' = (3 ; 5)$. Để tìm d' ta viết biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Ox : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ (1) .

Thay (1) vào phương trình của đường thẳng d ta được $3x' - 2y' - 6 = 0$. Từ đó suy ra phương trình của d' là $3x - 2y - 6 = 0$.

Thay (1) vào phương trình của (C) ta được $x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' - 4 = 0$. Từ đó suy ra phương trình của (C') là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Cũng có thể nhận xét (C) có tâm là $I(1 ; -2)$, bán kính bằng 3, từ đó suy ra tâm I' của (C') có toạ độ $(1 ; 2)$ và phương trình của (C') là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

1.7. Dễ thấy d và d' không song song với nhau. Do đó trục đối xứng Δ của phép đối xứng biến d thành d' chính là đường phân giác của góc tạo bởi d và d'. Từ đó suy ra Δ có phương trình

$$\frac{|x-5y+7|}{\sqrt{1+25}}=\frac{|5x-y-13|}{\sqrt{25+1}} \Leftrightarrow x-5y+7=\pm(5x-y-13).$$

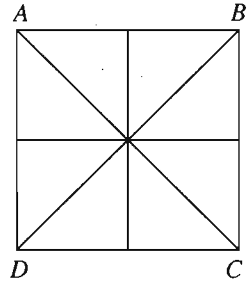
Từ đó tìm được hai phép đối xứng qua các trục :

Δ_1 có phương trình $x+y-5=0$, Δ_2 có phương trình $x-y-1=0$.

1.8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi F là phép đối xứng trục d biến hình vuông đó thành chính nó. Lí luận tương tự như ví dụ đã nêu ở vấn đề 2, §3, ta thấy A chỉ có thể biến thành các điểm A, B, C hoặc D.

– Nếu A biến thành chính nó thì C chỉ có thể biến thành chính nó và B biến thành D. Từ đó suy ra F là phép đối xứng qua trục AC.

– Nếu A biến thành B thì d là đường trung trực của AB. Khi đó C biến thành D.



Hình 1.29

Các trường hợp khác lập luận tương tự. Do đó hình vuông $ABCD$ có bốn trục đối xứng là các đường thẳng AC, BD và các đường trung trực của AB và BC (h.1.29).

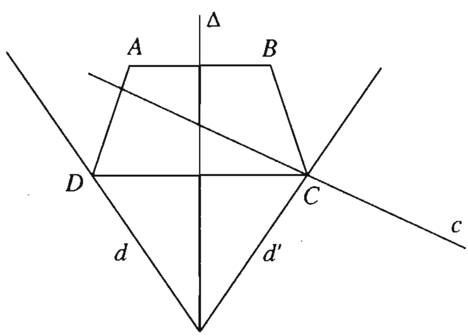
1.9. Ta thấy rằng B, C theo thứ tự là ảnh của A, D qua phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh AB, từ đó suy ra cách dựng :

– Dựng đường trung trực Δ của đoạn AB.

– Dựng d' là ảnh của d qua phép đối xứng qua trục Δ.

Gọi $C = d' \cap c$.

– Dựng D là ảnh của C qua phép đối xứng qua trục Δ (h.1.30).



Hình 1.30

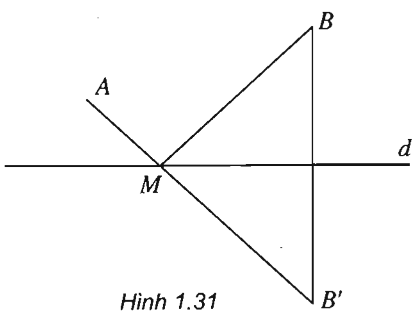
1.10. Gọi B' là ảnh của B qua phép đối xứng qua trục d. Khi đó với mỗi điểm M thuộc d

$MA + MB = MA + MB'$ nên

$MA + MB$ bé nhất $\Leftrightarrow$ $MA + MB'$ bé nhất

$\Leftrightarrow$ A, M, B' thẳng hàng.

Tức là $M = (AB') \cap d$ (h.1.31).



Hình 1.31

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1.11. Dựng ảnh của từng điểm A, B, C qua phép đối xứng đó.

1.12. a) Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua O. Dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ ta có:

$M' = (2\ ;\ -3)$, phương trình của d' : $3x - y - 9 = 0$, phương trình của đường tròn (C') : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

b) Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua I.

Vì I là trung điểm của MM' nên $M' = (4\ ;\ 1)$.

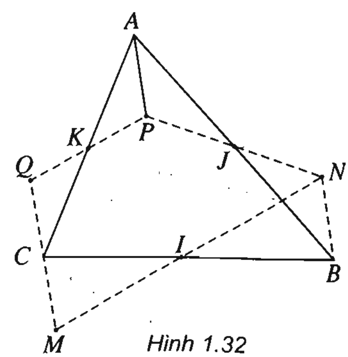
Vì d' song song với d nên d' có phương trình $3x - y + C = 0$. Lấy một điểm trên d, chẳng hạn $N(0\ ;\ 9)$. Khi đó ảnh của N qua phép đối xứng qua tâm I là $N'(2\ ;\ -5)$. Vì N' thuộc d' nên ta có $3.\ 2 - (-5) + C = 0$. Từ đó suy ra $C = -11$.

Vậy phương trình của d' là $3x - y - 11 = 0$.

Để tìm (C'), trước hết ta để ý rằng (C) là đường tròn tâm $J(-1\ ;\ 3)$, bán kính bằng 2. Ảnh của J qua phép đối xứng qua tâm I là $J'(3\ ;\ 1)$. Do đó (C') là đường tròn tâm J' bán kính bằng 2. Phương trình của (C') là $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

1.13. Giao của d và d' với Ox lần lượt là $A(-2\ ;\ 0)$ và $A'(8\ ;\ 0)$. Phép đối xứng qua tâm cần tìm biến A thành A' nên tâm đối xứng của nó là $I = (3\ ;\ 0)$.

1.14. Giả sử tam giác ABC đã dựng được (h.1.32). Lấy điểm M bất kì. Gọi N là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. P là ảnh của N qua phép đối xứng tâm J, Q là ảnh của P qua phép đối xứng tâm K. Khi đó $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{CQ}$. Do đó C là trung điểm của QM. Từ đó suy ra cách dựng tam giác ABC.

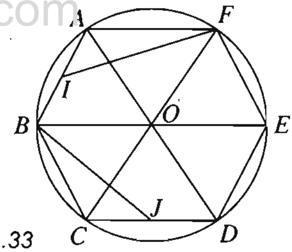


Hình 1.32

§5. PHÉP QUAY

1.15. a) Phép quay tâm O góc 120^o biến F, A, B lần lượt thành B, C, D ; biến trung điểm I của AB thành trung điểm J của CD. Nên nó biến tam giác AIF thành tam giác CJB (h.1.33).

b) Phép quay tâm E góc 60^o biến A, O, F lần lượt thành C, D, O.



Hình 1.33

1.16. Gọi $Q_{(O,\ 90^o)}$ là phép quay tâm O, góc quay 90^o (h.1.34).

$A' = (-3\ ;\ 3)$,

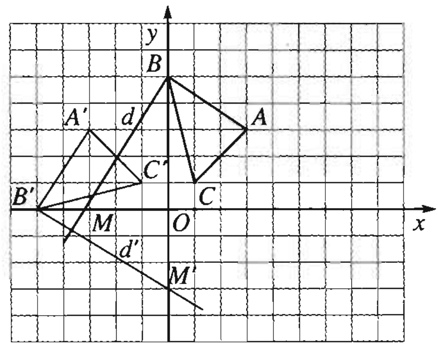
$B' = (-5\ ;\ 0)$,

$C' = (-1\ ;\ 1)$.

d đi qua B và $M(-3\ ;\ 0)$,

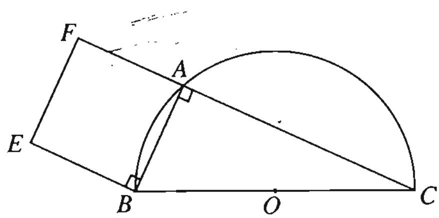
$M' = Q_{(O,\ 90^o)}(M) = (0\ ;\ -3)$

nên d' là đường thẳng $B'M'$ có phương trình $3x + 5y + 15 = 0$.



Hình 1.34

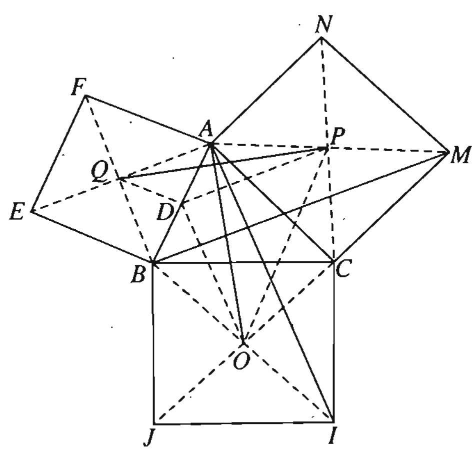
1.17. Xem E là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc 90^o. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O), E sẽ chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B, góc 90^o (h.1.35).



Hình 1.35

1.18. a) Phép quay tâm C góc 90^o biến MB thành AI. Do đó MB bằng và vuông góc với AI. DP song song và bằng nửa BM, DO song song và bằng nửa AI. Từ đó suy ra DP bằng và vuông góc với DO (h.1.36).

b) Từ câu a) suy ra phép quay tâm D, góc 90^o biến O thành P, biến A thành Q. Do đó OA bằng và vuông góc với PQ.



Hình 1.36

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

1.19. a) $M' = (1; 1) \equiv M$.

b) $M'' = (-3; 1)$.

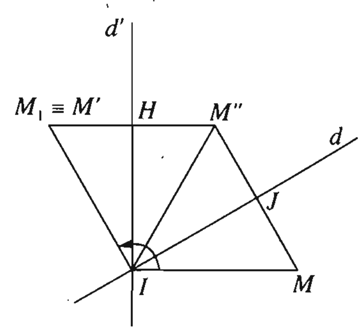
1.20. Gọi d_1 là ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90^o. Vì d chứa tâm quay O nên d_1 cũng chứa O. Ngoài ra d_1 vuông góc với d nên d_1 có phương trình $x + 2y = 0$.

Gọi d' là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$. Khi đó phương trình của d' có dạng $x + 2y + C = 0$. Vì d' chứa $O'(3 ; 1)$ là ảnh của O qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ nên $3 + 2 + C = 0$, từ đó $C = -5$. Vậy phương trình của d' là $x + 2y - 5 = 0$.

1.21. Gọi $Q_{(I,\ \alpha)}$ là phép quay tâm I góc α (h.1.37). Lấy đường thẳng d bất kì qua I.

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay tâm I góc $\frac{\alpha}{2}\cdot$ Lấy điểm M bất kì và gọi $M' = Q_{(I,\ \alpha)}(M)$. Gọi M'' là ảnh của M qua phép đối xứng qua trục d, M_1 là ảnh của M'' qua phép đối xứng qua trục d'. Gọi J là giao của MM'' với d, H là giao của $M''M_1$ với d'. Khi đó ta có đẳng thức giữa các góc lượng giác sau :

$$\begin{aligned}(IM, IM_1) &= (IM, IM'') + (IM'', IM_1)\\ &= 2(IJ, IM'') + 2(IM'', IH)\\ &= 2(IJ, IH)\\ &= 2\frac{\alpha}{2} = \alpha = (IM, IM').\end{aligned}$$

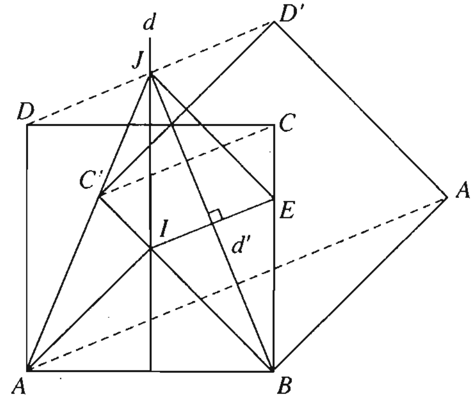


Hình 1.37

Từ đó suy ra $M' \equiv M_1$. Như vậy M' có thể xem là ảnh của M sau khi thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai trục d và d'.

1.22. a) Gọi F là phép đối xứng qua đường trung trực d của cạnh AB, G là phép đối xứng qua đường trung trực d' của cạnh IE. Khi đó F biến AI thành BI, G biến BI thành BE. Từ đó suy ra phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình F và G sẽ biến AI thành BE (h.1.38).

Hơn nữa, gọi J là giao của d và d', thì dễ thấy $JA = JB$, $JI = JE$ và $2(JI, JB) = (JI, JE) = 45^{o}$ (vì $JE \parallel IB$). Do đó theo kết quả của bài 1.21, phép dời hình nói trên chính là phép quay tâm J góc 45^{o}.



Hình 1.38

☞ ***Lưu ý.*** Có thể tìm được nhiều phép dời hình biến AI thành BE.

b) F biến các điểm A, B, C, D thành B, A, D, C ; G biến các điểm B, A, D, C thành B, A', D', C'. Do đó ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép dời hình nói trên là hình vuông $BA'D'C'$ đối xứng với hình vuông $BADC$ qua d'.

§7. PHÉP VỊ TỰ

1.23. a) Lấy hai điểm $A(0 ; 4)$ và $B(2 ; 0)$ thuộc d. Gọi A', B' theo thứ tự là ảnh của A và B qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$. Khi đó ta có

$$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}.$$

Vì $\overrightarrow{OA} = (0 ; 4)$ nên $\overrightarrow{OA'} = (0 ; 12)$. Do đó $A' = (0 ; 12)$. Tương tự $B' = (6 ; 0)$; d_1 chính là đường thẳng $A'B'$ nên nó có phương trình

$$\frac{x-6}{-6} = \frac{y}{12} \text{ hay } 2x + y - 12 = 0.$$

b) Có thể giải tương tự như câu a). Sau đây ta sẽ giải bằng cách khác. Vì $d_2 \parallel d$ nên phương trình của d_2 có dạng : $2x + y + C = 0$. Gọi $A' = (x' ; y')$ là ảnh của A qua phép vị tự đó thì ta có :

$$\overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \text{ hay } x' + 1 = -2,\ y' - 2 = -4.$$

Suy ra $x' = -3$, $y' = -2$.

Do A' thuộc d_2 nên $2(-3) - 2 + C = 0$. Từ đó suy ra $C = 8$.

Phương trình của d_2 là $2x + y + 8 = 0$.

1.24. Ta có $A(3\ ;\ -1)$ là tâm của (C) nên tâm A' của (C') là ảnh của A qua phép vị tự đã cho. Từ đó suy ra $A' = (-3\ ;\ 8)$. Vì bán kính của (C) bằng 3, nên bán kính của (C') bằng $|-2|.\ 3 = 6$.

Vậy (C') có phương trình : $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$.

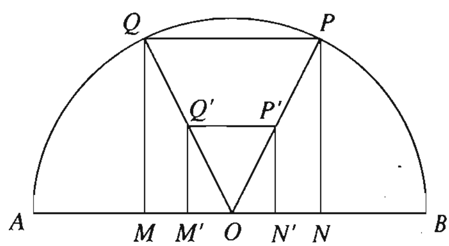
1.25. Gọi O là trung điểm của AB (h.1.39). Giả sử dựng được hình vuông $MNPQ$ có M, N thuộc đường kính AB ; P, Q thuộc nửa đường tròn. Khi đó O phải là trung điểm của MN. Nếu lấy một hình vuông $M'N'P'Q'$ sao cho M', N' thuộc AB, O là trung điểm $M'N'$, thì dễ thấy

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$

Từ đó suy ra hình vuông $MNPQ$ là ảnh của hình vuông $M'N'P'Q'$ qua phép vị tự tâm O, suy ra O, P, P' và O, Q, Q' thẳng hàng. Vậy ta có cách dựng :

– Dựng hình vuông $M'N'P'Q'$ nằm trong nửa hình tròn đã cho sao cho $M'N'$ thuộc AB và O là trung điểm của $M'N'$. Tia OP' cắt nửa đường tròn tại P ; tia OQ' cắt nửa đường tròn tại Q.

Khi đó dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông cần dựng.

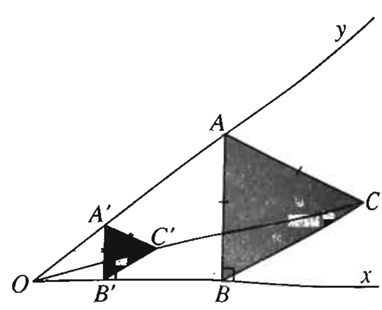


Hình 1.39

1.26. Giả sử điểm A đã dựng được (h.1.40). Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên Ox, khi đó $AB = AC$. Lấy điểm A' bất kì trên Oy, gọi B' là hình chiếu vuông góc của A' trên Ox, đường thẳng qua A' song song với AC cắt đường thẳng OC tại C'. Khi đó có thể coi tam giác ABC là ảnh của tam giác $A'B'C'$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $\dfrac{AC}{A'C'}$ nên $A'C' = A'B'$.

Từ đó suy ra cách dựng :

– Lấy điểm A' bất kì trên Oy, dựng B' là hình chiếu vuông góc của A' lên Ox.



Hình 1.40

– Lấy C' là một giao điểm của đường tròn tâm A' bán kính $A'B'$ với đường thẳng OC.

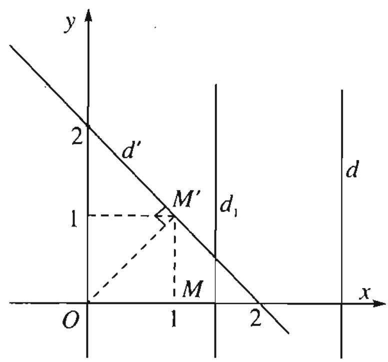
– Đường thẳng qua C song song với $A'C'$ cắt Oy tại A.

Dễ thấy A là điểm phải dựng.

Bài toán có hai nghiệm hình.

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

1.27. Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ thì phương trình của d_1 là $x = \sqrt{2}$ (h.1.41). Giả sử d' là ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc 45^o. Lấy $M(\sqrt{2}\ ;\ 0)$ thuộc d_1 thì ảnh của nó qua phép quay tâm O góc 45^o là $M'(1\ ;\ 1)$ thuộc d'. Vì $OM \perp d_1$ nên $OM' \perp d'$. Vậy d' là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với OM'. Do đó nó có phương trình $x + y - 2 = 0$.



Hình 1.41

1.28. Dễ thấy bán kính của (C') bằng 4. Tâm I' của (C') là ảnh của tâm $I(1\ ;\ 2)$ của (C) qua phép đồng dạng nói trên. Qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$, I biến thành $I_1(-2\ ;\ -4)$. Qua phép đối xứng qua trục Ox, I_1 biến thành $I'(-2\ ;\ 4)$.

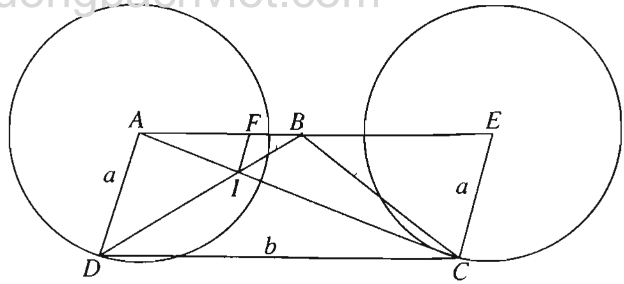
Từ đó suy ra phương trình của (C') là $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

1.29. Dùng phép tịnh tiến đưa về hai đa giác đều cùng tâm đối xứng, sau đó dùng phép quay đưa về hai đa giác đều cùng tâm đối xứng có các đỉnh tương ứng thẳng hàng với tâm, cuối cùng dùng phép vị tự biến đa giác này thành đa giác kia.

1.30. a) Dựng hình bình hành $ADCE$. Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}$ không đổi (h.1.42).

Do $AE = b$ không đổi, nên E cố định. Do $AD = EC = a$ nên khi D chạy trên đường tròn $(A\ ;\ a)$ thì C chạy trên đường tròn $(E\ ;\ a)$ là ảnh của $(A\ ;\ a)$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AE}$.

b) Đường thẳng qua I, song song với AD cắt AE tại F.



Hình 1.42

Ta có $\dfrac{AI}{IC}=\dfrac{AB}{CD}$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AI+IC}=\dfrac{AB}{AB+b}$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AB}{AB+b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{AB}{AB+b}\overrightarrow{AC}.$

Do đó có thể xem I là ảnh của C qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\dfrac{AB}{AB+b}\cdot$ Vậy khi C chạy trên $(E\ ;\ a)$ thì I chạy trên đường tròn là ảnh của $(E\ ;\ a)$ qua phép vị tự nói trên.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.31. Phương trình d' : $3x-5y+12=0$.

1.32. Xem D là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$. Do C chạy trên đường tròn (C) tâm A bán kính m, trừ ra giao điểm của (C) với đường thẳng AB, nên D thuộc đường tròn là ảnh của đường tròn nói trên qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

1.33. Giả sử đã dựng được hai điểm M, N thoả mãn điều kiện đầu bài. Đường thẳng qua M và song song với AC cắt BC tại D. Khi đó tứ giác $MNCD$ là hình bình hành. Do đó $CN = DM$. Từ đó suy ra tam giác AMD cân tại M. Do đó $\widehat{MAD}=\widehat{MDA}=\widehat{DAC}$. Suy ra AD là phân giác trong của góc A. Do đó AD dựng được. Ta lại có $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{CD}$, nên có thể xem M là ảnh của N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$.

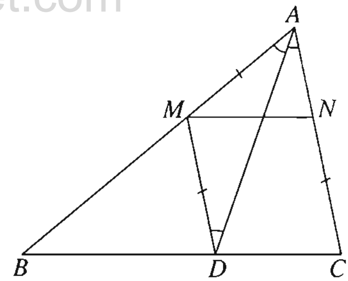
Từ đó suy ra cách dựng :

– Dựng đường phân giác trong của góc A. Đường này cắt BC tại D.

– Dựng đường thẳng d là ảnh của đường thẳng AC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$. d cắt AB tại M.

– Dựng N sao cho $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$.

Khi đó dễ thấy M, N thoả mãn điều kiện đầu bài (h.1.43).



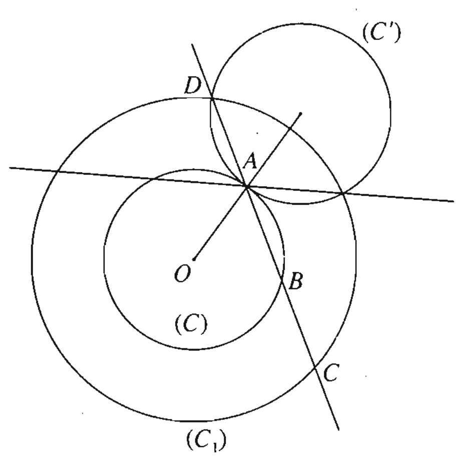
Hình 1.43

1.34. a) $d_1 :\ 3x + 2y + 6 = 0$.

b) Giao của d và Δ là $A(2\ ;\ 0)$. Lấy $B(0\ ;\ -3)$ thuộc d. Ảnh của B qua phép đối xứng qua đường thẳng Δ là $B'(5\ ;\ 2)$. Khi đó d' chính là đường thẳng AB' : $2x - 3y - 4 = 0$.

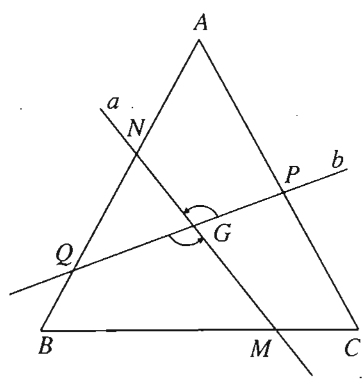
1.35. Tập các điểm N thuộc đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trung điểm của AB.

1.36. Gọi (C) là đường tròn tâm O bán kính r, (C_1) là đường tròn tâm O bán kính R (h.1.44). Giả sử đường thẳng đã dựng được. Khi đó có thể xem D là ảnh của B qua phép đối xứng qua tâm A. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua tâm A, thì D thuộc giao của (C') và (C_1). Số nghiệm của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của (C') với (C_1).



Hình 1.44

1.37. Dễ thấy d chứa điểm $H(1\ ;\ 1)$ và $OH \perp d$. Gọi H' là ảnh của H qua phép quay tâm O góc 45° thì $H' = (0\ ;\ \sqrt{2})$. Từ đó suy ra d' phải qua H' và vuông góc với OH'. Vậy phương trình của d' là $y = \sqrt{2}$.



Hình 1.45

1.38. Gọi $Q_{(G,120^{\circ})}$ là phép quay tâm G góc 120° (h.1.45). Phép quay này biến b

thành a, biến CA thành AB ; do đó nó biến P thành N. Tương tự $Q_{(G,120^o)}$ cũng biến Q thành M. Từ đó suy ra $GP = GN$, $GQ = GM$. Do đó hai tam giác GNQ và GPM bằng nhau, suy ra $NQ = PM$. Vì $Q_{(G,120^o)}$ biến PQ thành NM nên $PQ = NM$. Từ đó suy ra hai tam giác NQM và PMQ bằng nhau. Do đó $\widehat{NQM} = \widehat{PMQ}$. Tương tự $\widehat{QNP} = \widehat{MPN}$. Từ đó suy ra $\widehat{PNQ} + \widehat{NQM} = 180^o$. Do đó NP // QM. Vậy ta có tứ giác $MPNQ$ là một hình thang cân.

1.39. Theo định nghĩa của phép đồng dạng ta có $B'C' = kBC$, từ đó suy ra $B'C'^2 = k^2BC^2$. Hay $(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'})^2 = k^2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$. Suy ra

$$A'C'^2 - 2\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} + A'B'^2 = k^2(AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + AB^2).$$

Để ý rằng $A'C'^2 = k^2AC^2$, $A'B'^2 = k^2AB^2$ ta suy ra điều phải chứng minh.

1.40. Để ý rằng $A'C'^2 = k^2AC^2$, $A'B'^2 = k^2AB^2$, $\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'B'} = k^2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, ta có

$$(\overrightarrow{A'B'} - p\overrightarrow{A'C'})^2 = A'B'^2 - 2p\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} + p^2A'C'^2$$

$$= k^2(AB^2 - 2p\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + p^2AC^2)$$

$$= k^2(\overrightarrow{AB} - p\overrightarrow{AC})^2 = 0.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{A'B'} - p\overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$.

Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Khi đó $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, với $0 < t < 1$. Áp dụng bài 1.39 ta cũng có $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$, với $0 < t < 1$. Do đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng và điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C'.

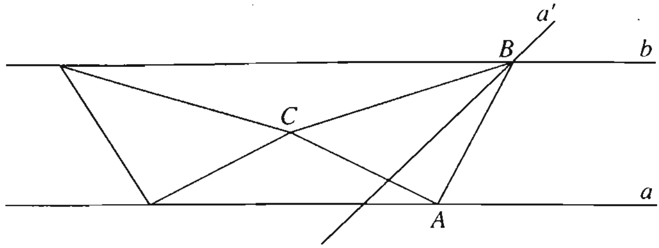
1.41. Lấy điểm $N(x_1; y_1)$, thì điểm $N'(2x_1 - 1 ; -2y_1 + 3) = F(N)$. Ta có

$$M'N'^2 = (2x_1 - 2x)^2 + (-2y_1 + 2y)^2 = 4[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] = 4MN^2.$$

Từ đó suy ra với hai điểm M, N tuỳ ý và M', N' lần lượt là ảnh của chúng qua F ta có $M'N' = 2MN$. Vậy F là một phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng là 2.

1.42. Xem B là ảnh của A qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C góc $\pm 45^o$ và phép vị tự tâm C tỉ số $k = \sqrt{2}$ (h.1.46).

Vì A thuộc a nên B thuộc đường thẳng a' là ảnh của a qua phép đồng dạng nói trên. Vậy B là giao của a' và b. Từ đó suy ra cách dựng. Bài toán có hai nghiệm hình.



Hình 1.46

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.43. (C).

1.44. (D).

1.45. (D).

1.46. (B) Đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$.

1.47. (B) Đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$.

1.48. (B).

1.49. (D).

1.50. (A).

1.51. (B).

1.52. (A).

1.53. (B).

1.54. (A).

1.55. (B).

1.56. (C).

1.57. (B).

1.58. (D).

1.59. (C).

1.60. (D).

1.61. (B).

1.62. (B).

1.63. (C).

1.64. (D).

1.65. (D).

1.66. (A).

1.67. (D).

1.68. (C).

1.69. (B).

1.70. (C).

1.71. (D).

1.72. (C).

1.73. (B).

1.74. (D).

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4. Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ đó suy ra : Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Tính chất 6. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

II. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết :

1. Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng ;

2. Nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó ;

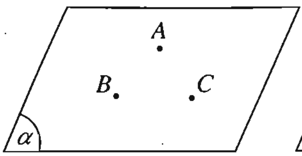
3. Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Kí hiệu

– (ABC) biểu thị mặt phẳng xác định bởi ba điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C (h.2.1).

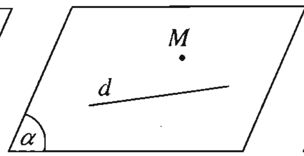
– (M, d) biểu thị mặt phẳng xác định bởi đường thẳng d và điểm M không nằm trên d (h.2.2).

– (d_1, d_2) biểu thị mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h.2.3).



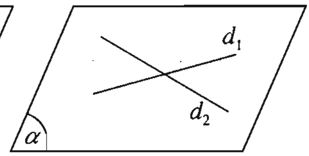
(ABC)

Hình 2.1



(M, d)

Hình 2.2



(d_1, d_2)

Hình 2.3

III. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và BCD được gọi là hình tứ diện, kí hiệu là $ABCD$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng.

2. Ví dụ

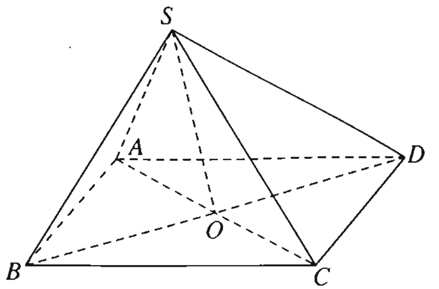
Ví dụ 1. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD (h.2.4). Ta có S và O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD) nên :

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO.



Hình 2.4

Ví dụ 2. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình thang $ABCD$ (AB // CD và $AB > CD$). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

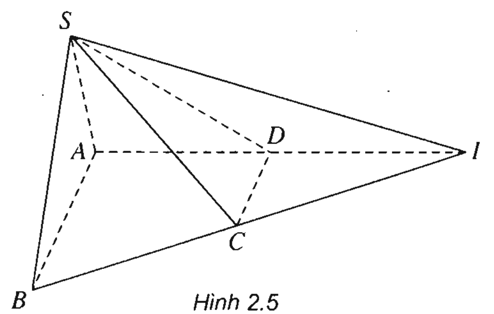
Giải

Gọi I là giao điểm AD và BC (h.2.5).

Ta có S và I là hai điểm chung của (SAD) và (SBC) nên

$(SAD) \cap (SBC) = SI$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SI.



Hình 2.5

VẤN ĐỀ 2

Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

1. Phương pháp giải

Trường hợp 1. Trong (α) có sẵn đường thẳng d' cắt d tại I.

Ta có ngay $d \cap (\alpha) = I$.

Trường hợp 2. Trong (α) không có sẵn d' cắt d. Khi đó ta thực hiện như sau :

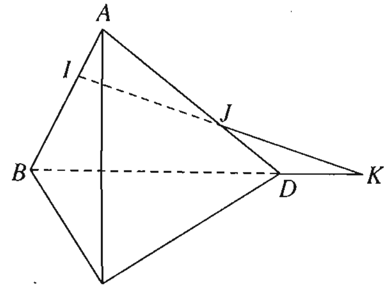
– Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa d và (β) cắt (α) theo giao tuyến d',

– Gọi $I = d' \cap d$.

Ta có $d \cap (\alpha) = I$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{2}IB$ và $AJ = \frac{3}{2}JD$. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ với mặt phẳng (BCD).



Hình 2.6

Giải

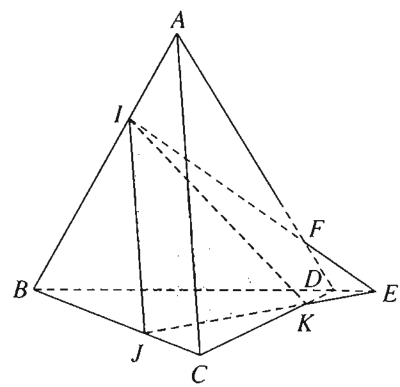
Do $\begin{cases} AI = \frac{1}{2}IB \\ AJ = \frac{3}{2}JD \end{cases}$

nên IJ kéo dài sẽ cắt BD, gọi giao điểm là K (h.2.6). Ta có $K = IJ \cap (BCD)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC và CD sao cho

$$AI = \frac{1}{3}AB \,;\, BJ = \frac{2}{3}BC \,;\, CK = \frac{4}{5}CD.$$

Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với đường thẳng AD.



Hình 2.7

Giải

Gọi E là giao điểm của JK và BD, F là giao điểm của AD và IE (h.2.7).

Ta có $F = AD \cap (IJK)$.

Vấn đề 3

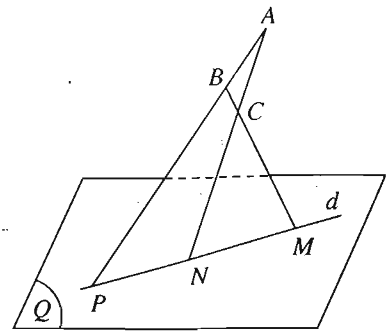
Chứng minh ba điểm thẳng hàng

1. Phương pháp giải

Nếu phải chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm ấy cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (Q) và các đường thẳng BC, CA, AB cắt (Q) lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.



Hình 2.8

Giải

Ta có M, N, P lần lượt thuộc về hai mặt phẳng (Q) và (ABC) nên M, N, P thuộc giao tuyến d của (Q) và (ABC) (h.2.8). Vậy M, N, P thẳng hàng.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

a) Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

b) Lấy N là điểm thuộc miền trong của tam giác ABD sao cho JN cắt đoạn AB tại L. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNJ) và (ABC).

2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (SBM) và (SCD) ;

b) (ABM) và (SCD) ;

c) (ABM) và (SAC).

2.3. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy các điểm J, K lần lượt là điểm thuộc miền trong các tam giác BCD và ACD. Gọi L là giao điểm của JK với mặt phẳng (ABC).

a) Hãy xác định điểm L.

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

2.4. Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K thuộc đoạn BD (K không là trung điểm của BD). Tìm giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNK).

2.5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy M, N và P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, AB và BC sao cho chúng không trùng với trung điểm của các đoạn thẳng ấy. Tìm giao điểm (nếu có) của mặt phẳng (MNP) với các cạnh của hình chóp.

2.6. Cho hình chóp $S.ABCD$. M và N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

2.7. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.

Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

2.8. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến d. Trong (α) lấy hai điểm A và B sao cho AB cắt d tại I. O là một điểm nằm ngoài (α) và (β) sao cho OA và OB lần lượt cắt (β) tại A' và B'.

a) Chứng minh ba điểm I, A', B' thẳng hàng.

b) Trong (α) lấy điểm C sao cho A, B, C không thẳng hàng. Giả sử OC cắt (β) tại C', BC cắt $B'C'$ tại J, CA cắt $C'A'$ tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

2.9. Cho tứ diện $SABC$ có D, E lần lượt là trung điểm AC, BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) qua BC cắt SD và SA lần lượt tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN$, $J = BP \cap EQ$. Chứng minh bốn điểm S, I, J, G thẳng hàng.

b) Giả sử $AN \cap DM = K$, $BQ \cap EP = L$. Chứng minh ba điểm S, K, L thẳng hàng.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có hai trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b :

Trường hợp 1 : Có một mặt phẳng chứa a và b.

Xảy ra ba khả năng sau :

1. a và b cắt nhau tại điểm M, ta kí hiệu $a \cap b = M$;
2. a và b song song với nhau, ta kí hiệu $a // b$ hoặc $b // a$;
3. a và b trùng nhau, ta kí hiệu $a \equiv b$.

Trường hợp 2 : Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, khi đó ta nói a và b chéo nhau.

II. CÁC ĐỊNH LÍ VÀ TÍNH CHẤT

1. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

2. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau. (Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.)

3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

4. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (dùng quan hệ song song)

1. Phương pháp giải

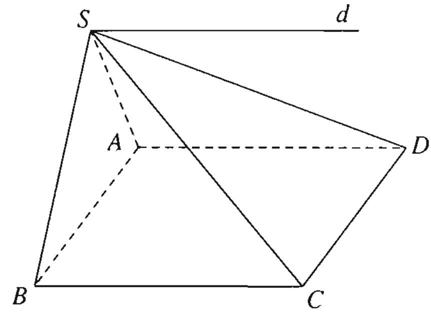
Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song d và d' thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Δ đi qua S và song song hoặc trùng với d hay d'.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình bình hành $ABCD$ và S là điểm không thuộc mặt phẳng của hình bình hành. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Giải

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song AD và BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AD và BC (h.2.9).



Hình 2.9

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng song song

1. Phương pháp giải

a) Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng.

b) Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

c) Dùng tính chất : Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng ấy.

d) Dùng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

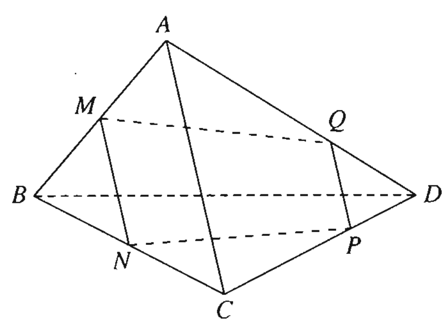
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ). Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

Giải

Ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (MNQ) lần lượt cắt nhau theo các giao tuyến AC, MN và PQ.

Vì $MN \parallel AC$ (tính chất đường trung bình của tam giác), nên $PQ \parallel MN \parallel AC$ (theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng) (h.2.10).



Hình 2.10

VẤN ĐỀ 3

Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp giải

Ta thường dùng phương pháp phản chứng như sau :

Giả sử hai đường thẳng đã cho cùng nằm trong một mặt phẳng rồi rút ra điều mâu thuẫn.

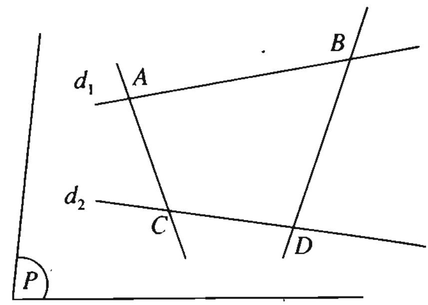
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho d_1, d_2 là hai đường thẳng chéo nhau. Trên d_1, lấy hai điểm phân biệt A và B ; trên d_2 lấy hai điểm phân biệt C và D. Chứng minh rằng AC và BD chéo nhau.

Giải

Giả sử AC và BD không chéo nhau.

Như vậy có một mặt phẳng (P) chứa cả d_1 và d_2. Khi đó ta có d_1 và d_2 cùng nằm trên (P). Điều này mâu thuẫn với giả thiết d_1 và d_2 chéo nhau. Vậy AC và BD chéo nhau (h.2.11).



Hình 2.11

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây :

a) (SAC) và (SBD) ; b) (SAB) và (SCD) ; c) (SAD) và (SBC).

2.11. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

2.12. Cho tứ diện $ABCD$. Cho I và J tương ứng là trung điểm của BC và AC, M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AD.

a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).

b) Gọi N là giao điểm của BD với giao tuyến d, K là giao điểm của IN và JM. Tìm tập hợp điểm K khi M di động trên đoạn AD (M không là trung điểm của AD).

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABK) và (MIJ).

2.13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC và BD. Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

2.14. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

2.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy là AD và BC. Biết $AD = a$, $BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Giả sử AM cắt BP tại E ; CQ cắt DN tại F. Chứng minh rằng EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a và b.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta có ba vị trí tương đối như sau :

1. d và (α) cắt nhau tại M, kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$;

2. d song song với (α), kí hiệu $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$;

3. d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$.

II. ĐỊNH LÍ VÀ TÍNH CHẤT

1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \,//\, d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \,//\, (\alpha).$$

2. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì d' song song với d.

$$\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ (\beta) \supset d \\ (\beta) \cap (\alpha) = d' \end{cases} \Rightarrow d \,//\, d'.$$

3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \,//\, d \\ (\beta) \,//\, d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \,//\, d'.$$

4. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

1. Phương pháp giải

a) Ta chứng minh đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.

b) Ta chứng minh đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng và song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng $MG \parallel (ACD)$.

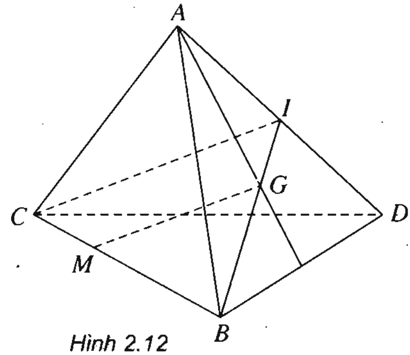
Giải

Gọi I là trung điểm AD (h.2.12).

Trong tam giác CBI ta có

$\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BG}{BI} = \dfrac{2}{3}$ nên $MG \parallel CI$.

Mà CI nằm trong mặt phẳng (ACD) suy ra $MG \parallel (ACD)$.



Hình 2.12

VẤN ĐỀ 2

Dựng thiết diện song song với một đường thẳng

1. Phương pháp giải

Ta có thể dùng định lí sau :

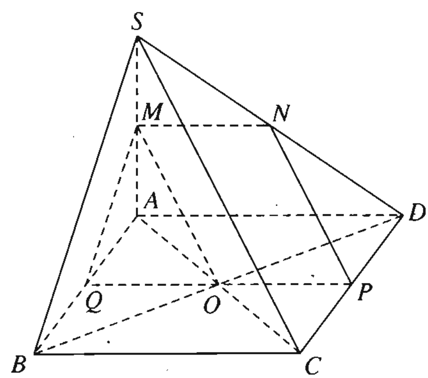
Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì d' song song với d.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$ nếu (α) qua M và đồng thời song song với SC và AD.

Giải

Vì (α) song song với AD nên (α) cắt hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ theo hai giao tuyến song song với AD (h.2.13).



Hình 2.13

Tương tự (α) song song với SC nên (α) cắt hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) theo các giao tuyến song song với SC.

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SC \parallel MO$ (đường trung bình trong tam giác SAC). Qua O kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và CD lần lượt tại Q và P. Qua M, kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại N.

Theo nhận xét trên, ta có $MN \parallel PQ$ và $NP \parallel SC$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

2.17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của AE và BF.

a) Chứng minh rằng OO' song song với hai mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh rằng $MN \parallel (CEF)$.

2.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh rằng $NG \parallel (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $MG \parallel (SCD)$.

2.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, đáy lớn là AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh rằng $OG \parallel (SBC)$.

b) Cho M là trung điểm của SD. Chứng minh rằng $CM \parallel (SAB)$.

c) Giả sử điểm I nằm trong đoạn SC sao cho $SC = \dfrac{3}{2}SI$. Chứng minh rằng $SA \parallel (BID)$.

2.20. Cho tứ diện $ABCD$. Qua điểm M nằm trên AC ta dựng một mặt phẳng (α) song song với AB và CD. Mặt phẳng này lần lượt cắt các cạnh BC, BD và AD tại N, P và Q.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ?

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $MNPQ$. Tìm tập hợp các điểm O khi M di động trên đoạn AC.

2.21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. M là một điểm di động trên đoạn AB. Một mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SA và BC ; (α) cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P và Q.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ?

b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định.

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$.

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing.$$

II. ĐỊNH LÍ VÀ TÍNH CHẤT

1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

$$\begin{cases} a \subset (\alpha),\ b \subset (\alpha) \\ a \text{ cắt } b \\ a // (\beta),\ b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

3. Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Hệ quả

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

4. Định lí Ta-lét (Thalès)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

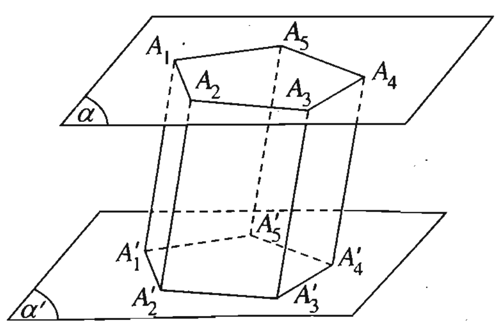
III. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH CHÓP CỤT

• **Hình lăng trụ**

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ (h.2.14).

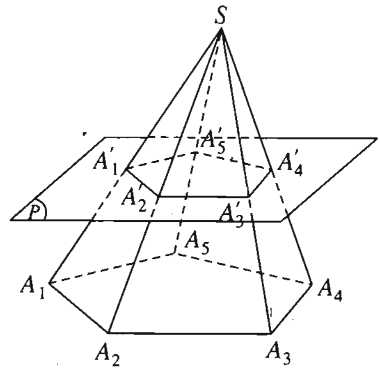
Lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Hình 2.14

• **Hình chóp cụt**

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là *hình chóp cụt*, kí hiệu là $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$ (h.2.15).



Hình 2.15

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau

1. Phương pháp giải

a) Ta có thể chứng minh chúng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

b) Ta chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

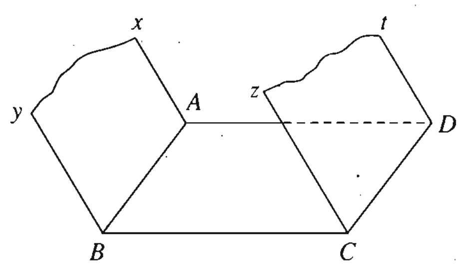
2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ các đỉnh A, B, C và D lần lượt kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz và Dt song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh mặt phẳng (Ax, By) song song với mặt phẳng (Cz, Dt).

Giải

Ta có Cz // By nên Cz // (Ax, By) (h 2.16). Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên CD // AB do đó CD // (Ax, By).

Mặt phẳng (Cz, Dt) chứa hai đường thẳng cắt nhau Cz, CD cùng song song với (Ax, By) nên (Cz, Dt) // (Ax, By).



Hình 2.16

Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với một hình chóp khi cho biết (α) song song với một mặt phẳng xác định nào đó

1. Phương pháp giải

a) *Áp dụng.* Khi (α) song song với một mặt phẳng (β) nào đó thì (α) sẽ song song với tất cả đường thẳng nằm trong (β).

b) Để xác định giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, ta làm như sau :

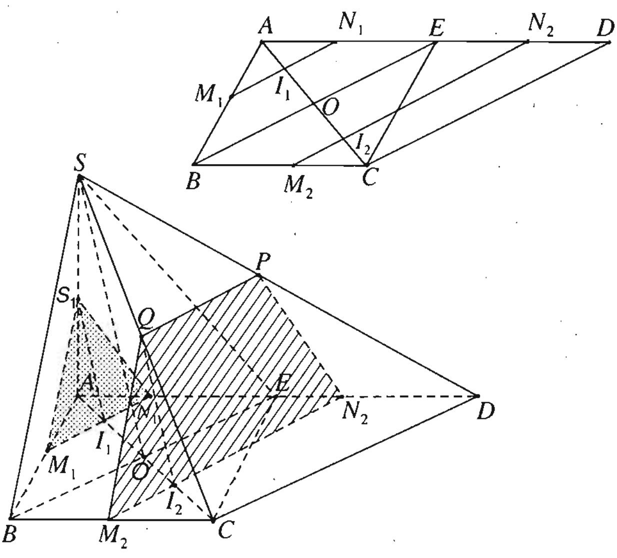
– Tìm đường thẳng d nằm trong (β).

– Vì (α) // d nên (α) cắt những mặt phẳng chứa d theo các giao tuyến song song với d.

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình thang $ABCD$ có AD // BC, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O là giao điểm của AC và BE. I là một điểm di động trên cạnh AC khác với A và C. Qua I, ta vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Giải



Hình 2.17

Ta thấy rằng tứ giác $BEDC$ là hình bình hành vì :

$$ED \parallel BC, ED = BC\left(=\frac{1}{2}AD\right), \text{(h.2.17)}.$$

Trường hợp 1. I thuộc đoạn AO và I khác O. Gọi vị trí này là I_1, $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên $(\alpha) \parallel BE$ và $(\alpha) \parallel SO$.

- $(\alpha) \parallel BE$ nên (α) cắt (ABE) theo giao tuyến M_1N_1 đi qua I_1 và $M_1N_1 \parallel BE$ ($M_1 \in AB$, $N_1 \in AE$).

- $(\alpha) \parallel SO$ nên (α) cắt (SAC) theo giao tuyến S_1I_1 đi qua I_1 và song song với SO ($S_1 \in SA$).

Ta có thiết diện là tam giác $S_1M_1N_1$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC và I khác O. Gọi vị trí này là I_2, $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên $(\alpha) \parallel BE$ và $(\alpha) \parallel SO$.

- $(\alpha) \parallel BE$ nên (α) cắt $(BEDC)$ theo giao tuyến M_2N_2 đi qua I_2 và $M_2N_2 \parallel BE$ ($M_2 \in BC$, $N_2 \in ED$).

- $(\alpha) \parallel SO$ nên (α) cắt (SOC) theo giao tuyến QI_2 đi qua I_2 và song song với SO ($Q \in SC$).

Do $(\alpha) \parallel CD$ (vì $CD \parallel BE$) nên (α) sẽ cắt hai mặt phẳng $(BEDC)$ và (SDC) theo hai giao tuyến M_2N_2, PQ cùng song song với CD ($P \in SD$).

Ta có thiết diện là hình thang M_2N_2PQ.

Trường hợp 3. $I \equiv O$

Dễ thấy thiết diện là tam giác SBE. Khi đó, $(SBE) \equiv (\alpha)$ (loại).

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

2.23. Từ bốn đỉnh của hình bình hành $ABCD$ vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz và Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C' và D'.

a) Chứng minh rằng $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.

b) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì ?

c) Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.

2.24. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $M'N' \parallel DF$.

c) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$ và $MN \parallel (DEF)$.

2.25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên là AA', BB', CC'. Gọi I và I' tương ứng là trung điểm của hai cạnh BC và $B'C'$.

a) Chứng minh rằng $AI \parallel A'I'$.

b) Tìm giao điểm của IA' với mặt phẳng $(AB'C')$.

c) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC)$.

2.26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

a) Chứng minh rằng $CB' \parallel (AHC')$.

b) Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ và (ABC).

2.27. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm di động tương ứng trên AD và BE sao cho

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}.$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy chỉ ra mặt phẳng cố định đó.

2.28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo, $AC = a$, $BD = b$, tam giác SBD đều. Gọi I là điểm di động trên đoạn AC với $AI = x$ $(0 < x < a)$. Lấy (α) là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (SBD).

a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

b) Tìm diện tích S của thiết diện ở câu a) theo a, b, x. Tìm x để S lớn nhất.

2.29. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ) song song với nhau. Hai đường thẳng a và a' cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự nói trên tại A, B, C và A', B', C'. Cho $AB = 5$, $BC = 4$, $A'C' = 18$. Tính độ dài $A'B'$, $B'C'$.

2.30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{JB}{JC}\cdot$ Chứng minh rằng IJ luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

2.31. Cho hai tia Ax, By chéo nhau. Lấy M, N lần lượt là các điểm di động trên Ax, By. Gọi (α) là mặt phẳng chứa By và song song với Ax. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt (α) tại M'.

a) Tìm tập hợp điểm M'.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các điểm I khi $AM = BN$.

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ cắt (α) tại điểm M' xác định.

Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương của đường thẳng Δ được gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

2. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

3. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

4. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

III. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT SỐ HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

1. Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông ...).

2. Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi...).

3. Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình đã cho.

4. Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ

Vẽ hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ cho trước

1. Phương pháp giải

a) Xác định các yếu tố song song của hình $\mathscr{H}$.

b) Xác định tỉ số điểm M chia đoạn AB.

c) Hình $\mathscr{H}'$ là hình biểu diễn của hình $\mathscr{H}$ phải có tính chất

– Bảo đảm tính song song trên hình $\mathscr{H}$;

– Bảo đảm tỉ số của điểm M chia đoạn AB.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$, trong đó $A'B'C'$ là hình chiếu song song của tam giác ABC.

Giải

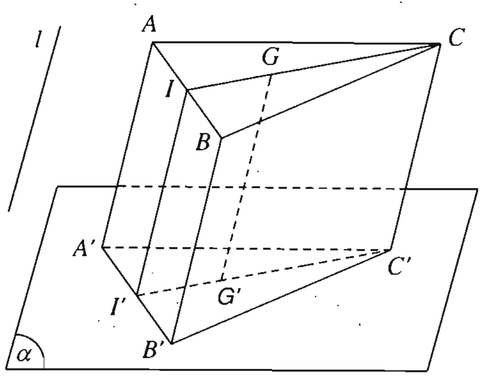
Gọi I là trung điểm của cạnh AB.

Hình chiếu I' của I là trung điểm của $A'B'$ (h.2.18).

$G \in CI$ nên $G' \in C'I'$;

$\frac{GC}{GI} = 2$ nên $\frac{G'C'}{G'I'} = 2$.

Vậy G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.



Hình 2.18

Ví dụ 2. Hình thang có thể là hình biểu diễn của hình bình hành không ?

Giải

Hình thang không thể là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song trong khi đó cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.32. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không ? Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có song song với nhau hay không ?

2.33. Trong mặt phẳng (α) cho một tam giác ABC bất kì. Chứng minh rằng có thể xem tam giác ABC là hình chiếu song song của một tam giác đều nào đó.

2.34. Vẽ hình biểu diễn của một hình lục giác đều.

2.35. Hãy vẽ hình biểu diễn của một đường tròn cùng với hai đường kính vuông góc của đường tròn đó.

2.36. Hãy chọn phép chiếu song song với phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp để hình chiếu song song của một tứ diện cho trước là một hình bình hành.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.37. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC. Từ ba đỉnh của tam giác này ta kẻ các nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz không nằm trong (α). Trên Ax lấy đoạn $AA' = a$, trên By lấy đoạn $BB' = b$, trên Cz lấy đoạn $CC' = c$.

a) Gọi I, J và K lần lượt là các giao điểm $B'C'$, $C'A'$ và $A'B'$ với (α).

Chứng minh rằng $\dfrac{IB}{IC}\cdot\dfrac{JC}{JA}\cdot\dfrac{KA}{KB}=1$.

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Chứng minh : $GG' \parallel AA'$.

c) Tính GG' theo a, b, c.

2.38. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M nằm trong tam giác BCD.

a) Dựng đường thẳng qua M song song với hai mặt phẳng (ABC) và (ABD). Giả sử đường thẳng này cắt mặt phẳng (ACD) tại B'.

Chứng minh rằng AB', BM và CD đồng quy tại một điểm.

b) Chứng minh $\dfrac{MB'}{BA}=\dfrac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)}$.

c) Đường thẳng song song với hai mặt phẳng (ACB) và (ACD) kẻ từ M cắt (ABD) tại C' và đường thẳng song song với hai mặt phẳng (ADC) và (ADB) kẻ từ M cắt (ABC) tại D'. Chứng minh rằng

$$\frac{MB'}{BA}+\frac{MC'}{CA}+\frac{MD'}{DA}=1.$$

2.39. Từ các đỉnh của tam giác ABC ta kẻ các đoạn thẳng AA', BB', CC' song song, cùng chiều, bằng nhau và không nằm trong mặt phẳng của tam giác. Gọi I, G và K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC' và $A'B'C'$.

a) Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$.

b) Chứng minh rằng $(A'GK) \parallel (AIB')$.

2.40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh bên AA' và CC'. Một điểm P nằm trên cạnh bên DD'.

a) Xác định giao điểm Q của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).

b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện. Thiết diện đó có tính chất gì ?

c) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(ABCD)$ của hình hộp.

2.41. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC' sao cho $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{CN}{NC'}$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACB').

b) Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB').

2.42. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và $A'C$ cắt nhau và hai đường chéo BD' và $B'D$ cắt nhau.

b) Cho E và F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh $MN = EF$.

2.43. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến m. Trên đường thẳng d cắt (α) ở A và cắt (β) ở B ta lấy hai điểm cố định S_1, S_2 không thuộc (α), (β). Gọi M là một điểm di động trên (β). Giả sử các đường thẳng MS_1, MS_2 cắt (α) lần lượt tại M_1 và M_2.

a) Chứng minh rằng M_1M_2 luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử đường thẳng M_1M_2 cắt giao tuyến m tại K. Chứng minh rằng ba điểm K, B, M thẳng hàng.

c) Gọi b là một đường thẳng thuộc mặt phẳng (β) nhưng không đi qua điểm B và cắt m tại I. Chứng minh rằng khi M di động trên b thì các điểm M_1 và M_2 di động trên hai đường thẳng cố định thuộc mặt phẳng (α).

2.44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và các trung điểm E, F của các cạnh AB, DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh $B'C'$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.45. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất ?

(A) Ba điểm ; (B) Một điểm và một đường thẳng ;

(C) Hai đường thẳng cắt nhau ; (D) Bốn điểm.

2.46. Cho hai đường thẳng a và b. Điều kiện nào sau đây đủ để kết luận a và b chéo nhau ?

(A) a và b không có điểm chung ;

(B) a và b là hai cạnh của một hình tứ diện ;

(C) a và b nằm trên hai mặt phẳng phân biệt ;

(D) a và b không cùng nằm trên bất kì mặt phẳng nào.

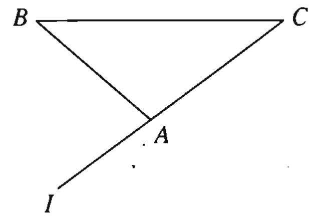
2.47. Cho tam giác ABC, lấy điểm I trên cạnh AC kéo dài (h.2.19). Các mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai ?

(A) $A \in (ABC)$;

(B) $I \in (ABC)$;

(C) $(ABC) \equiv (BIC)$;

(D) $BI \not\subset (ABC)$.



Hình 2.19

2.48. Cho tam giác ABC. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh tam giác ABC ?

(A) 4 ; (B) 3 ; (C) 2 ; (D) 1.

2.49. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng, có thể xác định nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó ?

(A) 6 ; (B) 4 ; (C) 3 ; (D) 2.

2.50. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối không song song. Giả sử $AC \cap BD = O$ và $AD \cap BC = I$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là :

(A) SC ; (B) SB ; (C) SO ; (D) SI.

2.51. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$. Thiết diện của mặt phẳng (α) tuỳ ý với hình chóp không thể là

(A) Lục giác ; (B) Ngũ giác ;

(C) Tứ giác ; (D) Tam giác.

2.52. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường chéo AC' của hình lập phương ?

(A) 2 ; (B) 3 ; (C) 4 ; (D) 6.

2.53. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

2.54. Cho hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

2.55. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng ?

(A) P, Q, R, S ; (B) M, P, R, S ;

(C) M, R, S, N ; (D) M, N, P, Q.

2.56. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau ;

(B) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;

(C) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ;

(D) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

2.57. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

(A) Vô số ; (B) 2 ; (C) 1 ; (D) Không có mặt phẳng nào.

2.58. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là :

(A) Hình tam giác ; (B) Hình bình hành ;

(C) Hình chữ nhật ; (D) Hình vuông.

2.59. Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

(A) $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$; (B) $a \cap (\alpha) = \varnothing$;

(C) $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$; (D) $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.

2.60. Trong các mệnh đề sau đây, tìm mệnh đề đúng.

(A) Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$;

(B) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$;

(C) Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\beta)$;

(D) Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

2.61. Trong không gian, cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa (α) và (β) ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

2.62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây ?

(A) AC ; (B) BD ; (C) AD ; (D) SC.

2.63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình

(A) Tam giác ; (B) Hình thang ;

(C) Hình bình hành ; (D) Hình chữ nhật.

2.64. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn BC. Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là

(A) Hình thang ; (B) Hình bình hành ;

(C) Hình tam giác ; (D) Hình ngũ giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

2.1. a) Nhận xét :

Do giả thiết cho IJ không song song với CD và chúng cùng nằm trong mặt phẳng (BCD) nên khi kéo dài chúng gặp nhau tại một điểm (h.2.20).

Gọi $K = IJ \cap CD$.

Ta có : M là điểm chung thứ nhất của (ACD) và (IJM) ;

$$\begin{cases} K \in IJ \\ IJ \subset (MIJ) \end{cases} \Rightarrow K \in (MIJ) \quad \text{và} \quad \begin{cases} K \in CD \\ CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow K \in (ACD).$$

Vậy $(MIJ) \cap (ACD) = MK$.

b) Với $L = JN \cap AB$, ta có :

$$\begin{cases} L \in JN \\ JN \subset (MNJ) \end{cases} \Rightarrow L \in (MNJ)$$

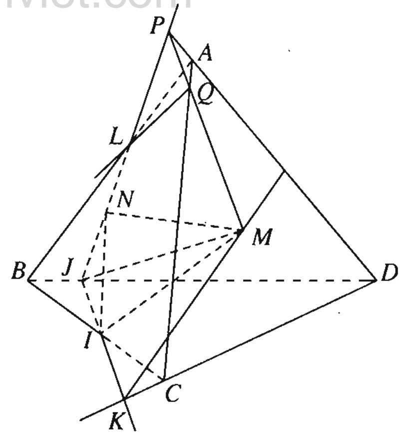
$$\begin{cases} L \in AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow L \in (ABC).$$

Như vậy L là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (MNJ) và (ABC).

Gọi $P = JL \cap AD$, $Q = PM \cap AC$.

Ta có : $\begin{cases} Q \in PM \\ PM \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q \in (MNJ)$

và $\begin{cases} Q \in AC \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (ABC)$



Hình 2.20

nên Q là điểm chung thứ hai của (MNJ) và (ABC).

Vậy $LQ = (ABC) \cap (MNJ)$.

2.2. a) Ta có ngay S, M là hai điểm chung của (SBM) và (SCD) nên $(SBM) \cap (SCD) = SM$ (h.2.21).

b) M là điểm chung thứ nhất của (AMB) và (SCD).

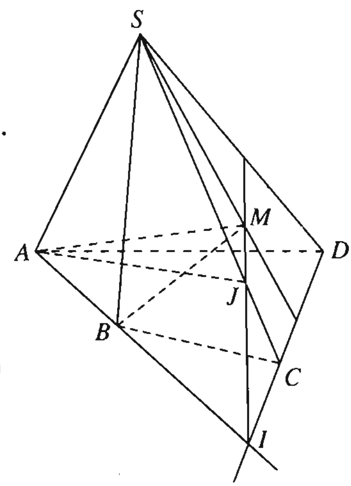
Gọi $I = AB \cap CD$.

Ta có : $I \in AB \Rightarrow I \in (ABM)$.

Mặt khác $I \in CD \Rightarrow I \in (SCD)$

nên $(ABM) \cap (SCD) = IM$.

c) Gọi $J = IM \cap SC$. Ta có : $J \in SC \Rightarrow J \in (SAC)$ và $J \in IM \Rightarrow J \in (ABM)$. Hiển nhiên $A \in (SAC)$ và $A \in (ABM)$, vậy $(SAC) \cap (ABM) = AJ$.



Hình 2.21

2.3. a) Gọi $N = DK \cap AC$; $M = DJ \cap BC$ (h.2.22).

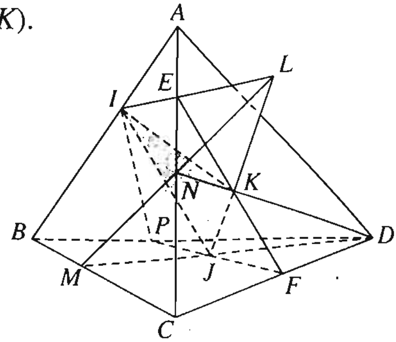
Ta có $(DJK) \cap (ABC) = MN \Rightarrow MN \subset (ABC)$.

Vì $L = (ABC) \cap JK$ nên dễ thấy $L = JK \cap MN$.

b) Ta có I là một điểm chung của (ABC) và (IJK).

Mặt khác vì $L = MN \cap JK$ mà $MN \subset (ABC)$ và $JK \subset (IJK)$ nên L là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IJK), suy ra $(IJK) \cap (ABC) = IL$.

Gọi $E = IL \cap AC$; $F = EK \cap CD$. Lí luận tương tự ta có $EF = (IJK) \cap (ACD)$. Nối FJ cắt BD tại P ; P là một giao điểm (IJK) và (BCD).

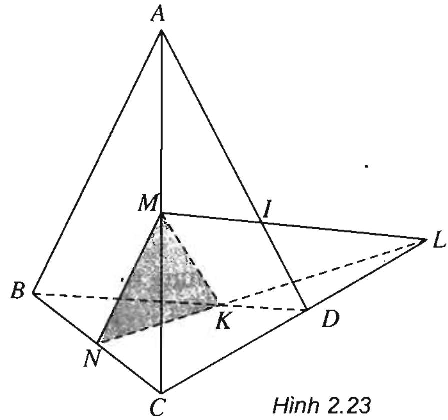


Hình 2.22

Ta có $PF = (IJK) \cap (BCD)$

và $IP = (ABD) \cap (IJK)$.

2.4. ***Nhận xét.*** Trên hình vẽ 2.23 không có sẵn đường thẳng nào của mặt phẳng (MNK) cắt AD. Ta xét mặt phẳng chứa AD chẳng hạn (ACD) rồi tìm giao tuyến Δ của (ACD) với (MNK). Sau đó tìm giao điểm I của Δ và AD, I chính là giao điểm phải tìm.



Hình 2.23

Gọi $L = NK \cap CD$.

Ta có $L \in NK \Rightarrow L \in (MNK)$

$\quad\quad L \in CD \Rightarrow L \in (ACD)$

nên $ML = (ACD) \cap (MNK) = \Delta$.

$\Delta \cap AD = I \Rightarrow I = (MNK) \cap AD$.

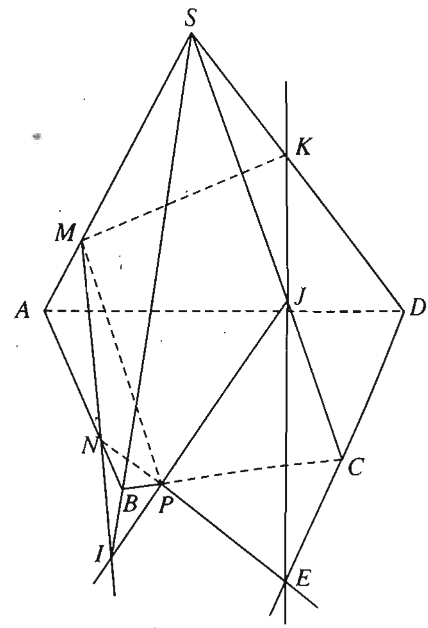
2.5. Ta lần lượt tìm giao điểm của mặt phẳng (MNP) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp (h.2.24).

Gọi $I = MN \cap SB$.

Ta có $\begin{cases} I \in MN \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNP)$.

Vậy $I = SB \cap (MNP)$.

Từ đó, làm tương tự ta tìm được giao điểm của (MNP) với các cạnh còn lại. Cụ thể :

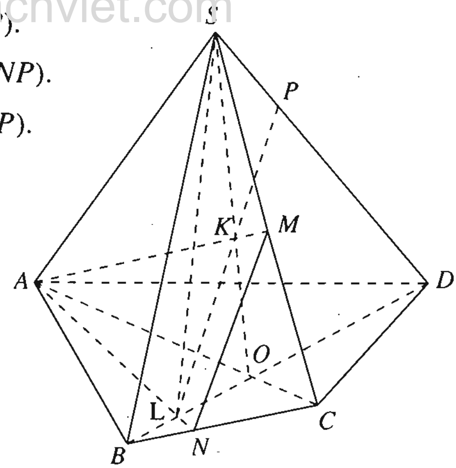


Hình 2.24

Gọi $J = IP \cap SC$, ta có $J = SC \cap (MNP)$.

Gọi $E = NP \cap CD$, ta có $E = CD \cap (MNP)$.

Gọi $K = JE \cap SD$, ta có $K = SD \cap (MNP)$.



Hình 2.25

2.6. Gọi $O = AC \cap BD$;

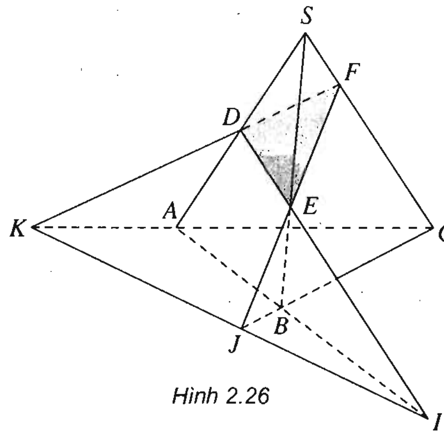
$K = SO \cap AM$;

$L = BD \cap AN$;

$P = KL \cap SD$ (h.2.25).

Ta có $P = SD \cap (AMN)$.

Nhận xét. Trong cách giải trên, ta lấy (SBD) là mặt phẳng chứa SD, rồi tìm giao tuyến của (SBD) với (AMN). Từ đó tìm giao điểm của giao tuyến này và SD.



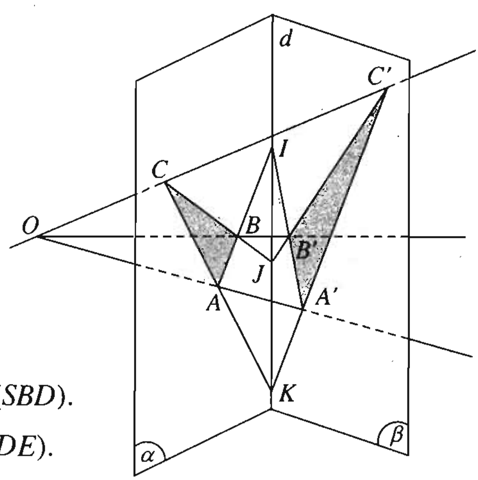
Hình 2.26

2.7. Ta có $I = DE \cap AB$

$DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (h.2.26).

Lí luận tương tự thì J, K cũng lần lượt thuộc về hai mặt phẳng trên nên I, J, K thuộc về giao tuyến của (ABC) và (DEF) nên I, J, K thẳng hàng.



Hình 2.27

2.8. a) I, A', B' là ba điểm chung của hai mặt phẳng (OAB) và (β) nên chúng thẳng hàng (h.2.27).

b) I, J, K là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ nên chúng thẳng hàng.

2.9. *Hướng dẫn*

a) S, I, J, G là điểm chung của (SAE) và (SBD).

b) S, K, L là điểm chung của (SAB) và (SDE).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

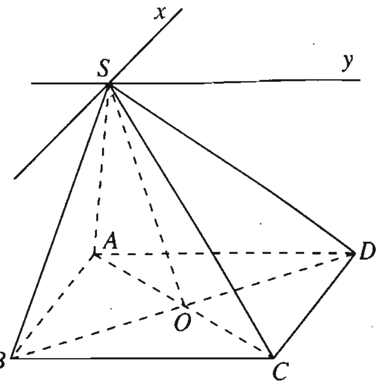
2.10. a) (h.2.28).

Ta có : $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$.

Giả sử : $AC \cap BD = O \Rightarrow \begin{cases} O \in (SAC) \\ O \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO.$



Hình 2.28

b) Ta có : $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Ta lại có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ và $Sx \,//\, AB \,//\, CD$.

c) Lập luận tương tự câu b) ta có $(SAD) \cap (SBC) = Sy$ và $Sy \,//\, AD \,//\, BC$.

2.11. $\begin{cases} M \in AB \\ N \in AC \end{cases} \Rightarrow MN \subset (ABC)$ (h.2.29).

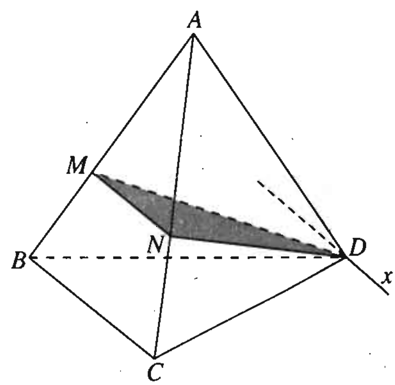
Trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \,//\, BC.$$

Hiển nhiên $D \in (DBC) \cap (DMN)$

$$\begin{cases} BC \subset (DBC) \\ MN \subset (DMN) \\ BC \,//\, MN \end{cases}$$

$\Rightarrow (DBC) \cap (DMN) = Dx$ và $Dx \,//\, BC \,//\, MN$.



Hình 2.29

2.12. a) $\begin{cases} M \in (MIJ) \\ M \in AD \Rightarrow M \in (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MIJ) \cap (ABD)$ (h.2.30)

Ta cũng có : $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ \subset (MIJ) \\ AB \subset (ABD). \end{cases}$

$\Rightarrow (MIJ) \cap (ABD) = d = Mt$

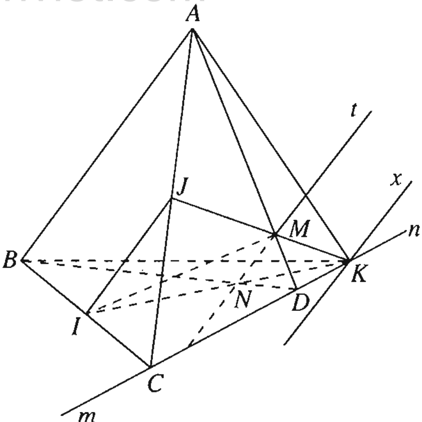
và $Mt \parallel AB \parallel IJ$.

b) Ta có $Mt \parallel AB \Rightarrow Mt \cap BD = N$

$IN \cap JM = K \Rightarrow \begin{cases} K \in IN \\ K \in JM. \end{cases}$

Vì $K \in IN \Rightarrow K \in (BCD)$

và $K \in JM \Rightarrow K \in (ACD)$.



Hình 2.30

Mặt khác $(BCD) \cap (ACD) = CD$ do đó $K \in CD$. Do vậy K nằm trên hai nửa đường thẳng Cm và Dn thuộc đường thẳng CD. (Để ý rằng nếu M là trung điểm của AD thì sẽ không có điểm K.)

c) Ta có : $\begin{cases} K \in (ABK) \\ K \in IN \Rightarrow K \in (MIJ) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABK) \cap (MIJ)$

mà $\begin{cases} AB \subset (ABK) \\ IJ \subset (MIJ) \\ AB \parallel IJ \end{cases} \Rightarrow (ABK) \cap (MIJ) = Kx$ và $Kx \parallel AB \parallel IJ$.

2.13. Trong tam giác ABC (h.2.31) ta có :

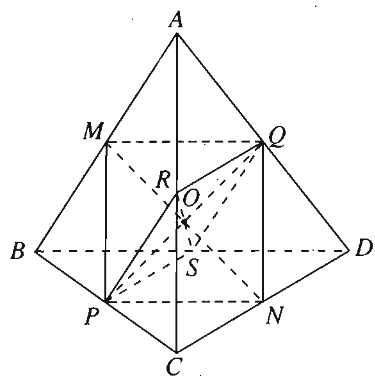
$MP \parallel AC$ và $MP = \dfrac{AC}{2}$.

Trong tam giác ACD ta có :

$QN \parallel AC$ và $QN = \dfrac{AC}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} MP \parallel QN \\ MP = QN \end{cases}$

$\Rightarrow$ tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.



Hình 2.31

Do vậy hai đường chéo MN và PQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Tương tự : $PR \parallel QS$ và $PR = QS = \dfrac{AB}{2}$.

Do đó tứ giác $PRQS$ là hình bình hành.

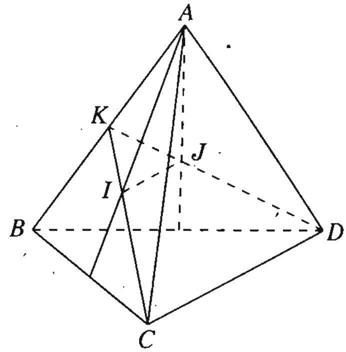
Suy ra hai đường chéo RS và PQ cắt nhau tại trung điểm O của PQ và $OR = OS$.

Vậy ba đoạn thẳng MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

2.14. Gọi K trung điểm của AB (h.2.32).

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên $I \in KC$ và vì J là trọng tâm của tam giác ABD nên $J \in KD$.

Từ đó suy ra $\dfrac{KI}{KC} = \dfrac{KJ}{KD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD$.



Hình 2.32

2.15. a) (h.2.33).

Ta có : $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.

Vậy $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (IBC) = PQ$

và $PQ \parallel AD \parallel BC$. (1)

Tương tự : $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (JAD)$.

Vậy $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (JAD) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (JAD) \cap (SBC) = MN$

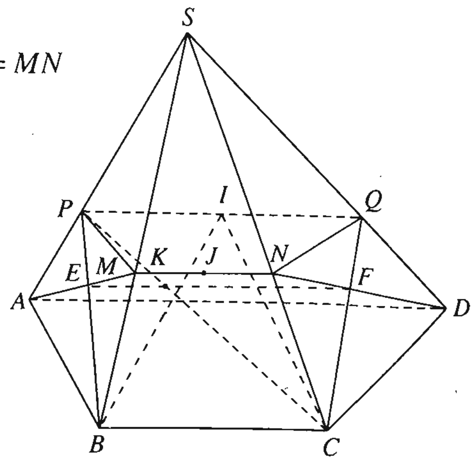
và $MN \parallel BC \parallel AD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $PQ \parallel MN$.

b) Ta có :

$E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases}$

$F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ). \end{cases}$



Hình 2.33

Do đó : $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$.

Mà $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ MN \,//\, PQ \end{cases}$ suy ra $EF \,//\, AD \,//\, BC \,//\, MN \,//\, PQ$.

Tính EF : $CP \cap EF = K \Rightarrow EF = EK + KF$

$$EK \,//\, BC \Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} \qquad (*)$$

$$PM \,//\, AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB}.$$

Mà $\frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$ suy ra $\frac{PE}{EB} = \frac{2}{3}$.

Từ (*) suy ra $\frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE+EB} = \frac{1}{1+\frac{EB}{PE}} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{5}b.$

Tương tự ta tính được $KF = \frac{2}{5}a$.

Vậy : $EF = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b = \frac{2}{5}(a+b)$.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

2.16. Gọi I là trung điểm CD (h.2.34).

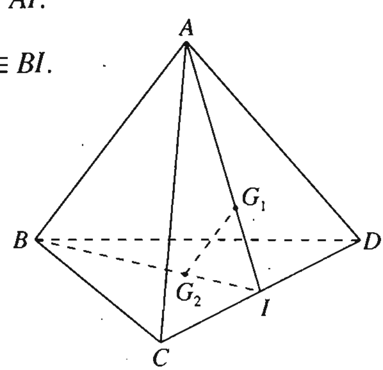
Vì G_1 là trọng tâm của tam giác ACD nên $G_1 \in AI$.

Vì G_2 là trọng tâm của tam giác BCD nên $G_2 \in BI$.

Ta có : $\begin{cases} \frac{IG_1}{IA} = \frac{1}{3} \\ \frac{IG_2}{IB} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IB} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, AB.$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (ABC)$

và $AB \subset (ABD) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (ABD)$.



Hình 2.34

2.17. a) Ta có : $OO' \parallel DF$ (đường trung bình của tam giác BDF) (h.2.35).

Vì $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.

Tương tự $OO' \parallel EC$ (đường trung bình của tam giác AEC).

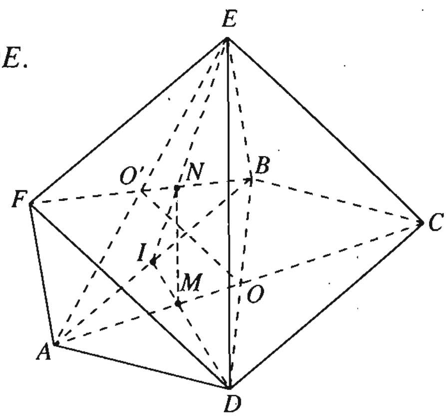
Vì $EC \subset (BCE)$ nên $OO' \parallel (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB ;

Vì M là trọng tâm của tam giác ABD nên $M \in DI$.

Vì N là trọng tâm của tam giác ABE nên $N \in EI$.

Ta có : $\begin{cases} \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} \Rightarrow MN \parallel DE.$



Hình 2.35

Mà $\begin{cases} CD \parallel AB \\ CD = AB \\ EF \parallel AB \\ EF = AB \end{cases}$

nên $CD \parallel EF$ và $CD = EF$, suy ra tứ giác $CDFE$ là hình bình hành.

$\begin{cases} MN \parallel DE \\ DE \subset (CEF) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (CEF).$

2.18. a) Dễ thấy S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) (h.2.36).

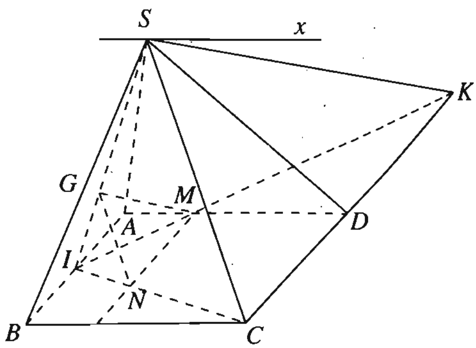
Ta có : $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx$

và $Sx \parallel AD \parallel BC$.

b) Ta có : $MN \parallel IA \parallel CD$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3},$



Hình 2.36

mà $\frac{IG}{IS}=\frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của ΔSAB) nên $\frac{IG}{IS}=\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3} \Rightarrow GN \,//\, SC$

$SC \subset (SCD) \Rightarrow GN \,//\, (SCD)$.

c) Giả sử IM cắt CD tại $K \Rightarrow SK \subset (SCD)$

$MN \,//\, CD \Rightarrow \frac{MN}{CK}=\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IM}{IK}=\frac{1}{3}$.

Ta có : $\begin{cases} \frac{IG}{IS}=\frac{1}{3} \\ \frac{IM}{IK}=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow GM \,//\, SK \Rightarrow GM \,//\, (SCD)$.

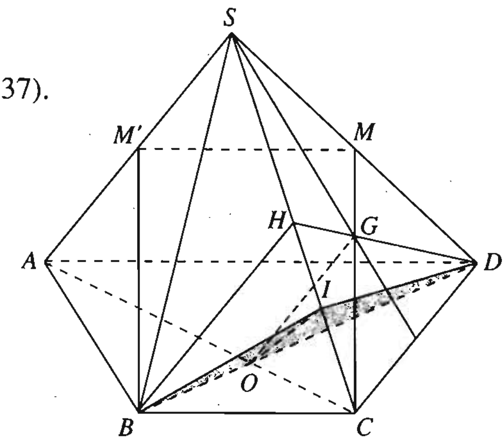
2.19. a) Gọi H là trung điểm của SC (h.2.37).

Ta có : $\frac{DG}{DH}=\frac{2}{3}$. (1)

$BC \,//\, AD \Rightarrow \frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}=\frac{AD}{BC}=2$

$\Rightarrow OD = 2OB$

$\Rightarrow \frac{OD}{BD}=\frac{2}{3}$. (2)



Hình 2.37

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DG}{DH}=\frac{OD}{BD} \Rightarrow OG \,//\, BH$.

$BH \subset (SBC) \Rightarrow OG \,//\, (SBC)$.

b) Gọi M' là trung điểm của $SA \Rightarrow MM' \,//\, AD$ và $MM'=\frac{AD}{2}$. Mặt khác vì $BC \,//\, AD$ và $BC=\frac{AD}{2}$ nên $BC \,//\, MM'$ và $BC = MM'$.

Do đó tứ giác $BCMM'$ là hình bình hành $\Rightarrow CM \,//\, BM'$ mà $BM' \subset (SAB)$

$\Rightarrow CM \,//\, (SAB)$.

c) Ta có : $\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}$ nên $\frac{OC}{CA}=\frac{1}{3}$. Mặt khác vì $SC=\frac{3}{2}SI$ nên $\frac{CI}{CS}=\frac{1}{3}$

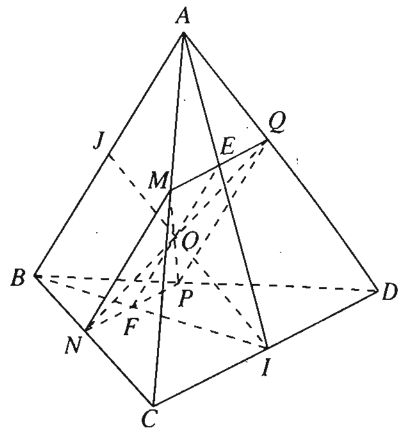
$\Rightarrow \dfrac{OC}{CA} = \dfrac{CI}{CS} \Rightarrow OI \,//\, SA.$

$OI \subset (BID) \Rightarrow SA \,//\, (BID).$

2.20. a) $\begin{cases} (\alpha) \,//\, AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN$ và $MN \,//\, AB.$

Ta có $N \in (BCD)$ (h.2.38)



Hình 2.38

và $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases}$

nên $(\alpha) \cap (BCD) = NP$ và $NP \,//\, CD.$

Ta có $P \in (ABD)$

và $\begin{cases} (\alpha) \,//\, AB \\ AB \subset (ABD) \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ABD) = PQ$ và $PQ \,//\, AB.$

$\begin{cases} Q \in (ACD) \\ (\alpha) \,//\, CD \end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ACD) = MQ$ và $MQ \,//\, CD.$

Do đó $MN \,//\, PQ$ và $NP \,//\, MQ$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Ta có : $MP \cap NQ = O$. Gọi I là trung điểm của CD.

Trong tam giác ACD có : $MQ \,//\, CD \Rightarrow AI$ cắt MQ tại trung điểm E của MQ.

Trong tam giác BCD có : $NP \,//\, CD \Rightarrow BI$ cắt NP tại trung điểm F của NP.

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên ta có $\begin{cases} EF \,//\, MN \\ O \text{ là trung điểm } EF. \end{cases}$

$EF \,//\, MN \Rightarrow EF \,//\, AB.$

Trong ΔABI ta có $EF \,//\, AB$ suy ra : IO cắt AB tại trung điểm J

$\Rightarrow I, O, J$ thẳng hàng

$\Rightarrow O \in IJ$ cố định.

Vì M di động trên đoạn AC nên O chạy trong đoạn IJ. Vậy tập hợp các điểm O là đoạn IJ.

2.21. a) Vì $M \in (SAB)$ (h.2.39)

và $\begin{cases}(\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (SAB) = MN$ và $MN // SA$.

Vì $N \in (SBC)$

và $\begin{cases}(\alpha) // BC \\ BC \subset (SBC)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (SBC) = NP$

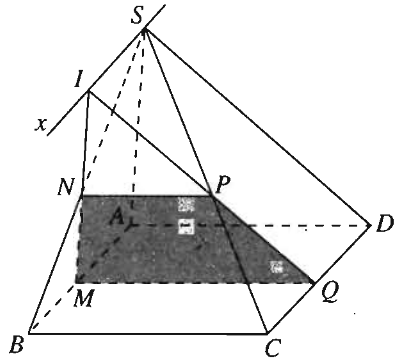
và $NP // BC$ (1)

$\begin{cases}P, Q \in (\alpha) \\ P, Q \in (SCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PQ.$

$Q \in CD \Rightarrow Q \in (ABCD)$

và $\begin{cases}(\alpha) // BC \\ BC \subset (ABCD)\end{cases}$ nên $(\alpha) \cap (ABCD) = QM$

và $QM // BC$ (2)



Hình 2.39

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

b) Ta có : $\begin{cases}S \in (SAB) \cap (SCD). \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \text{ và } Sx // AB // CD. \\ AB // CD\end{cases}$

$MN \cap PQ = I \Rightarrow \begin{cases}I \in MN \\ I \in PQ.\end{cases}$

$MN \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB),\ PQ \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow I \in Sx.$

(SAB) và (SCD) cố định $\Rightarrow Sx$ cố định $\Rightarrow I$ thuộc Sx cố định.

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

2.22. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và BD.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$\frac{AG_1}{AI} = \frac{AG_2}{AJ} = \frac{AG_3}{AK} = \frac{2}{3}$

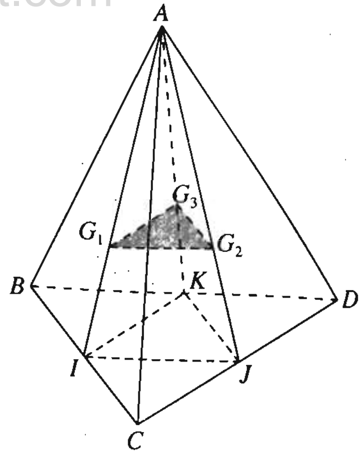
$\Rightarrow G_1G_2 \,//\, IJ$ (h.2.40).

$IJ \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (BCD)$.

Tương tự ta có $G_2G_3 \,//\, (BCD)$.

$G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3)$

$\Rightarrow (G_1G_2G_3) \,//\, (BCD)$.



Hình 2.40

2.23. a) Ta có : $\left.\begin{matrix} Ax \,//\, Dt \\ Dt \subset (Cz, Dt) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow Ax \,//\, (Cz, Dt)$ (h.2.41).

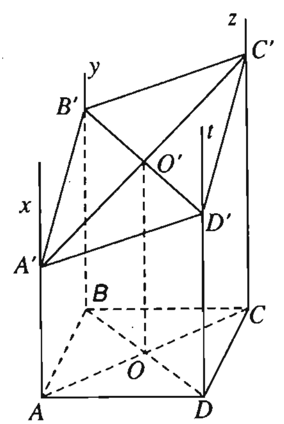
$\left.\begin{matrix} AB \,//\, CD \\ CD \subset (Cz, Dt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \,//\, (Cz, Dt)$.

Từ $Ax, AB \subset (Ax, By)$ suy ra $(Ax, By) \,//\, (Cz, Dt)$.

Tương tự ta có $(Ax, Dt) \,//\, (By, Cz)$.

b) $\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, By) = A'B' \\ (\alpha) \cap (Cz, Dt) = C'D' \\ (Ax, By) \,//\, (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow A'B' \,//\, C'D' \quad (1)$

$\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (\alpha) \cap (By, Cz) = B'C' \\ (Ax, Dt) \,//\, (By, Cz) \end{cases} \Rightarrow A'D' \,//\, B'C'. \quad (2)$



Hình 2.41

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

c) Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$. Dễ thấy OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$, suy ra $OO' = \frac{AA' + CC'}{2}$.

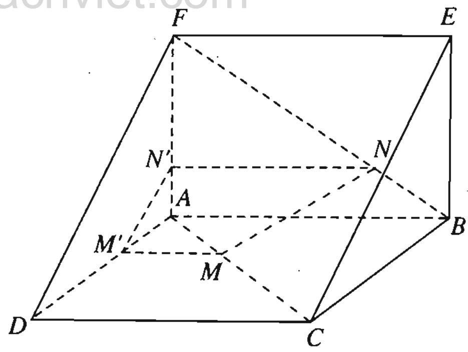
Tương tự ta có : $OO' = \frac{BB' + DD'}{2} \Rightarrow AA' + CC' = BB' + DD'$.

2.24. a) $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \,//\, (BCE)$

$\begin{cases} AF \,//\, BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \,//\, (BCE)$

Mà $AD, AF \subset (ADF)$

nên $(ADF) \,//\, (BCE)$ (h.2.42).



Hình 2.42

b) Vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông nên $AC = BF$. Ta có :

$MM' \,//\, CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (1)

$NN' \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$. (2)

So sánh (1) và (2) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \,//\, DF$.

c) Từ chứng minh trên suy ra $DF \,//\, (MM'N'N)$

$\left.\begin{matrix} NN' \,//\, AB \Rightarrow NN' \,//\, EF \\ NN' \subset (MM'N'N) \end{matrix}\right\} \Rightarrow EF \,//\, (MM'N'N)$.

Mà $DF, EF \subset (DEF)$ nên $(DEF) \,//\, (MM'N'N)$.

Vì $MN \subset (MM'N'N)$ và $(MM'N'N) \,//\, (DEF)$ nên $MN \,//\, (DEF)$.

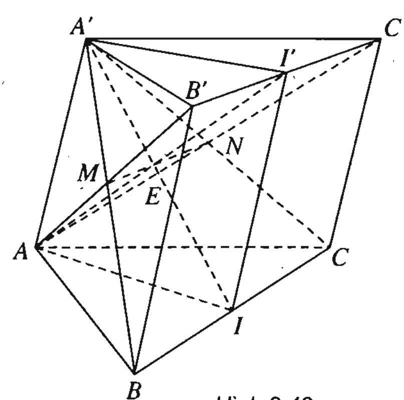
2.25. a) Ta có $II' \,//\, BB'$ và $II' = BB'$.

Mặt khác $AA' \,//\, BB'$ và $AA' = BB'$ nên :

$AA' \,//\, II'$ và $AA' = II'$

$\Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành

$\Rightarrow AI \,//\, A'I'$ (h.2.43).



Hình 2.43

b) Ta có : $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (AA'I'I) \end{cases}$

$\Rightarrow A \in (AB'C') \cap (AA'I'I)$.

Tương tự : $\begin{cases} I' \in B'C' \\ I' \in (AA'I'I) \end{cases} \Rightarrow I' \in (AB'C')$

$\Rightarrow I' \in (AB'C') \cap (AA'I'I) \Rightarrow (AB'C') \cap (AA'I'I) = AI'$.

Đặt $AI' \cap A'I = E$. Ta có : $\begin{cases} E \in IA' \\ E \in AI' \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C')$.

Vậy E là giao điểm của $A'I$ và mặt phẳng $(AB'C')$.

c) Ta có : $A'B \cap AB' = M \Rightarrow \begin{cases} M \in (AB'C') \\ M \in (A'BC). \end{cases}$

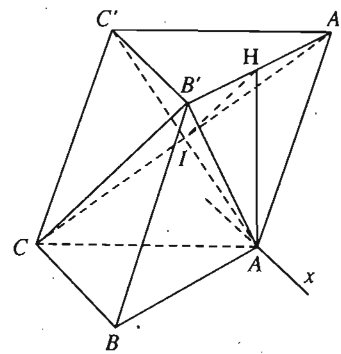
Tương tự : $AC' \cap A'C = N \Rightarrow \begin{cases} N \in (AB'C') \\ N \in (A'BC). \end{cases}$

Vậy $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

2.26. a) Ta có tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành (h.2.44) suy ra $A'C$ cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.

Do đó $IH \parallel CB'$ (đường trung bình của tam giác $CB'A'$).

Mặt khác $IH \subset (AHC')$ nên $CB' \parallel (AHC')$.



Hình 2.44

b) Ta có : $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow A$ là điểm chung của $(AB'C')$ và (ABC),

mà $\begin{cases} B'C' \parallel BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

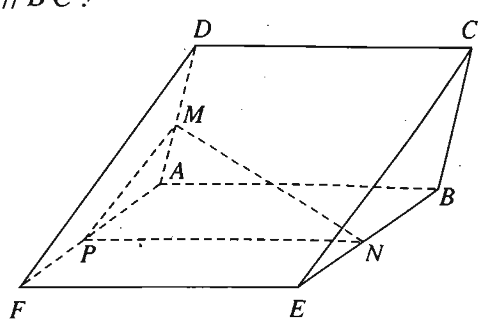
nên $(AB'C') \cap (ABC) = Ax$ và $Ax \parallel BC \parallel B'C'$.

2.27. Trong mặt phẳng (ADF), kẻ đường thẳng $MP \parallel DF$ $(P \in AF)$.

Ta có $\dfrac{AP}{PF} = \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{NE}$ (h.2.45)

nên $PN \parallel FE$. Do đó $(MNP) \parallel (DEF)$.

Vậy MN song song với mặt phẳng (DEF) cố định.



Hình 2.45

2.28. a) *Trường hợp 1.*

I thuộc đoạn AO $(0 < x < \frac{a}{2})$

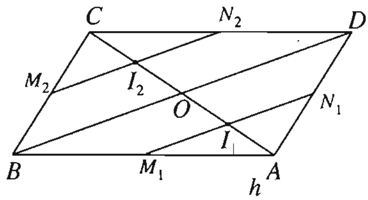
Khi đó I ở vị trí I_1 (h.2.46).

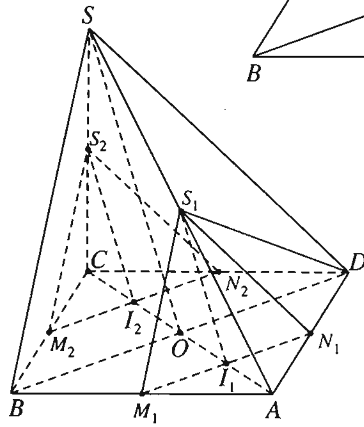
Ta có : $(\alpha) // (SBD)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) // BD \\ (\alpha) // SO \end{cases}$$

Vì (α) // BD nên (α) cắt (ABD) theo giao tuyến M_1N_1 (qua I_1) song song với BD.

Tương tự (α) // SO nên (α) cắt (SOA) theo giao tuyến S_1I_1 song song với SO.





Hình 2.46

Ta có thiết diện trong trường hợp này là tam giác $S_1M_1N_1$.

Nhận xét. Dễ thấy rằng $S_1M_1 // SB$ và $S_1N_1 // SD$. Lúc đó tam giác $S_1M_1N_1$ đều.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC $(\frac{a}{2} < x < a)$

Khi đó I ở vị trí I_2. Tương tự như trường hợp 1 ta có thiết diện là tam giác đều $S_2M_2N_2$ có $M_2N_2 // BD$, $S_2M_2 // SB$, $S_2N_2 // SD$.

Trường hợp 3. $I \equiv O$: Thiết diện chính là tam giác đều SBD.

b) Ta lần lượt tìm diện tích thiết diện trong các trường hợp 1, 2, 3.

Trường hợp 1. I thuộc đoạn AO $(0 < x < \frac{a}{2})$

$$\frac{S_{S_1M_1N_1}}{S_{SBD}} = \left(\frac{M_1N_1}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2x}{a}\right)^2$$

$$S_{S_1M_1N_1} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot S_{SBD} = \frac{4x^2}{a^2} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC $(\frac{a}{2} < x < a)$

$$\frac{S_{S_2M_2N_2}}{S_{SBD}} = \left(\frac{M_2N_2}{BD}\right)^2 = \left[\frac{2(a-x)}{a}\right]^2$$

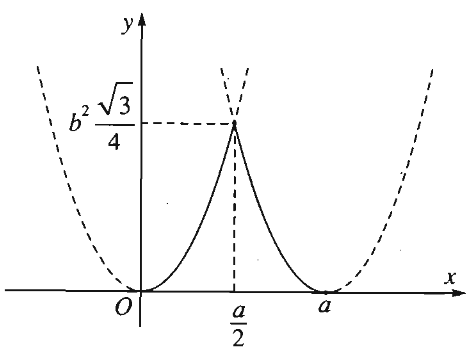
$$S_{S_2M_2N_2} = \frac{4}{a^2}(a-x)^2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{a^2}(a-x)^2$$

Trường hợp 3. $I \equiv O$

$$S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tóm lại $S_{thiết\ diện} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2} & \text{nếu } 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} & \text{nếu } x = \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{a^2}(a-x)^2 & \text{nếu } \dfrac{a}{2} < x < a. \end{cases}$

c) Đồ thị của hàm số S theo biến x như sau :



Hình 2.47

Vậy $S_{thiết\ diện}$ lớn nhất khi và chỉ khi x = $\frac{a}{2}$.

2.29. Vì $(\alpha)//(\beta)//(\gamma)$ nên $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

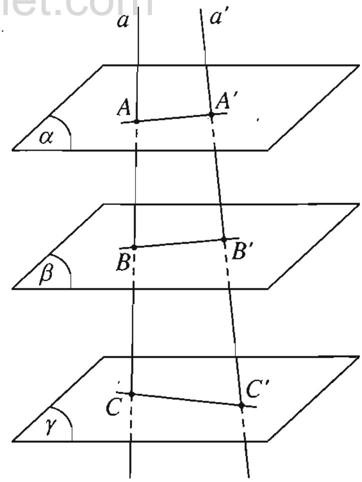
Mặt khác ta có :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+BC}{A'B'+B'C'}=\frac{AC}{A'C'} \text{ (h.2.48).}$$

Suy ra : $A'B'=\dfrac{A'C'.AB}{AC}=\dfrac{18.5}{9}=10$.

Vậy $A'B'=10$ và $B'C'=\dfrac{A'C'.BC}{AC}=\dfrac{18.4}{9}=8$.

Vậy $B'C'=8$.



Hình 2.48

2.30. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD cắt AC tại H, ta có :

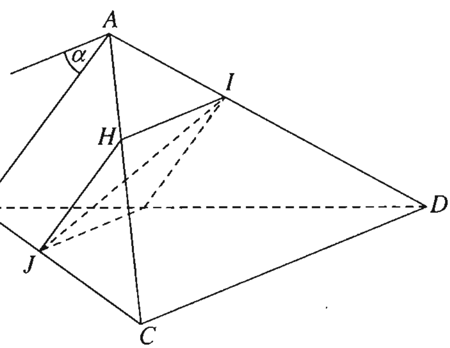
$$\frac{HA}{HC}=\frac{IA}{ID} \text{ (h.2.49).}$$

Mặt khác $\dfrac{IA}{ID}=\dfrac{JB}{JC}$

nên $\dfrac{HA}{HC}=\dfrac{JB}{JC}$.

Suy ra HJ // AB.

Như vậy mặt phẳng (IJH) song song với AB và CD.



Hình 2.49

Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với CD, ta có

$$\begin{cases}(\alpha)//(IJH)\\ IJ\subset(IJH)\end{cases}\Rightarrow IJ//(\alpha).$$

Vậy IJ song song với mặt phẳng (α) cố định.

2.31. a) Gọi (β) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng AB và Ax.

Do Ax // (α) nên (β) sẽ cắt (α) theo giao tuyến Bx' song song với Ax (h.2.50).

Ta có M' là điểm chung của (α) và (β) nên M' thuộc Bx'.

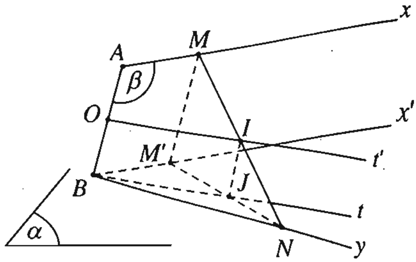
Khi M trùng A thì M' trùng B nên tập hợp M' là tia Bx'.

b) Ta có tứ giác $ABM'M$ là hình bình hành nên $BM' = AM = BN$.

Tam giác $BM'N$ cân tại B.

Suy ra trung điểm J của cạnh đáy NM' thuộc phân giác trong Bt của góc B trong tam giác cân BNM'. Dễ thấy rằng Bt cố định.

Gọi O là trung điểm của AB. Trong mặt phẳng (AB, Bt), tứ giác $OBJI$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BO}$. Do đó I là ảnh của J trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BO}$. Vậy tập hợp I là tia Ot' song song với Bt.

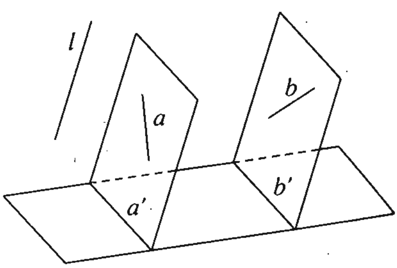


Hình 2.50

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

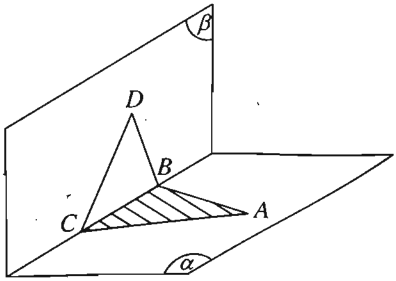
2.32. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau có hình chiếu là a' và b'. Nếu mặt phẳng (a, a') và mặt phẳng (b, b') song song với nhau thì $a' // b'$. Vậy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song (h.2.51).

Nếu a và b là hai đường thẳng cắt nhau tại O và hình chiếu của O là O' thì $O' \in a'$ và $O' \in b'$ tức là a' và b' có điểm chung. Vậy hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau không thể song song được.



Hình 2.51

2.33. Cho tam giác ABC bất kì nằm trong mặt phẳng (α). Gọi (β) là mặt phẳng qua BC và khác với (α). Trong (β) ta vẽ tam giác đều BCD. Vậy ta có thể xem tam giác ABC cho trước là hình chiếu song song của tam giác đều DBC theo phương chiếu DA lên mặt phẳng (α) (h.2.52).

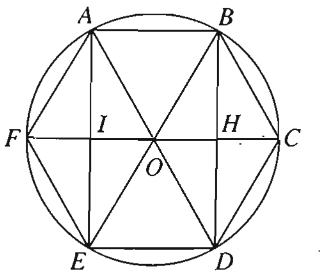


Hình 2.52

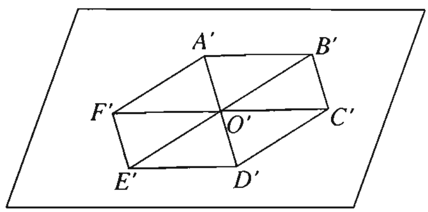
2.34. Với hình lục giác đều $ABCDEF$ ta nhận thấy :

– Tứ giác $OABC$ là hình bình hành (vừa là hình thoi) ;

– Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O (h.2.53).



Hình 2.53



Hình 2.54

Từ đó ta suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều $ABCDEF$ như sau :

– Vẽ hình bình hành $O'A'B'C'$ biểu diễn cho hình bình hành $OABC$.

– Lấy các điểm D', E', F' lần lượt đối xứng của A', B', C' qua tâm O', ta được hình biểu diễn $A'B'C'D'E'F'$ của hình lục giác đều $ABCDEF$ (h.2.54).

☞ ***Chú ý.*** Ta có thể vẽ hình biểu diễn hình lục giác đều dựa trên sự phân tích sau đây ở hình thực $ABCDEF$ (h.2.53) :

– Tứ giác $ABDE$ là hình chữ nhật ;

– Gọi I là trung điểm của cạnh AE và H là trung điểm của cạnh BD ;

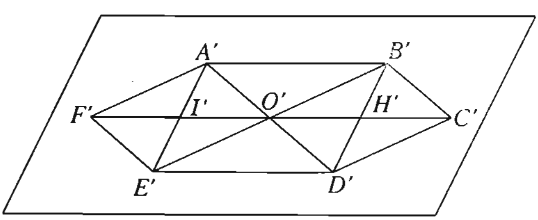
– Các điểm F và C đối xứng của O lần lượt qua I và H.

Từ đó ta có cách vẽ sau đây :

– Vẽ hình bình hành $A'B'D'E'$ biểu diễn cho hình chữ nhật $ABDE$.

– Gọi I' và H' lần lượt là trung điểm của $A'E'$ và $B'D'$.

– Lấy F' đối xứng với O' qua I' và C' đối xứng với O' qua H', ta được hình biểu diễn $A'B'C'D'E'F'$ của hình lục giác đều (h.2.55).

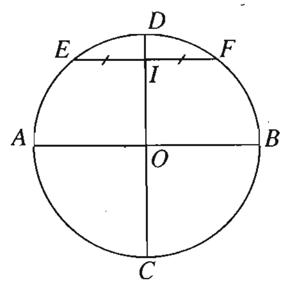


Hình 2.55

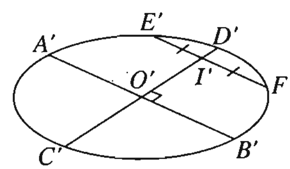
2.35. Giả sử trên hình thực ta có đường tròn tâm O cùng với hai đường kính vuông góc của đường tròn đó là AB và CD (h.2.56). Nếu ta vẽ thêm một dây cung EF song song với AB thì đường kính CD sẽ đi qua trung điểm I của đoạn EF. Từ đó ta suy ra cách vẽ sau đây :

a) Vẽ hình elip biểu diễn cho đường tròn và vẽ đường kính $A'B'$ của hình elip đó. Đường kính này đi qua tâm O' của elip.

b) Vẽ một dây cung $E'F'$ song song với đường kính $A'B'$. Gọi I' là trung điểm của $E'F'$. Đường thẳng $O'I'$ cắt elip tại hai điểm C' và D'. Ta có $A'B'$ và $C'D'$ là hình biểu diễn của hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (h.2.57)



Hình 2.56

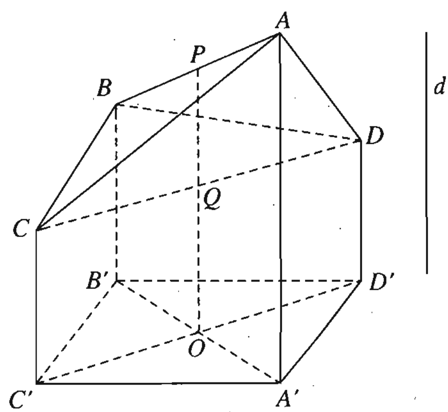


Hình 2.57

Nhận xét. Hình bình hành $A'C'B'D'$ là hình biểu diễn của hình vuông $ACBD$ nội tiếp trong một đường tròn.

2.36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là một đường thẳng không song song với các cạnh của tứ diện và (α) là một mặt phẳng cắt d. Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên mặt phẳng (α). Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối diện AB và CD. Khi đó hình chiếu P' và Q' của P và Q sẽ lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $C'D'$.

Muốn cho A', B', C', D' là các đỉnh của một hình bình hành ta chỉ cần chọn phương chiếu d sao cho d song song với đường thẳng PQ (h.2.58).



Hình 2.58

Vậy để hình chiếu song song của một tứ diện là một hình bình hành ta có thể chọn :

– Phương chiếu d là phương của một trong ba đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện của tứ diện cho trước ;

– Mặt phẳng chiếu (α) là mặt phẳng tuỳ ý, nhưng phải cắt đường thẳng d.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.37. a) $CC' \,//\, BB' \Rightarrow \Delta ICC' \backsim \Delta IBB'$ (h.2.59)

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{b}{c}.$$

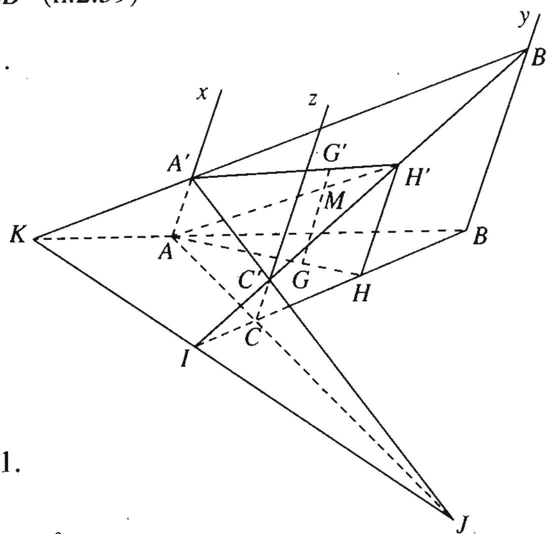
$CC' \,//\, AA' \Rightarrow \Delta JCC' \backsim \Delta JAA'$

$$\Rightarrow \frac{JC}{JA} = \frac{CC'}{AA'} = \frac{c}{a}.$$

$A'A \,//\, BB' \Rightarrow \Delta KAA' \backsim \Delta KBB'$

$$\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b}.$$

Do đó : $\dfrac{IB}{IC} \cdot \dfrac{JC}{JA} \cdot \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{a}{b} = 1.$



Hình 2.59

b) Gọi H và H' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và $B'C'$. Vì HH' là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$ nên $HH' \,//\, BB'$.

Mà $BB' \,//\, AA'$ suy ra $HH' \,//\, AA'$.

Ta có : $G \in AH$ và $G' \in A'H'$ và ta có : $\begin{cases} \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{A'G'}{A'H'} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow AA' \,//\, GG' \,//\, HH'.$

c) $AH' \cap GG' = M \Rightarrow GG' = G'M + MG$

Ta có : $G'M \,//\, AA' \Rightarrow \Delta H'G'M \backsim \Delta H'A'A$

$$\Rightarrow \frac{G'M}{AA'} = \frac{H'G'}{H'A'} = \frac{1}{3} \Rightarrow G'M = \frac{1}{3}AA' = \frac{1}{3}a$$

$MG \,//\, HH' \Rightarrow \Delta AMG \backsim \Delta AH'H$

$$\Rightarrow \frac{MG}{HH'} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}HH'.$$

Mặt khác HH' là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$ nên

$$HH' = \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{b+c}{2} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}HH' = \frac{2}{3}\cdot\frac{b+c}{2} = \frac{1}{3}(b+c).$$

Do đó : $GG' = G'M + MG = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(b+c) = \frac{1}{3}(a+b+c).$

Vậy $GG' = \frac{1}{3}(a+b+c).$

2.38. a) MB' qua M và song song với (ABC) và (ABD) $\Rightarrow$ MB' song song với giao tuyến AB của hai mặt phẳng này. Ta có : $MB' \parallel AB$ nên MB' và AB xác định một mặt phẳng. Giả sử MB cắt AB' tại I (h.2.60)

Ta có : $I \in BM \Rightarrow I \in (BCD)$

$I \in AB' \Rightarrow I \in (ACD)$

$\Rightarrow I \in (BCD) \cap (ACD) = CD$

$\Rightarrow I \in CD.$

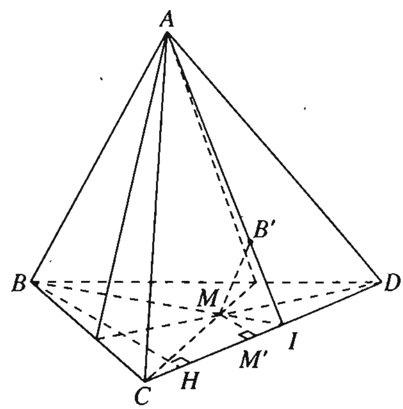
Vậy ba đường thẳng AB', BM và CD đồng quy tại I.

b) $MB' \parallel AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB}$.

Kẻ $MM' \perp CD$ và $BH \perp CD$.

Ta có : $MM' \parallel BH \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH}$.

Mặt khác : $\begin{cases} dt(\Delta MCD) = \frac{1}{2}CD.MM' \\ dt(\Delta BCD) = \frac{1}{2}CD.BH \end{cases}$



Hình 2.60

$$\Rightarrow \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)} = \frac{\frac{1}{2}CD.MM'}{\frac{1}{2}CD.BH} = \frac{MM'}{BH}.$$

Do đó : $\frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH} = \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)}$. Vậy $\frac{MB'}{AB} = \frac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)}$.

c) Tương tự ta có : $\dfrac{MC'}{CA} = \dfrac{dt(\Delta MBD)}{dt(\Delta BCD)}$

$$\frac{MD'}{DA} = \frac{dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}.$$

Vậy : $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{CA} + \dfrac{MD'}{DA} = \dfrac{dt(\Delta MCD)}{dt(\Delta BCD)} + \dfrac{dt(\Delta MBD)}{dt(\Delta BCD)} + \dfrac{dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}$

$$= \frac{dt(\Delta MCD) + dt(\Delta MBD) + dt(\Delta MBC)}{dt(\Delta BCD)}$$

$$= \frac{dt(\Delta BCD)}{dt(\Delta BCD)} = 1.$$

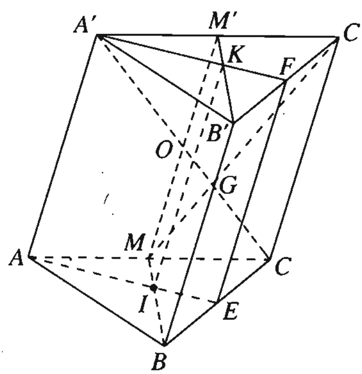
2.39. a) Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của AC và $A'C'$, ta có :

$I \in BM, G \in C'M, K \in B'M'$ (h.2.61).

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG // BC';$$

$$\frac{MI}{MB} = \frac{M'K}{M'B'} = \frac{1}{3} \text{ và } MM' // BB' \Rightarrow IK // BB'.$$



Hình 2.61

Ta có : $\begin{cases} IG // BC' \\ BC' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IG // (BB'C'C)$

$$\begin{cases} IK // BB' \\ BB' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IK // (BB'C'C).$$

Mặt khác IG và $IK \subset (IGK)$ nên $(IGK) // (BB'C'C)$.

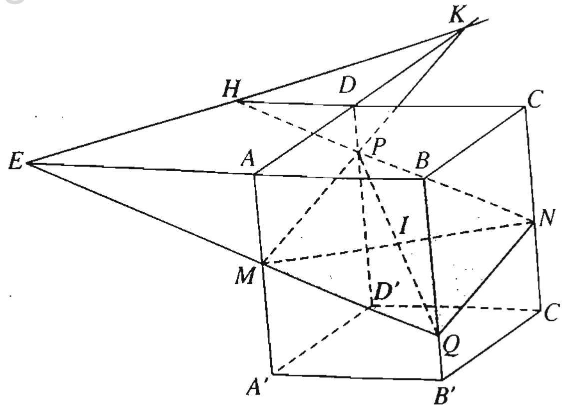
b) Gọi E và F tương ứng là trung điểm của BC và $B'C'$, O trung điểm của $A'C$.

A, I, E thẳng hàng nên (AIB') chính là (AEB'). A', G, C thẳng hàng nên $(A'GK)$ chính là $(A'CF)$.

Ta có $B'E // CF$ (do $B'FCE$ là hình bình hành) và $AE // A'F$ nên $(AIB') // (A'GK)$.

2.40. a) Ta có mặt phẳng (AA', DD') song song với mặt phẳng (BB', CC'). Mặt phẳng (MNP) cắt hai mặt phẳng nói trên theo hai giao tuyến song song.

Nếu gọi Q là điểm trên cạnh BB' sao cho $NQ \parallel PM$ thì Q là giao điểm của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP) (h.2.62).



Hình 2.62

Nhận xét. Ta có thể tìm điểm Q bằng cách nối P với trung điểm I của đoạn MN và đường thẳng PI cắt BB' tại Q.

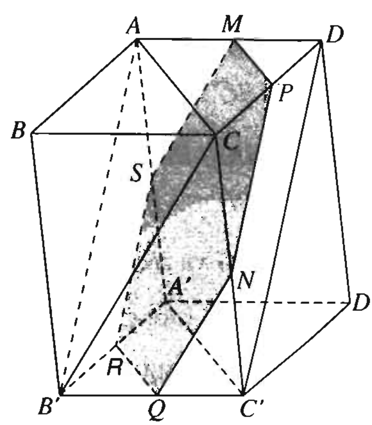
b) Vì mặt phẳng (AA', BB') song song với mặt phẳng (DD', CC') nên ta có $MQ \parallel PN$. Do đó mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện $MPNQ$ là một hình bình hành.

c) Giả sử P không phải là trung điểm của đoạn DD'. Gọi $H = PN \cap DC$, $K = MP \cap AD$. Ta có $d = HK$ là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(ABCD)$ của hình hộp. Chú ý rằng giao điểm $E = AB \cap MQ$ cũng nằm trên giao tuyến d nói trên. Khi P là trung điểm của DD' mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

2.41. a) Vẽ MP song song với AC và cắt CD tại P.

Ta có $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CP}{PD} = \dfrac{CN}{NC'}$.

Do đó $PN \parallel DC' \parallel AB'$ (h.2.63)



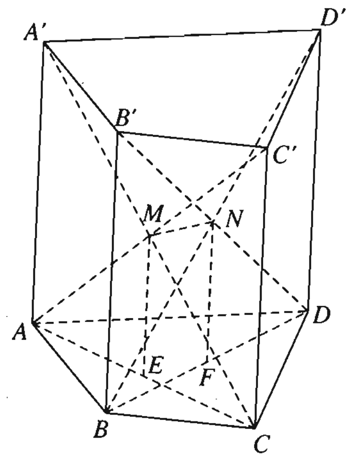
Hình 2.63

Đường thẳng MN thuộc mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng này có $MP \parallel AC$ và $PN \parallel AB'$. Vậy mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ACB') và do đó $MN \parallel (ACB')$.

b) Vì mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ACB') nên hai mặt phẳng đó cắt các mặt bên của hình hộp theo các giao tuyến song song.

Ta vẽ $NQ \mathbin{/\!/} CB'$, $QR \mathbin{/\!/} C'A'$ ($\mathbin{/\!/} CA$), $RS \mathbin{/\!/} AB'$ ($\mathbin{/\!/} PN$) và tất nhiên $SM \mathbin{/\!/} QN$. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB') là hình lục giác $MPNQRS$ có các cạnh đối diện song song với nhau từng đôi một : $MP \mathbin{/\!/} RQ$, $PN \mathbin{/\!/} SR$, $NQ \mathbin{/\!/} MS$.

2.42. a) Hình bình hành $ACC'A'$ có hai đường chéo là AC' và $A'C$ cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự, hai đường chéo BD' và $B'D$ cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường (h.2.64).



Hình 2.64

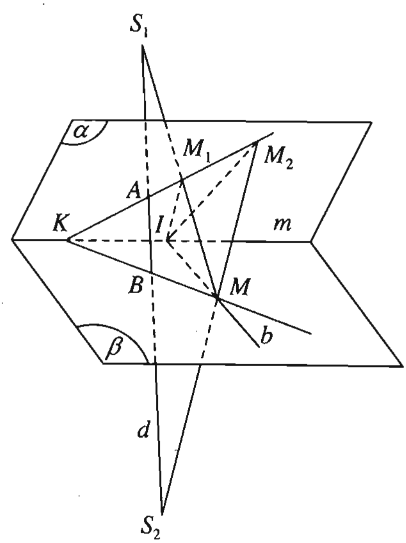
b) Trung điểm E của AC là hình chiếu của trung điểm M của AC' theo phương của cạnh lăng trụ. Tương tự, trung điểm F là hình chiếu trung điểm N của đường chéo BD' trên BD. Ta có $EM \mathbin{/\!/} CC'$ và $EM = \dfrac{CC'}{2}$.

Mặt khác $FN \mathbin{/\!/} DD'$ và $FN = \dfrac{DD'}{2}$. Từ đó ta suy ra tứ giác $MNFE$ là hình bình hành và ta có $MN = EF$.

2.43. a) Mặt phẳng (M, d) cắt (α) theo giao tuyến M_1M_2. Điểm A cũng thuộc giao tuyến đó. Vậy đường thẳng M_1M_2 luôn luôn đi qua điểm A cố định (h.2.65).

b) Mặt phẳng (M, d) cắt (β) theo giao tuyến BM. Điểm K thuộc giao tuyến đó nên ba điểm K, B, M thẳng hàng.

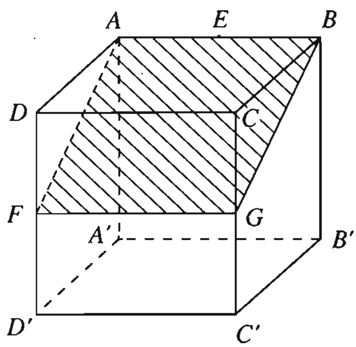
c) Giả sử b cắt m tại I thì mặt phẳng (S_1, b) luôn luôn cắt (α) theo giao tuyến IM_1. Do đó điểm M_1 di động trên giao tuyến IM_1 cố định. Còn khi M di động trên b thì mặt phẳng (S_2, b) cắt (α) theo giao tuyến IM_2. Do đó điểm M_2 chạy trên giao tuyến IM_2 cố định.



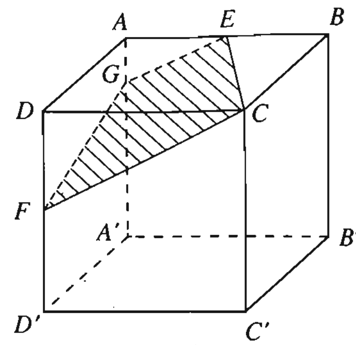
Hình 2.65

2.44. Ta xác định thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng sau :

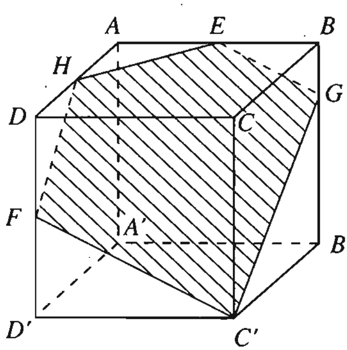
– Mặt phẳng (EFB) : ta vẽ $FG \parallel AB$ và được thiết diện là hình chữ nhật $ABGF$ (h.2.66), G là trung điểm của CC'.



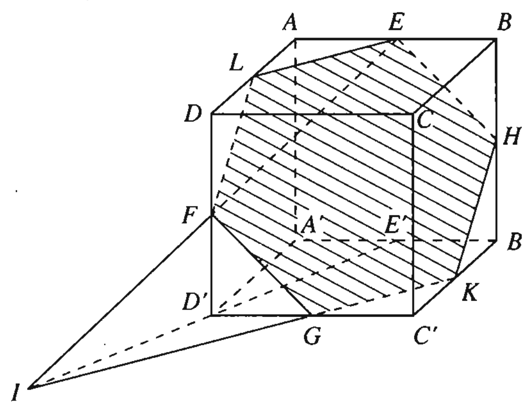
Hình 2.66



Hình 2.67



Hình 2.68



Hình 2.69

– Mặt phẳng (EFC) : Nối FC và vẽ $EG \parallel FC$, ta được thiết diện là hình thang $ECFG$ (h.2.67) $(AG = \frac{1}{4}AA')$.

– Mặt phẳng (EFC') : Nối FC' và vẽ $EG \parallel FC'$. Nối GC' và vẽ $FH \parallel GC'$. Ta được thiết diện là hình ngũ giác $EGC'FH$ (h.2.68)

$$(BG = \frac{1}{4}BB', AH = \frac{1}{3}AD).$$

– Mặt phẳng (EFK) với K là trung điểm của đoạn $B'C'$. Lấy trung điểm E' của đoạn $A'B'$. Ta có $I = EF \cap E'D'$. Ta có IK là giao tuyến của hai mặt phẳng (EFK) và $(A'B'C'D')$. Gọi $G = IK \cap C'D'$. Nối F với G, vẽ $EH // FG$. Nối K với H, vẽ $FL // KH$ và nối L với E. Ta được thiết diện là hình lục giác đều $EHKGFL$ (h.2.69).

(G, H, L theo thứ tự là trung điểm của $D'C'$, $B'B$, AD).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.45. (C)	**2.46.** (D)	**2.47.** (D)	**2.48.** (D)	**2.49.** (B)
2.50. (C)	**2.51.** (A)	**2.52.** (D)	**2.53.** (C)	**2.54.** (B)
2.55. (B)	**2.56.** (C)	**2.57.** (C)	**2.58.** (A)	**2.59.** (B)
2.60. (C)	**2.61.** (B)	**2.62.** (C)	**2.63.** (B)	**2.64.** (B)

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Vectơ, giá và độ dài của vectơ

• *Vectơ trong không gian* là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

• *Giá* của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ *không cùng phương*. Hai vectơ cùng phương thì có thể *cùng hướng* hay *ngược hướng*.

• *Độ dài của vectơ* là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là *vectơ đơn vị*. Ta kí hiệu độ dài của vectơ là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

2. Hai vectơ bằng nhau, vectơ - không

• Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Khi đó ta kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

• *"Vectơ - không"* là một vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là với mọi điểm A tuỳ ý ta có $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ và khi đó mọi đường thẳng đi qua điểm A đều chứa vectơ $\overrightarrow{AA}$. Do đó ta quy ước mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau, có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Do đó ta viết $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ với mọi điểm A, B tuỳ ý.

II. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1. Định nghĩa

• Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đồng thời được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

• Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ nếu $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng với nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.

• $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2. Tính chất

• $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán)

• $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp)

• $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ $\vec{0}$)

• $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$.

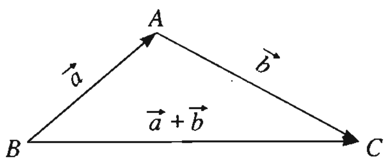
3. Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

a) *Quy tắc ba điểm*

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (h.3.1).

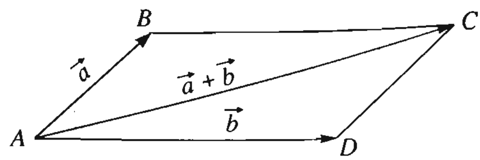


Hình 3.1

b) *Quy tắc hình bình hành*

Với hình bình hành $ABCD$ ta có :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (h.3.2).

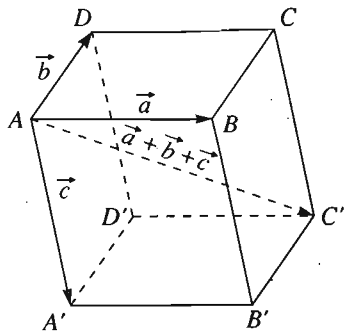


Hình 3.2

c) *Quy tắc hình hộp*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo (h.3.3), ta có :

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

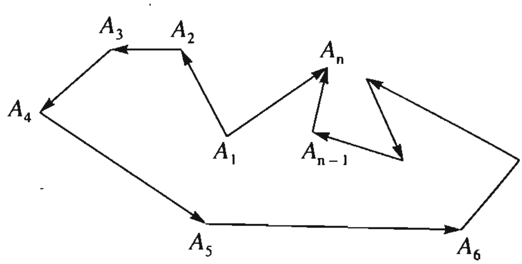


Hình 3.3

d) *Mở rộng quy tắc ba điểm*

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ bất kì (h.3.4),

ta có : $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.



Hình 3.4

III. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Định nghĩa. Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

2. Tính chất. Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số m, n ta có :

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;
- $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$;
- $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$;
- $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

IV. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTƠ

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp :

- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

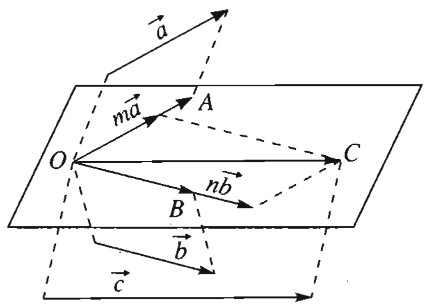
- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

2. Định nghĩa

Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lí 1. Trong không gian cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất (h.3.5).



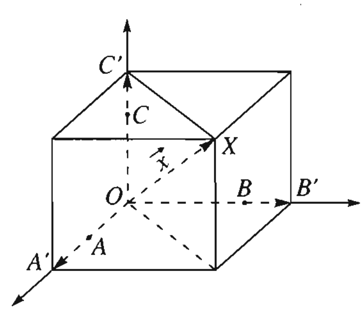
Hình 3.5

4. Phân tích (biểu thị) một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Định lí 2

Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Với mọi vectơ $\vec{x}$ trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

Cụ thể $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (h.3.6)



Hình 3.6

và $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ với $\overrightarrow{OA'} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = n\vec{b}$, $\overrightarrow{OC'} = p\vec{c}$.

Khi đó : $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Xác định các yếu tố của vectơ

1. Phương pháp giải

a) Dựa vào định nghĩa các yếu tố của vectơ ;

b) Dựa vào các tính chất hình học của hình đã cho.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy nêu tên các vectơ bằng nhau có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ.

Giải

Theo tính chất của hình lăng trụ ta suy ra :

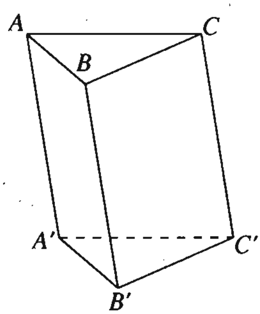
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C'A'}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{C'C}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{A'C'}$

v.v... (h.3.7)



Hình 3.7

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp lần lượt bằng các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Giải

Theo tính chất của hình hộp (h.3.8) ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$

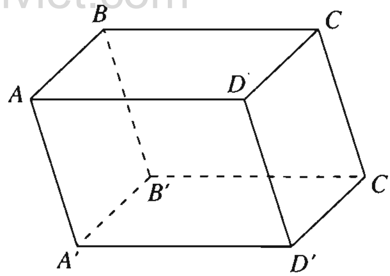
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Ta cũng có : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{C'D'}$

$\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{D'D}$

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{C'A'}$, v.v...



Hình 3.8

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các đẳng thức về vectơ

1. Phương pháp giải

a) Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp để biến đổi vế này thành vế kia và ngược lại.

b) Sử dụng các tính chất của các phép toán về vectơ và các tính chất hình học của hình đã cho.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp *ABCD.EFGH*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

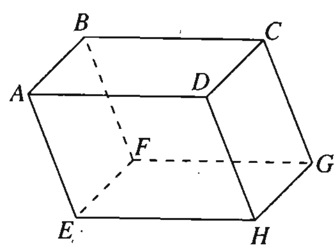
Giải

Theo tính chất của hình hộp :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

Dựa vào quy tắc hình hộp ta có thể viết ngay kết quả :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$ (h.3.9).



Hình 3.9

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành *ABCD*. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

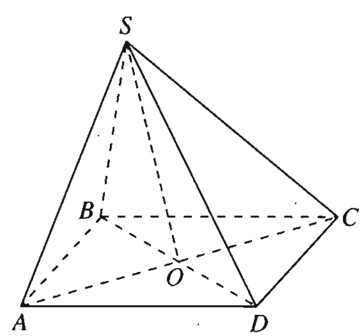
Giải

Gọi *O* là tâm của hình bình hành *ABCD* (h.3.10).

Ta có : $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ (1)

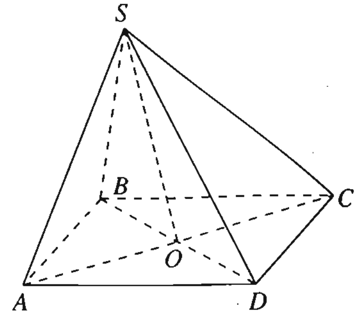
và $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.



Hình 3.10

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.



Hình 3.11

Giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$ (h.3.11).

Ta có : $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$.

$$\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}).$$

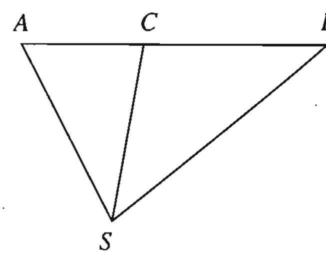
Mà $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$.

Tương tự ta có : $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

Từ đó ta suy ra : $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB. Trên đoạn thẳng AB ta lấy điểm C sao cho $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{m}{n}\cdot$ Chứng minh rằng với điểm S bất kì ta luôn có :

$$\overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}.$$



Hình 3.12

Giải

Theo giả thiết ta có $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{m}{n}$ (h.3.12).

Ta suy ra $\dfrac{AC}{AC + CB} = \dfrac{m}{m+n}$

$$\Rightarrow AC = (AC + CB)\frac{m}{m+n} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}.$$

Vì ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$ nên :

$$\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}=\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}) \Rightarrow \overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{SA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}.$$

VẤN ĐỀ 3

Chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

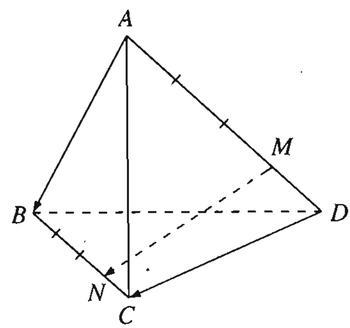
1. Phương pháp giải

a) Dựa vào định nghĩa : Chứng tỏ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng.

b) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a}+n\vec{b}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Hình 3.13

Giải

Theo giả thiết $\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MD}$

và $\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NC}$ (h.3.13).

Mặt khác $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ (1)

và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CN}$ (2)

Cộng đẳng thức (1) và (2) với nhau vế theo vế, ta có

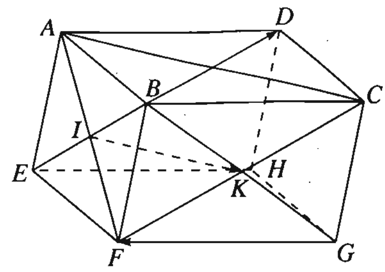
$$4\overrightarrow{MN}=\underbrace{\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MD}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DC}+\underbrace{\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{CN}}_{\vec{0}} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}.$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABFE$ và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $BCGF$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Giải

Vectơ $\overrightarrow{BD}$ có giá thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vectơ $\overrightarrow{IK}$ có giá song song với đường thẳng AC thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vectơ $\overrightarrow{GF}$ có giá song song với đường thẳng BC thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng (h.3.14).



Hình 3.14

Cách khác.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{GF} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$ (vì $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}$).

Vậy $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$. Hệ thức này chứng tỏ rằng ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{IK}$ đồng phẳng.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi O và O' theo thứ tự là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AO'}$ theo các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương đã cho.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB}$.

3.2. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D phân biệt và không thẳng hàng. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình bình hành là :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

3.3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Trên các cạnh AC và BD ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k\ (k > 0).$$

Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng.

3.4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng a. Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $AM + BN + CP = a$.

Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3.5. Trong không gian cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chỉ có chung nhau một điểm A. Chứng minh rằng các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

3.6. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Về một phía đối với mặt phẳng (α) ta dựng hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$. Trên các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 ta lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = \frac{DD_1}{DD_2} = 3.$$

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

3.7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A'D'$. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm đối xứng của các hình bình hành $ABCD$, $CDD'C'$, $A'B'C'D'$, $ADD'A'$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Chứng minh hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có trọng tâm trùng nhau.

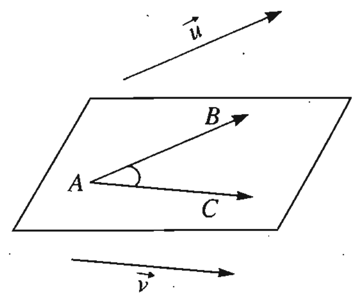
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^o \le \widehat{BAC} \le 180^o$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$. Ta có : $(\vec{u},\vec{v}) = \widehat{BAC}$ (h. 3.15).



Hình 3.15

2. Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vectơ $\vec{0}$ trong không gian là một số được kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$ xác định bởi :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|.\cos(\vec{u}\,,\,\vec{v})$$

Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$.

3. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì trong không gian và với mọi số k ta có :

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ) ;
- $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.k\vec{b}$;
- $\vec{a}^2 \ge 0$; $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

4. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Vectơ $\vec{a} \ne \vec{0}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

- Nếu $\vec{a}$ là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.
- Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của d.

5. Một số ứng dụng của tích vô hướng

- Tính độ dài của đoạn thẳng AB : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.
- Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ theo công thức :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}.$$

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm bất kì lần lượt song song với a và b.

III. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- Hai đường thẳng a và b được gọi là *vuông góc với nhau* nếu góc giữa chúng bằng 90^o. Ta kí hiệu $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Nếu $a \,//\, b$ và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Ứng dụng của tích vô hướng

1. Phương pháp giải

a) Muốn tính độ dài của đoạn thẳng AB hoặc tính khoảng cách giữa hai điểm A và B ta dựa vào công thức : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

b) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta dựa vào công thức : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

c) Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và S là một điểm sao cho :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}.$$

Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm O và S theo a.

Giải

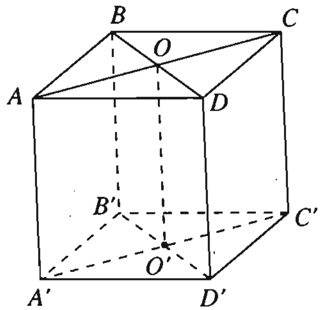
Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

và $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OO'}$; $\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OO'}$

với O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ (h.3.16).

Do đó : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}$

$= 4\overrightarrow{OO'}$ mà $|\overrightarrow{OO'}| = a$.



Hình 3.16

Vậy $|\overrightarrow{OS}| = 4a$.

Ví dụ 2. Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°. Hãy tìm $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $|\vec{a}-\vec{b}|$ biết rằng $|\vec{a}| = 3$ cm và $|\vec{b}| = 5$ cm.

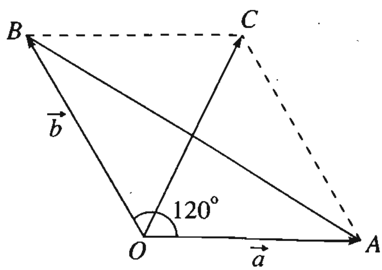
Giải

Từ một điểm O trong không gian dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ với $\widehat{AOB} = 120^{\circ}$ (h.3.17).

Sau đó ta dựng hình bình hành $OACB$.

Ta có $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.

- Xét tam giác OAC ta có $\widehat{OAC} = 60^{\circ}$



Hình 3.17

và $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC\cos 60^o = 9 + 25 - 2.3.5\cdot\frac{1}{2} = 19.$

Vậy $|\overrightarrow{OC}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 19.$

Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ (cm).

• Xét tam giác OAB ta có : $BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\cos 120^o$

$$= 9 + 25 - 2.3.5\cdot(-\frac{1}{2}) = 49.$$

Vậy $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 49.$

Do đó $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ (cm).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều.

a) Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, BD, DA. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}.$

Đặt $AB = a$ ta có $AD = AB = AC = a$ (h.3.18).

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AB}|\cos 60^o - |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|.\cos 60^o$

$$= a.a\cdot\frac{1}{2} - a.a\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

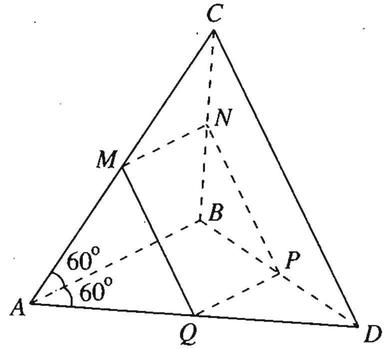
Vậy $CD \perp AB$.

b) Ta có $MN // PQ // AB$

và $MN = PQ = \dfrac{AB}{2}$

nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Vì $MN // AB$ và $NP // CD$ mà $AB \perp CD$ nên hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Hình 3.18

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

1. Phương pháp giải

– Cần khai thác các tính chất về quan hệ vuông góc đã biết trong hình học phẳng.

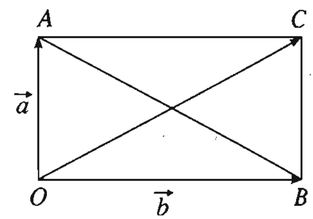
– Sử dụng trực tiếp định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.

– Muốn chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Chứng minh rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$.

Giải



Hình 3.19

Từ một điểm O trong không gian ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ rồi vẽ hình bình hành $OACB$ (h.3.19).

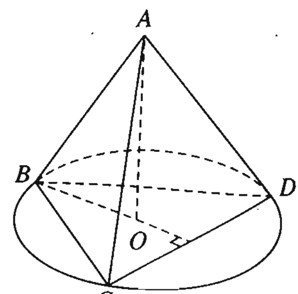
Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Từ đó ta suy ra $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ khi và chỉ khi $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}|$ hay $OC = BA$ nghĩa là khi và chỉ khi $OACB$ là hình chữ nhật. Khi đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh đường thẳng AO vuông góc với đường thẳng CD.

Giải



Hình 3.20

Ta có :

$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD}$$

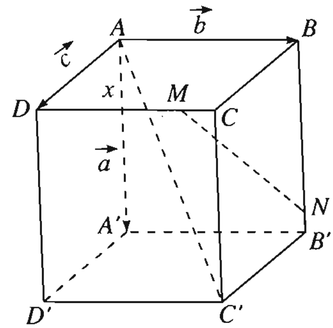
$$= a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Do đó $AO \perp CD$ (h.3.20).

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $DM = BN = x$ với $0 \le x \le a$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AC' và MN vuông góc với nhau.

Giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ (h.3.21).



Hình 3.21

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$

và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

hay $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Mặt khác $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$$

với $\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a}.\vec{a}$ và $\overrightarrow{DM} = \frac{x}{a} \cdot \vec{b}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\left[\frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}\right]$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 \text{ (vì } \vec{a}.\vec{b} = 0, \vec{b}.\vec{c} = 0, \vec{c}.\vec{a} = 0)$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0 \text{ (vì } \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2).$$

Do đó $AC' \perp MN$.

VẤN ĐỀ 3

Dùng tích vô hướng để tính góc của hai đường thẳng trong không gian

1. Phương pháp giải

• Muốn tính góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ta có thể dựa vào công thức

$\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$, và từ đó suy ra góc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

Đặc biệt nếu $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ ta có $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 90^o$.

• Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $\alpha \le 90^o$ và bằng $180^o - \alpha$ nếu $\alpha > 90^o$.

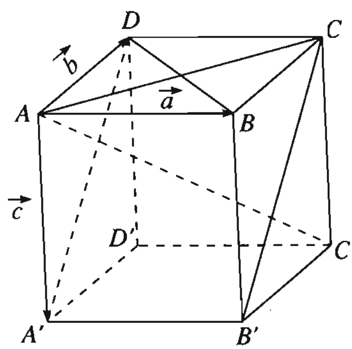
2. *Ví dụ*

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DA'.

b) Chứng minh $BD \perp AC'$.

Giải



Hình 3.22

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (h.3.22).

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$.

$$\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'}}{|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{DA'}|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|.|\vec{c}-\vec{b}|}.$$

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng x ta có :

$$\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = \frac{\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2}{x\sqrt{2}\,.\,x\sqrt{2}} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

(vì $\vec{a}.\vec{c} = 0$, $\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{b}.\vec{c} = 0$ và $\vec{b}^2 = x^2$).

Vậy $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA'}) = 120^o$.

Ta suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60^o.

Cách khác. Từ đỉnh C, nối CB' ta có $CB' // DA'$. Góc giữa AC và DA' chính là góc giữa AC và CB'. Ta có ACB' là tam giác đều có độ dài mỗi cạnh bằng $x\sqrt{2}$ nên góc $\widehat{ACB} = 60^o$ hay góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60^o.

b) Ta cần tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Vậy $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$= \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b}.\vec{c} - \vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$$

$$= 0 + \vec{b}^2 + 0 - \vec{a}^2 + 0 - 0 = 0.$$

Vậy $BD \perp AC'$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

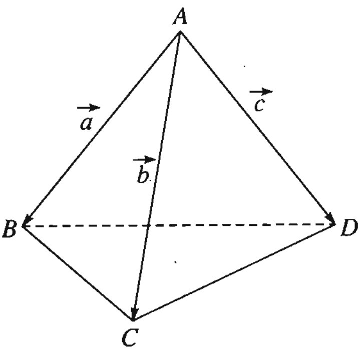
Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{\vec{a}.(\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{c} - \vec{b}|}$$

$$= \frac{\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b}}{a.a} = \frac{a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2}}{a^2} = 0$$

vì $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^o$ (h.3.23).



Hình 3.23

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GC} = 0$.

3.9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, BC, AD và có $MN = PQ$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

3.10. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

3.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

3.12. Chứng minh rằng một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

3.13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau (hình hộp như vậy còn được gọi là hình hộp thoi). Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$.

3.14. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^{\circ}$. Chứng minh tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

3.15. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Đường thẳng d được gọi là *vuông góc với mặt phẳng* (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Khi đó ta còn nói (α) *vuông góc với* d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với (α).

III. TÍNH CHẤT

1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

IV. SỰ LIÊN QUAN GIỮA QUAN HỆ VUÔNG GÓC VÀ QUAN HỆ SONG SONG

1. a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

2. a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

3. a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa. Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α).

***2. Định lí ba đường vuông góc*.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Ta có định nghĩa :

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) được gọi là *góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng* (α).

Lưu ý rằng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90°.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) người ta thường dùng một trong hai cách sau đây :

- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α).
- Chứng minh đường thẳng a song song với đường thẳng b mà b vuông góc với (α).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$ và $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc (AHK).

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$, từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Giải

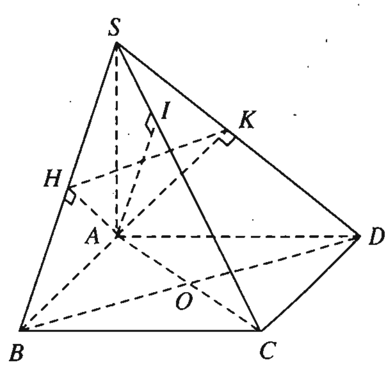
a) $BC \perp AB$ vì đáy $ABCD$ là hình vuông (h.3.24).

$BC \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$.

Do đó $BC \perp (SAB)$ vì BC vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong (SAB).

Lập luận tương tự ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ vì đáy $ABCD$ là hình vuông và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.



Hình 3.24

b) $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ và theo giả thiết $SB \perp AH$ ta suy ra $AH \perp (SBC)$. Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$.

Lập luận tương tự ta chứng minh được $AK \perp SC$. Hai đường thẳng AH, AK cắt nhau và cùng vuông góc với SC nên chúng nằm trong mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với SC. Vậy $SC \perp (AHK)$. Ta có $AI \subset (AHK)$ vì nó đi qua điểm A và cùng vuông góc với SC.

c) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD. \end{cases}$

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có cạnh SA chung và $AB = AD$ (c.g.c). Do đó $SB = SD$, $SH = SK$ nên $HK \parallel BD$.

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$ và do $AI \subset (SAC)$ nên $HK \perp AI$.

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O và có $SA = SC$, $SB = SD$.

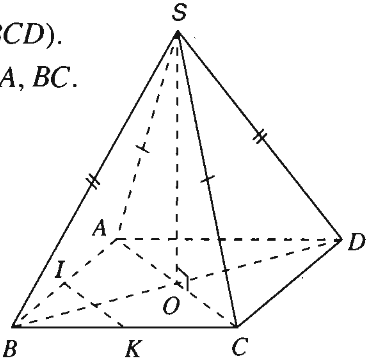
a) Chứng minh SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC.

Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.

Giải

a) O là tâm hình thoi $ABCD$ nên O là trung điểm của đoạn AC (h.3.25). Tam giác SAC có $SA = SC$ nên $SO \perp AC$. Chứng minh tương tự ta có $SO \perp BD$. Từ đó ta suy ra $SO \perp (ABCD)$.



Hình 3.25

b) Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Mặt khác ta có $AC \perp SO$. Do đó $AC \perp (SBD)$. Ta có IK là đường trung bình của tam giác BAC nên $IK \parallel AC$ mà $AC \perp (SBD)$ nên $IK \perp (SBD)$.

Ta lại có SD nằm trong mặt phẳng (SBD) nên $IK \perp SD$.

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải

– Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b, ta tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

– Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

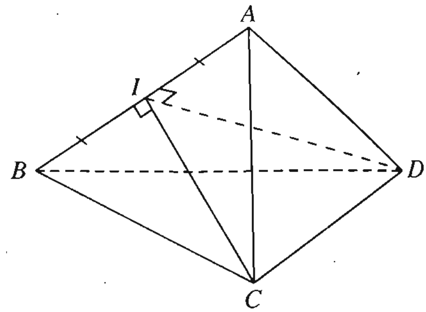
Giải

Giả sử ta cần chứng minh $AB \perp CD$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB (h.3.26). Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (CID).$$

Do đó $AB \perp CD$ vì CD nằm trong mặt phẳng (CID).

Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được $BC \perp AD$ và $AC \perp BD$.



Hình 3.26

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh :

a) $OA \perp BC$, $OB \perp CA$ và $OC \perp AB$;

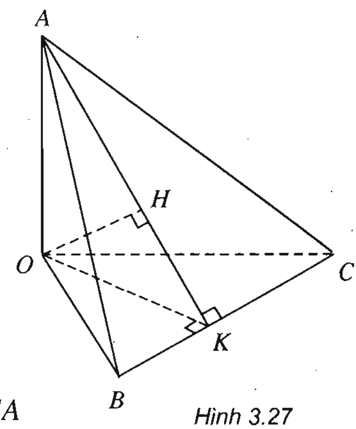
b) H là trực tâm của tam giác ABC ;

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Giải

a) Ta có $\left.\begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array}\right\}$

$\Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ (h.3.27).



Hình 3.27

Tương tự ta chứng minh $OB \perp (OCA) \Rightarrow OB \perp CA$

$$OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB.$$

b) Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$ và $OA \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Gọi K là giao điểm của AH và BC. Trong tam giác AOK vuông tại O, ta có OH là đường cao. Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông của hình học phẳng ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}. \qquad (1)$$

Vì BC vuông góc với mặt phẳng (OAH) nên $BC \perp OK$. Do đó trong tam giác OBC vuông tại O với đường cao OK ta có :

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}.$

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh các mặt bên của hình chóp đã cho là những tam giác vuông.

Giải

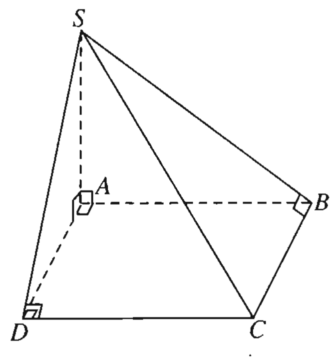
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$ và $SA \perp AD$ (h.3.28).

Vậy các tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

$$\left.\begin{matrix} CD \perp DA \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\left.\begin{matrix} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB.$$



Hình 3.28

Vậy tam giác SDC vuông tại D và tam giác SBC vuông tại B.

Chú thích. Muốn chứng minh tam giác SDC vuông tại D ta có thể áp dụng định lí ba đường vuông góc và lập luận như sau

Đường thẳng SD có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AD. Theo định lí ba đường vuông góc vì $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ và ta có tam giác SDC vuông tại D.

Tương tự, ta chứng minh được $CB \perp SB$ và ta có tam giác SBC vuông tại B.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.16. Một đoạn thẳng AB không vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng này tại trung điểm O của đoạn thẳng đó. Các đường thẳng vuông góc với (α) qua A và B lần lượt cắt mặt phẳng (α) tại A' và B'.

Chứng minh ba điểm A', O, B' thẳng hàng và $AA' = BB'$.

3.17. Cho tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CA tại A và (β) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CB tại B. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và giao tuyến d của chúng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

3.18. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $A'H$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.

b) Gọi MM' là giao tuyến của mặt phẳng (AHA') với mặt bên $BCC'B'$, trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh rằng tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

3.19. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy là (ABC). Gọi D là điểm đối xứng của điểm B qua trung điểm O của cạnh AC. Chứng minh rằng $CD \perp CA$ và $CD \perp (SCA)$.

3.20. Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có chung cạnh đáy BC tạo nên tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI.

Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3.21. Chứng minh rằng tập hợp những điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC đó.

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^o.

• Xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau :

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c. Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng đường thẳng a trong (α) vuông góc với c và dựng đường thẳng b trong (β) vuông góc với c. Khi đó góc giữa (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

• Diện tích hình chiếu của đa giác : $S' = S\cos\varphi$

(với S là diện tích đa giác nằm trong (α), S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (β), φ là góc giữa (α) và (β)).

II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.

Khi đó ta kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$ hoặc $(\beta) \perp (\alpha)$.

2. Tính chất

a) Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

c) Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

d) Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

IV. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là *hình chóp cụt đều*.

Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều đồng dạng với nhau.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp giải

– Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

– Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK).

b) Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Giải

a) Ta có : $\left.\begin{array}{l} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

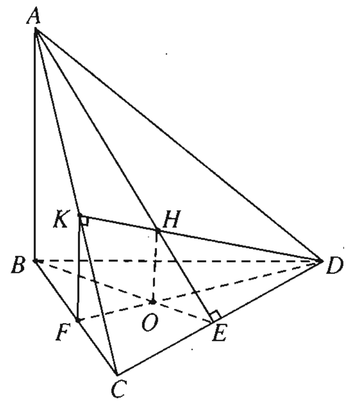
mà $CD \subset (ADC)$ nên $(ADC) \perp (ABE)$.

Ta có : $\left.\begin{array}{l} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp (ABC)$.

Ta suy ra $DF \perp AC$ (h.3.29).

Ta cũng có $DK \perp AC$.

Do đó $AC \perp (DKF)$ và mặt phẳng (ACD) chứa AC nên $(ACD) \perp (DKF)$.



Hình 3.29

b) Vì $CD \perp (ABE)$ nên $CD \perp AE$. Hai mặt phẳng (ABE) và (DKF) đều vuông góc với mặt phẳng (ACD) nên giao tuyến OH của chúng vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$. Cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

Giải

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

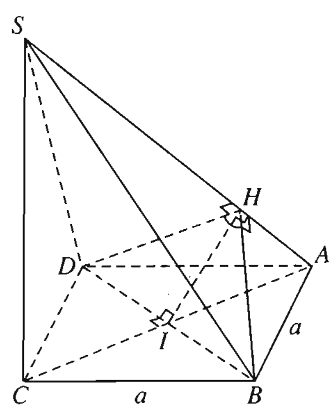
Vì $SC \perp (ABCD)$ nên $SC \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$, dẫn đến $BD \perp SA$.

Trong mặt phẳng (SAC) hạ $IH \perp SA$ tại H, ta suy ra $SA \perp (BDH)$ (vì $SA \perp BD$ và $SA \perp IH$).

Do đó $BH \perp SA$ và $DH \perp SA$ (h.3.30).

Vậy $\widehat{BHD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).



Hình 3.30

Hai tam giác vuông AHI và ACS có góc nhọn A chung nên đồng dạng :

Do đó $\dfrac{IH}{AI} = \dfrac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \dfrac{AI.SC}{AS}$. (1)

Vì $BD = a$ nên ABD là tam giác đều, do đó

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}.$$

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

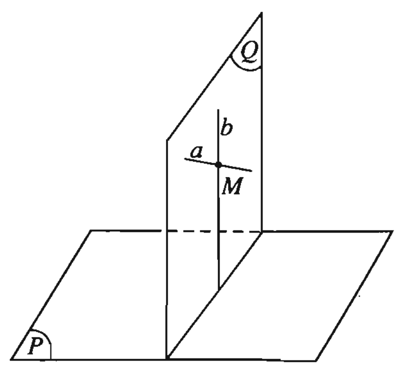
Thay các giá trị của AI, SC, SA vào (1) ta được : $IH = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BD}{2}$.

Tam giác BHD có trung tuyến IH ứng với cạnh BD bằng $\dfrac{BD}{2}$ nên đó là tam giác vuông tại H hay $\widehat{BHD} = 90^{\circ}$.

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

VẤN ĐỀ 2

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Hãy xác định mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với (P).



Hình 3.31

1. Phương pháp giải

Từ một điểm M thuộc a, dựng đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) ta có $(Q) = (a, b)$ (h.3.31)

2. Ví dụ

Ví dụ. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A lấy điểm S. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Hãy xác định mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì ?

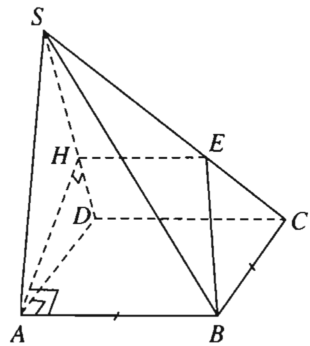
Giải

Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H (h.3.32). Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AH.$$

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp DC \\ AH \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SDC).$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH trong đó AH vuông góc với mặt phẳng (SDC). Vậy $(\alpha) \perp (SDC)$ và $(\alpha) = (AB, AH)$.



Hình 3.32

Ta có $AB \,//\, CD$ nên $CD \,//\, (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E. Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.22. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$ và $AD' \perp CB'$. Khi nào mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt phẳng $(BB'D'D)$?

3.23. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cặp cạnh đối diện bằng nhau là $AB = CD$, $AC = BD$ và $AD = BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$. Mặt phẳng (CDM) có vuông góc với mặt phẳng (ABN) không ? Vì sao ?

3.24. Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ thì $AD \perp BC$.

3.25. Cho tam giác ABC vuông tại B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Từ điểm A trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ AH vuông góc với BD, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3.26. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh :

a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) ;

b) Tam giác SBD là tam giác vuông tại S.

3.27. a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

b) Tính đường chéo AC' của hình lập phương đã cho.

3.28. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Chứng minh

a) Mỗi cạnh bên của hình chóp đó vuông góc với cạnh đối diện ;

b) Mỗi mặt phẳng chứa một cạnh bên và đường cao của hình chóp đều vuông góc với cạnh đối diện.

3.29. Tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK và BC đồng quy.

b) SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và $(SAC) \perp (BHK)$.

c) HK vuông góc với mặt phẳng (SBC) và $(SBC) \perp (BHK)$.

3.30. Tứ diện $SABC$ có ba đỉnh A, B, C tạo thành tam giác vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Trong mặt phẳng (SAB) vẽ AH vuông góc với SB tại H, chứng minh $AH \perp (SBC)$.

c) Tính độ dài đoạn AH.

d) Từ trung điểm O của đoạn AC vẽ OK vuông góc với (SBC) cắt (SBC) tại K. Tính độ dài đoạn OK.

3.31. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cạnh SC, (α) cắt SC tại I.

a) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α).

b) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD \parallel (\alpha)$.

c) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α). Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α).

3.32. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (SDC), mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SCB).

b) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$, tính $\tan\varphi$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Hãy xác định (α) và xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (α).

§5. KHOẢNG CÁCH

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Cho một điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu của O trên a. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a, kí hiệu là $d(O, a)$.

2. Khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (α) là khoảng cách giữa hai điểm O và H, với H là hình chiếu vuông góc của O lên (α), kí hiệu là $d(O, (\alpha))$.

3. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α), kí hiệu là $d(a, (\alpha))$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β), kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) \text{ với } M \in (\alpha)$$

$$d((\alpha), (\beta)) = d(N, (\alpha)) \text{ với } N \in (\beta).$$

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài của đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

II. LƯU Ý

1. Tính khoảng cách có thể áp dụng trực tiếp định nghĩa hoặc tính gián tiếp, chẳng hạn có thể tính được đường cao của một tam giác (khoảng cách từ đỉnh tới đáy) nếu biết diện tích và số đo độ dài cạnh đáy của tam giác đó.

2. Trước khi tính toán, cần xác định rõ yếu tố cần tính khoảng cách.

B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng m cho trước

1. Phương pháp giải

– Trong mặt phẳng xác định bởi điểm M và đường thẳng m ta vẽ $MH \perp m$ tại H. Ta có $d(M, m) = MH$. Ta có thể sử dụng các kết quả của hình học phẳng để tính độ dài đoạn MH.

– Trong không gian dựng mặt phẳng (α) đi qua M và (α) vuông góc với m cắt m tại H, ta có $d(M, m) = MH$. Sau đó tính độ dài đoạn MH.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

a) Chứng minh đường thẳng IO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

Giải

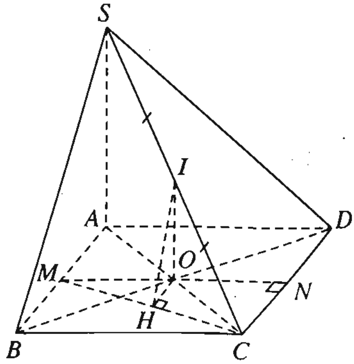
a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ mà $IO \,//\, SA$ do đó $IO \perp (ABCD)$ (h.3.33).

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng H là hình chiếu vuông góc của O trên CM, ta có $IH \perp CM$ và IH chính là khoảng cách từ I đến đường thẳng CM.

Gọi N là giao điểm của MO với cạnh CD. Hai tam giác vuông MHO và MNC đồng dạng nên $\dfrac{OH}{CN} = \dfrac{OM}{MC}$.

Do đó $OH = \dfrac{CN.OM}{MC} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$.

Ta còn có $IO = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$



Hình 3.33

và $IH^2 = IO^2 + OH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{20} = \dfrac{3a^2}{10}$.

Vậy khoảng cách $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $AO = 4$ cm. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

Giải

Ta dựng $AH \perp BC$ tại H (h.3.34).

Theo công thức Hê-rông, diện tích S của tam giác ABC là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

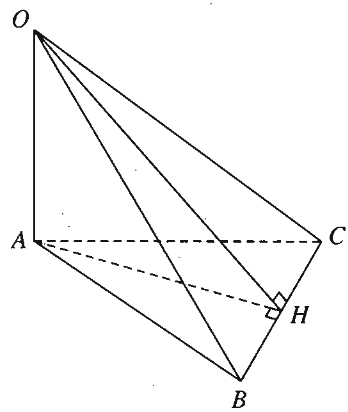
$$= \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

$$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

Vì $AH \perp BC$ nên $OH \perp BC$ theo định lí ba đường vuông góc.

Ta suy ra $OH^2 = OA^2 + AH^2 = 16 + 48 = 64$.

Vậy $OH = 8$ cm.



Hình 3.34

VẤN ĐỀ 2

Tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α)

1. Phương pháp giải

Dựng $MH \perp (\alpha)$ với $H \in (\alpha)$ và tính MH.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc vuông. Khoảng cách từ M đến đỉnh O của góc vuông bằng 23 cm và khoảng cách từ M tới hai cạnh Ox và Oy đều bằng 17 cm. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng chứa góc vuông.

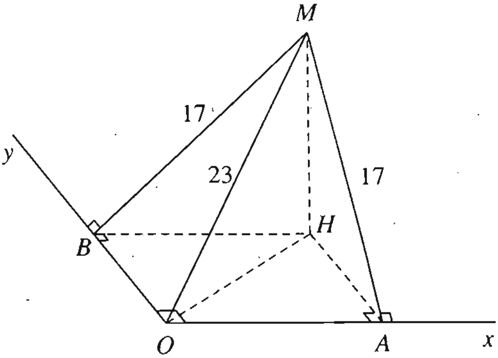
Giải

Gọi A và B lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy (h.3.35).

Ta có $MO = 23$ cm, $MA = MB = 17$ cm. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (OAB).

Cần tính khoảng cách MH từ M đến mặt phẳng (OAB).

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $HA \perp OA$ và $HB \perp OB$. Do đó tứ giác $OAHB$ là hình chữ nhật. Mặt khác vì $MA = MB = 17$cm nên $HA = HB$. Vậy tứ diện $OAHB$ là hình vuông. Đặt $OA = x$ ta có $OH = x\sqrt{2}$. Do đó



Hình 3.35

$$MH^2 = MO^2 - OH^2 = MA^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow 23^2 - 2x^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 240$$

Vậy $MH^2 = 17^2 - 240 = 49$ nên $MH = 7$cm.

Ví dụ 2. Tam giác ABC vuông tại A, có cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (α), cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với (α) một góc 60^o.

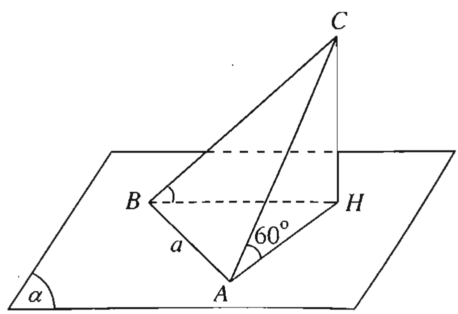
a) Tính khoảng cách CH từ C tới (α).

b) Chứng minh rằng cạnh BC tạo với (α) một góc $\varphi = 45^o$.

Giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên (α). Theo giả thiết ta có $\widehat{CAH} = 60^o$, do đó

$$CH = AC \sin 60^o = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ (h.3.36).}$$



Hình 3.36

b) Ta có $\widehat{CBH}$ là góc của cạnh BC tạo với mặt phẳng (α).

Vì $BA \perp CA$ nên :

$BC^2 = BA^2 + AC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

$$\sin\widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\widehat{CBH} = 45^o$.

VẤN ĐỀ 3

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

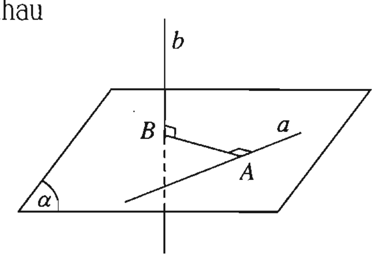
1. Phương pháp giải

Ta có các trường hợp sau đây :

a) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

– Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.

– Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b (h.3.37).



Hình 3.37

b) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

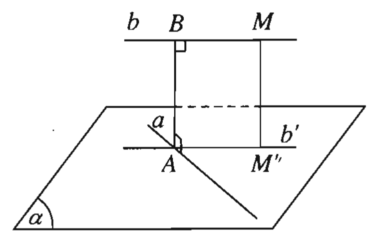
Cách 1 :

– Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b (h.3.38).

– Lấy một điểm M tuỳ ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.

– Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A.

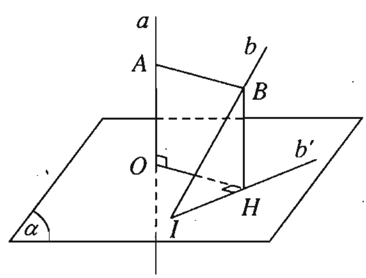
– Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



Hình 3.38

Cách 2 :

– Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I (h.3.39)



Hình 3.39

– Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).

– Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$, $H \in b'$.

– Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B

– Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A

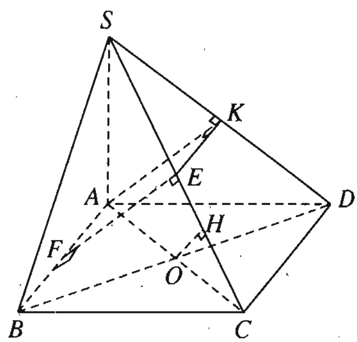
Độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của :

a) SB và CD ; b) SC và BD ; c) SC và AB.

Giải



Hình 3.40

a) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow BC \perp SB.$$

Mặt khác $BC \perp CD$. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD. Khoảng cách giữa SB và CD là đoạn $BC = a$ (h.3.40).

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC) từ O hạ $OH \perp SC$ tại H ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ vì $BD \perp (SAC)$. Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin\widehat{ACS}$. Vậy $OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$.

c) Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Trong mặt phẳng (SAD) ta có SD là hình chiếu vuông góc của SC, ta vẽ $AK \perp SD$ tại K. Trong mặt phẳng (SCD) vẽ $KE \parallel CD$ với $E \in SC$.

Trong mặt phẳng (KE, AB) vẽ $EF \parallel AK$ với $F \in AB$. Ta có AB và CD cùng vuông góc với mặt phẳng (SAD) nên $AB \perp AK$ và $CD \perp AK$.

Ta có $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$

Vậy $AK \perp AB$ và $AK \perp SC$. Vì $EF \,//\, AK$ nên $EF \perp AB$ và $EF \perp SC$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có $EF = AK = \dfrac{AS.AD}{SD} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC =$ a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng :

a) OA và BC ; b) AI và OC.

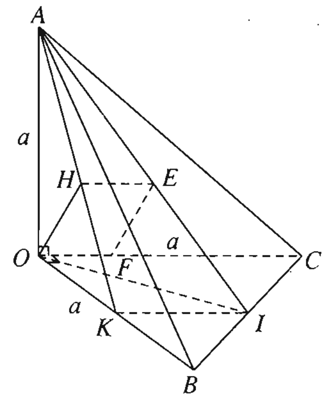
Giải

a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{matrix}\right\} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC (h.3.41).

Ta có $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\left.\begin{matrix} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OC \perp (OAB)$ tại O.

Từ I vẽ $IK \,//\, OC$ thì IK vuông góc với mặt phẳng (OAB) tại trung điểm K của đoạn OB. Ta có AK là hình chiếu vuông góc của AI trên mặt phẳng (OAB).



Hình 3.41

Trong mặt phẳng (OAB) vẽ $OH \perp AK$. Dựng $HE \,//\, OC$ với $E \in AI$ và dựng $EF \,//\, OH$ với $F \in OC$. Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC.

Ta có $EF = OH$.

Trong tam giác vuông OAK ta có : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

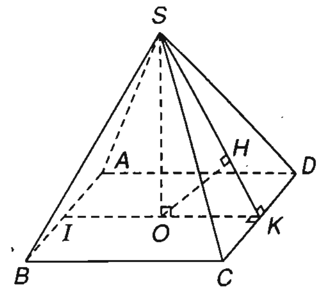
Vậy $OH^2 = \dfrac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = EF$.

Khoảng cách giữa AI và OC là $EF = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có $SO = a$.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Giải



Hình 3.42

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Mặt khác, $SC \subset (SCD)$ nên khoảng cách giữa AB và SC chính là khoảng cách giữa AB và (SCD) (h.3.42).

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD thì ta có O là trung điểm của IK và $IK \perp CD$. Do đó :

$d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp SO \\ CD \perp OK \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SOK)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SOK)$ với $SK = (SCD) \cap (SOK)$.

Trong tam giác vuông SOK ta có $OH \perp SK$ nên $OH \perp (SCD)$, do đó

$$OH = d(O, (SCD)).$$

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

Do đó $OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm A', B, D; C, B', D' tới đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

3.34. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh mặt phẳng (SIK) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

3.35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh đường thẳng BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$.

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

3.36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

3.37. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a.

3.38. Tính khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD của hình tứ diện $ABCD$ biết rằng $AC = BC = AD = BD = a$ và $AB = p$, $CD = q$.

3.39. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC.

a) Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng đáy (ABC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SG.

3.40. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt phẳng đáy góc 60° và hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ.

b) Chứng minh rằng mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.41. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng ? Mệnh đề nào sai ?

a) Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d vuông góc với b.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

c) Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a cùng vuông góc với đường thẳng b thì $a \parallel (\alpha)$.

d) Hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng (γ) thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

e) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

f) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

3.42. Xét các mệnh đề sau đây xem mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Qua một điểm, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

b) Qua một đường thẳng, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

c) Qua một điểm, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

d) Cho hai đường thẳng a và b. Nếu có mặt phẳng (α) không chứa cả a và b thì a và b chéo nhau.

3.43. Trên mặt phẳng (α) cho hình vuông $ABCD$. Các tia Ax, By, Cz, Dt vuông góc với mặt phẳng (α) và nằm về một phía đối với mặt phẳng (α). Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D'.

a) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì ? Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

b) Chứng minh rằng điều kiện để tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thoi là nó có hai đỉnh đối diện cách đều mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng điều kiện để tứ giác $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật là nó có hai đỉnh kề nhau cách đều mặt phẳng (α).

3.44. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh $7a$, có cạnh SC vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SC = 7a$.

a) Tính góc giữa SA và BC.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

3.45. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD khi và chỉ khi

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

3.46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy tính góc của các cặp đường thẳng sau đây :

a) AB' và BC' ;   b) AC' và CD'.

3.47. Cho hai tia Ax và By vuông góc với nhau nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax và By sao cho $AM + BN = MN$.

Đặt $AB = 2a$, gọi O là trung điểm của AB và H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên đường thẳng MN.

a) Chứng minh rằng $OH = a$, $HM = AM$, $HN = BN$.

b) Gọi Bx' là tia song song và cùng chiều với tia Ax và K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (Bx', By). Chứng minh BK là phân giác của góc $\widehat{x'By}$.

c) Chứng minh điểm H nằm trên một đường tròn cố định.

3.48. Hình thoi $ABCD$ tâm O, có cạnh a và có $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O ta lấy một điểm S sao cho $SB = a$.

a) Chứng minh tam giác SAC là tam giác vuông và SC vuông góc với BD.

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$, $(SCB) \perp (SCD)$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức sai trong các đẳng thức sau đây :

(A) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$;   (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$;   (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

3.50. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào là đúng ?

(A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$;

(B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$;

(C) $\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$;

(D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

3.51. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$;

(B) $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} = 0$;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

(D) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$.

3.52. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

(A) Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ;

(B) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

(C) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

(D) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

3.53. Hãy tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba vectơ đó bằng vectơ $\vec{0}$;

(B) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương ;

(C) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng ;

(D) Vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

3.54. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tìm mệnh đề sai trong những mệnh đề sau đây :

(A) $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = a\sqrt{3}$;

(B) $\overrightarrow{AD'} . \overrightarrow{AB'} = a^2$;

(C) $\overrightarrow{AB'} . \overrightarrow{CD'} = 0$;

(D) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$.

3.55. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là sai ?

(A) Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

(B) Nếu có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

(C) Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá thuộc một mặt phẳng.

(D) Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

3.56. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Hãy xét xem mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{BA}$.

(B) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$.

(C) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.

(D) Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

3.57. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau .

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

(D) Mặt phẳng (α) và đường thẳng a cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

3.58. Hãy xét sự đúng, sai của các mệnh đề sau (với a, b, c là các đường thẳng) :

(A) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$;

(B) Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$;

(C) Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và b song song với mặt phẳng (α) thì $a \perp b$;

(D) Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

3.59. Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Hãy xét xem mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

(A) Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

(B) Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

(C) Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (\alpha)$ hoặc $c \parallel (\beta)$.

(D) Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

3.60. Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

(B) Cho $a \perp b$ và b nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

(C) Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

(D) Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b).

3.61. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

(A) Qua một đường thẳng, có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác ;

(B) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;

(C) Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$;

(D) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a để $(\alpha) \perp b$.

3.62. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

(B) Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α), mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

(C) Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

(D) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có một mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

3.63. Cho tứ diện đều $ABCD$. Khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC) là :

(A) Độ dài đoạn DG trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC ;

(B) Độ dài đoạn DH trong đó H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (ABC) ;

(C) Độ dài đoạn DK trong đó K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;

(D) Độ dài đoạn DI trong đó I là trung điểm của đoạn AM với M là trung điểm của đoạn BC.

Trong các mệnh đề nêu trên mệnh đề nào là sai ?

3.64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng ?

(A) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

(B) Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

(C) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

(D) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3}{2}a$.

3.65. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng :

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; (C) $\frac{2a}{3}$; (D) $2a$.

Hãy chọn kết quả đúng.

3.66. Hãy chọn kết quả đúng của bài toán sau đây :

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy là :

(A) $1{,}5a$; (B) a ; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $a\sqrt{3}$.

3.67. Các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng ?

(A) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng d vừa vuông góc với a và vừa vuông góc với b.

(B) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

(C) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường vuông góc chung luôn luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b.

(D) Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không song song với nhau.

3.68. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau đây kết quả nào là sai ?

(A) Độ dài đường chéo BD' bằng $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

(B) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng b.

(C) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và DD' bằng $\sqrt{a^2+b^2}$.

(D) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3.69. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

(B) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

(C) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

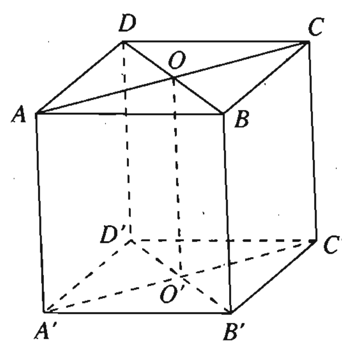
(D) Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

3.1. a) • $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, v.v...



Hình 3.43

• $\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right)$

$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'}$, v.v...

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

(vì $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$) nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AB}$ (h.3.43).

3.2. Giả sử bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình bình hành (h.3.44), ta có :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ (với điểm O bất kì)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}.$$

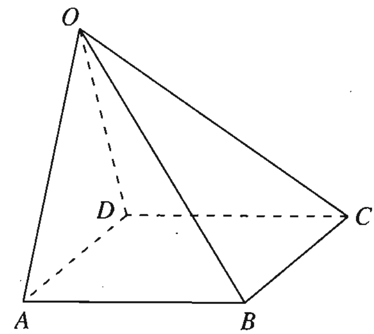
Ngược lại giả sử ta có hệ thức :

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Vì A, B, C, D không thẳng hàng nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.



Hình 3.44

3.3. Ta có

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - \underbrace{(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP})}_{\vec{0}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})$$

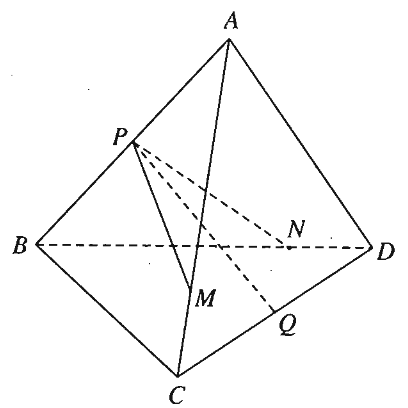
vì $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{BN}$.

Đồng thời $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN}$, nên

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \quad \text{vì } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}.$$

Vậy $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{PM} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{PN}$.

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng (h.3.45).



Hình 3.45

3.4. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP (h.3.46). Ta có :

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG'} \\ + & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG'} \\ & \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PG'} \\ \hline \end{array}$$

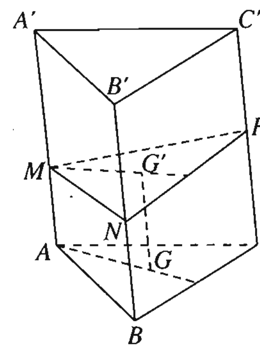
$$3\overrightarrow{GG'} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'}).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và G' là trọng tâm của tam giác MNP nên $\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'} = \vec{0}$.

Do đó : $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$

hay $\overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Vì điểm G cố định và $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ là vectơ không đổi nên G' là điểm cố định. Vậy mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua điểm G' cố định.



Hình 3.46

3.5. Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$ (h.3.47).

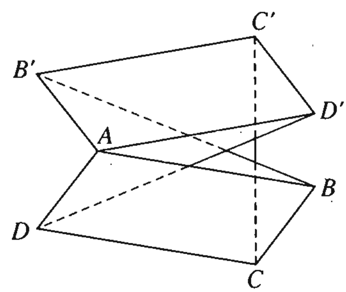
Do đó $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$.

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'}$

nên $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC'}$.

Vậy $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$.

Hệ thức $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$ biểu thị sự đồng phẳng của ba vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{DD'}$.



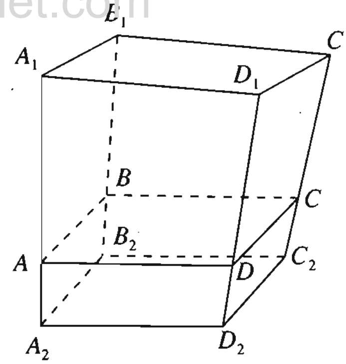
Hình 3.47

3.6. Lấy điểm O cố định rồi đặt $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1$, $\overrightarrow{OD_1} = \vec{d}_1$ (h.3.48).

Điều kiện cần và đủ để tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành là $\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_1 + \vec{d}_1$ (theo bài tập 3.2) (1).

Đặt $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OB_2} = \vec{b}_2$, $\overrightarrow{OC_2} = \vec{c}_2$, $\overrightarrow{OD_2} = \vec{d}_2$. Điều kiện cần và đủ để tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ là hình bình hành là :

$$\vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \vec{d}_2 \qquad (2).$$



Hình 3.48

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Ta có $\dfrac{AA_1}{AA_2} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = -3\overrightarrow{AA_2}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = -3(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_1 - \vec{a} = -3(\vec{a}_2 - \vec{a})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2).$$

Tương tự : $\vec{b} = \dfrac{1}{4}(\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2)$, $\vec{c} = \dfrac{1}{4}(\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2)$, $\vec{d} = \dfrac{1}{4}(\vec{d}_1 + 3\vec{d}_2)$.

Ta có $\vec{a} + \vec{c} = \dfrac{1}{4}(\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2) + \dfrac{1}{4}(\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2) = \dfrac{1}{4}(\vec{a}_1 + \vec{c}_1) + \dfrac{3}{4}(\vec{a}_2 + \vec{c}_2)$

và $\vec{b} + \vec{d} = \dfrac{1}{4}(\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2) + \dfrac{1}{4}(\vec{d}_1 + 3\vec{d}_2) = \dfrac{1}{4}(\vec{b}_1 + \vec{d}_1) + \dfrac{3}{4}(\vec{b}_2 + \vec{d}_2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_1 + \vec{d}_1$ và $\vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \vec{d}_2$ nên suy ra :

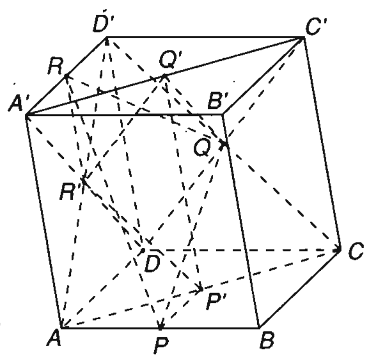
$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

3.7. a) Ta có : $\overrightarrow{PP'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{QQ'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$,

$\overrightarrow{RR'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$ (h.3.49).

Vậy $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$.



Hình 3.49

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác PQR và $P'Q'R'$.

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{RR'}=\vec{0}$.

Do đó $(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'P'})+(\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'Q'})+(\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'R'})=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG})}_{\vec{0}}+3\overrightarrow{GG'}+\underbrace{(\overrightarrow{G'P'}+\overrightarrow{G'Q'}+\overrightarrow{G'R'})}_{\vec{0}}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\vec{0} \Rightarrow G$ trùng với G'.

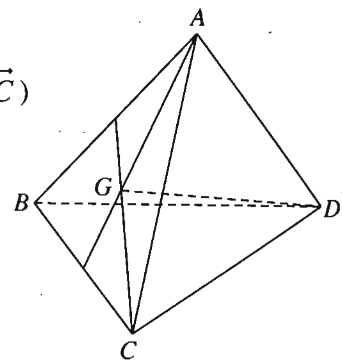
Vậy hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

3.8. Ta có (h.3.50) :

$$\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$
$$=\overrightarrow{GD}.\vec{0}=0$$

(Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$).



Hình 3.50

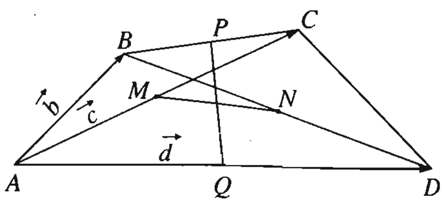
3.9. Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ (h.3.51).

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Ta có :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}-\vec{c})$.

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AP}$$
$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}).$$



Hình 3.51

Theo giả thiết ta có $MN = PQ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{QP}^2$.

$(\vec{b}+\vec{d}-\vec{c})^2 = (\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})^2 \Leftrightarrow \vec{b}.\vec{d}-\vec{b}.\vec{c}-\vec{d}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d}-\vec{c}.\vec{d}$

$$\Leftrightarrow 2\vec{b}.\vec{d}-2\vec{b}.\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}.(\vec{d}-\vec{c})=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

3.10. Ta tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$. Ta có

$$\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}.$$

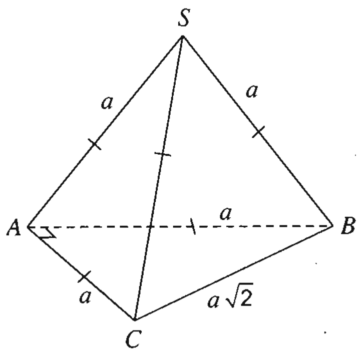
Theo giả thiết ta suy ra hình chóp có các tam giác đều là SAB, SAC và các tam giác vuông là ABC vuông tại A và SBC vuông tại S.

Do đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = a.\,a.\cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$

và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}+0}{a^2} = -\dfrac{1}{2}$

hay $(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}) = 120^\circ$ (h.3.52).

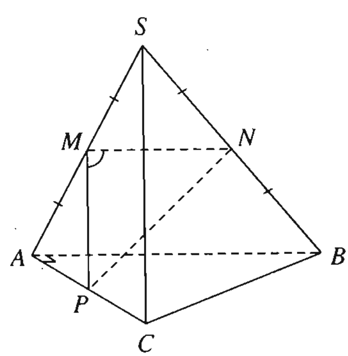


Hình 3.52

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ bằng 120°.

3.11. *Cách thứ nhất*

Dễ thấy tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0$ (h. 3.53) và tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.



Hình 3.53

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60^o.

Cách thứ hai

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính $\widehat{NMP}$.

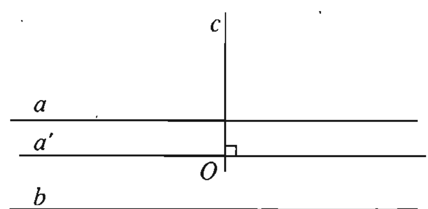
Ta có $NB = MP = \frac{a}{2}$, $SP^2 = \frac{3a^2}{4}$, $BP^2 = \frac{5a^2}{4}$;

$$BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2} \Rightarrow NP^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Mặt khác $NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\widehat{NMP}$

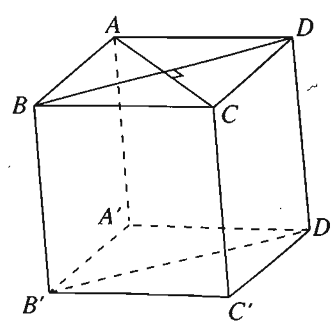
$$\Rightarrow \cos\widehat{NMP} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^o.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60^o.



Hình 3.54

3.12. Giả sử $a \,//\, b$ và $c \perp a$. Lấy điểm O bất kì trên c, kẻ $a' \,//\, a$ qua O suy ra $\widehat{cOa'} = 90^o$. Dễ thấy $a' \,//\, b$ nên $\widehat{cOa'}$ chính là góc giữa hai đường thẳng c và b, do đó $c \perp b$ (h.3.54).



Hình 3.55

3.13. Từ giả thiết suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó $AC \perp BD$ (h.3.55).

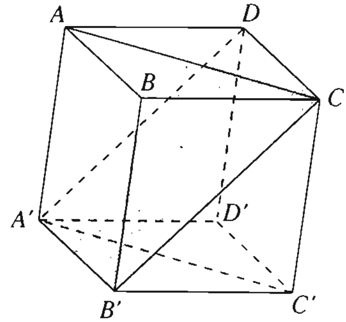
Dễ thấy mặt chéo $BDD'B'$ của hình hộp đã cho là hình bình hành, do đó $BD \,//\, B'D'$. Từ đó, theo bài 3.12 suy ra $AC \perp B'D'$.

3.14. Trước hết ta dễ thấy tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành, ngoài ra $B'C = a = CD$ nên nó là hình thoi. Ta chứng minh hình thoi $A'B'CD$ là hình vuông (h.3.56). Thật vậy, ta có :

$$\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Vậy tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.



Hình 3.56

3.15. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$; (1)

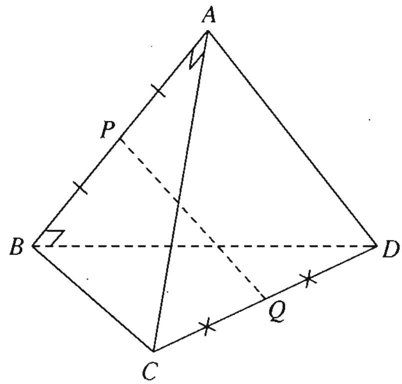
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$. (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta có

$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ (h.3.57).

Suy ra $2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

hay $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$, tức là $PQ \perp AB$.



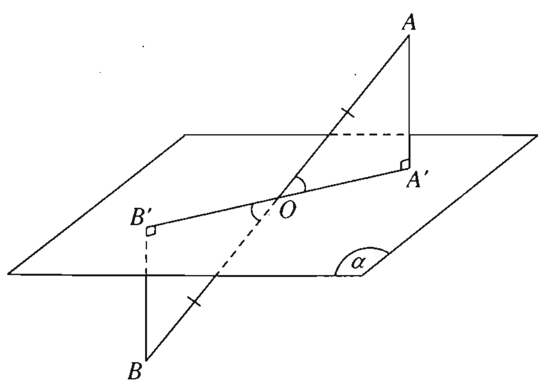
Hình 3.57

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

3.16. $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (\alpha) \\ BB' \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow AA' // BB'.$

Mặt phẳng (AA', BB') xác định bởi hai đường thẳng song song AA', BB' cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến qua O, A', B'. Do đó ba điểm O, A', B' thẳng hàng.

Hai tam giác vuông OAA' và OBB' bằng nhau vì có một cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau nên từ đó ta suy ra $AA' = BB'$ (h.3.58).



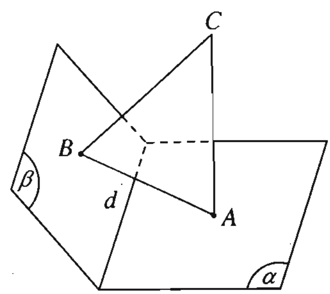
Hình 3.58

3.17. Hai mặt phẳng (α) và (β) không thể trùng nhau vì nếu chúng trùng nhau thì từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với một mặt phẳng, điều đó là vô lí (h.3.59).

Mặt khác (α) và (β) cũng không song song với nhau. Vì nếu $(\alpha) // (\beta)$, thì từ $CB \perp (\beta)$ ta suy ra $CB \perp (\alpha)$.

Như vậy từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với (α), điều đó là vô lí.

Vậy (α) và (β) là hai mặt phẳng không trùng nhau, không song song với nhau và chúng phải cắt nhau theo giao tuyến d, nghĩa là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.



Hình 3.59

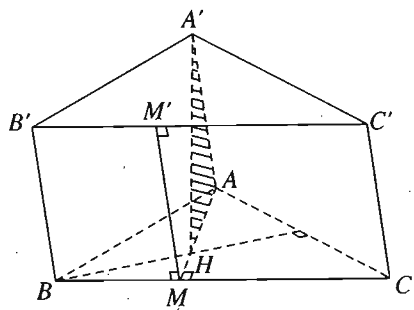
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d \subset (\alpha) \\ CA \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow CA \perp d \\ \left.\begin{array}{l} d \subset (\beta) \\ CB \perp (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow CB \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (ABC).$$

3.18. a) $BC \perp AH$ và $BC \perp A'H$ vì $A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp AA'$

và $B'C' \perp AA'$ vì $BC // B'C'$.

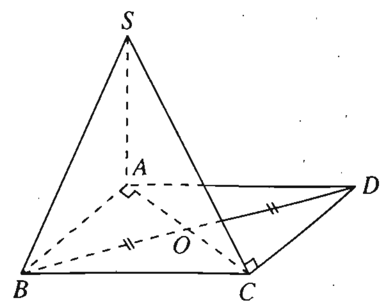
b) Ta có $AA' // BB' // CC'$ mà $BC \perp AA'$ nên tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật. Vì $AA' // (BCC'B')$ nên $AA' // MM'$ và vì $AA' \perp BC$ nên ta suy ra $MM' \perp BC$ và $MM' \perp B'C'$ hay MM' là đường cao của hình chữ nhật $BCC'B'$ (h.3.60).



Hình 3.60

3.19. Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp DC \subset (ABC)$.

Vì AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và ta có $AB // DC$. Vì $AB \perp AC$ nên $CD \perp CA$. Mặt khác ta có $CD \perp SA$, do đó $CD \perp (SCA)$ (h.3.61)



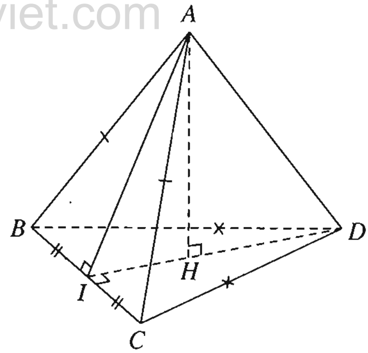
Hình 3.61

3.20. a) Tam giác ABC cân đỉnh A và có I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$. Tương tự tam giác DBC cân đỉnh D và có I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$. Ta suy ra :

$BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AD$.

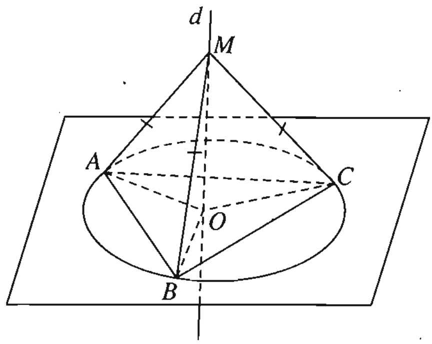
b) Vì $BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp ID$ nên ta suy ra AH vuông góc với mặt phẳng (BCD) (h.3.62).



Hình 3.62

3.21. *Phần thuận.* Nếu $MA = MB = MC$ nghĩa là M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và MO vuông góc với mặt phẳng (ABC) thì ta có ba tam giác vuông MOA, MOB, MOC bằng nhau. Từ đó ta suy ra $OA = OB = OC$ nghĩa là A, B, C nằm trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC thì nằm trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (h.3.63).



Hình 3.63

Phần đảo. Nếu ta lấy một điểm M bất kì thuộc đường thẳng d nói trên thì ta có ba tam giác vuông MOA, MOB, MOC bằng nhau. Do đó ta suy ra $MA = MB = MC$ nghĩa là điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

Kết luận. Tập hợp những điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC đó. Người ta thường gọi đường thẳng d là *trục của đường tròn* (C).

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

3.22. Theo giả thiết các mặt của hình hộp đều là hình thoi (h.3.64).

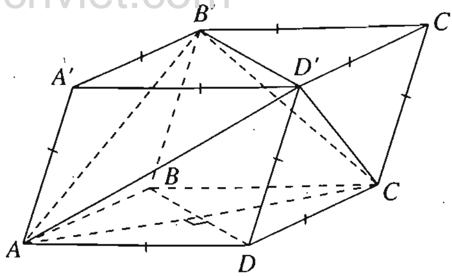
Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Theo tính chất của hình hộp : $BD \parallel B'D'$, do đó $AC \perp B'D'$.

Chứng minh tương tự ta được

$AB' \perp CD'$, $AD' \perp CB'$.

Hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ vuông góc với nhau khi hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

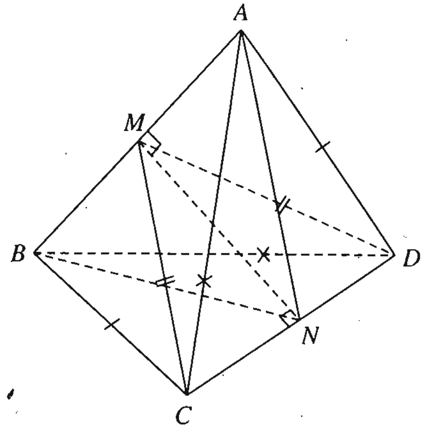


Hình 3.64

3.23. Hai tam giác ABC và BAD bằng nhau (c.c.c) nên có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau :

$CM = DM$ (h.3.65).

Ta có tam giác MCD cân tại M, do đó $MN \perp CD$ vì N là trung điểm của CD. Tương tự ta chứng minh được $NA = NB$ và suy ra $MN \perp AB$. Mặt phẳng (CDM) không vuông góc với mặt phẳng (ABN) vì (CDM) chứa MN vuông góc với chỉ một đường thẳng AB thuộc (ABN) mà thôi.



Hình 3.65

3.24. Vẽ $AH \perp (BCD)$ tại H, ta có $CD \perp AH$ và vì $CD \perp AB$ ta suy ra $CD \perp BH$. Tương tự vì $BD \perp AC$ ta suy ra $BD \perp CH$ (h.3.66).

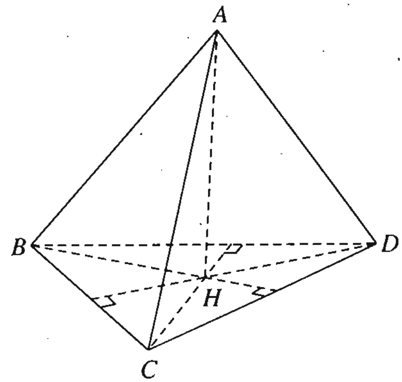
Vậy H là trực tâm của tam giác BCD tức là $DH \perp BC$.

Vì $AH \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp AD$.

Cách khác. Trước hết ta hãy chứng minh hệ thức :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$$

với bốn điểm A, B, C, D bất kì.



Hình 3.66

Thực vậy, ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \quad (3)$$

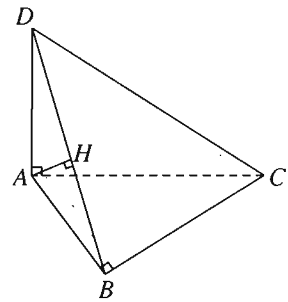
$(1) + (2) + (3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ (4)

Do đó nếu $AB \perp CD$ nghĩa là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, $AC \perp BD$ nghĩa là $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ từ hệ thức (4) ta suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$, do đó $AD \perp BC$.

3.25. Vì $AD \perp (ABC)$ nên $AD \perp BC$. Ngoài ra $BC \perp AB$ nên ta có $BC \perp (ABD)$ (h.3.67).

Vì mặt phẳng (BCD) chứa BC mà $BC \perp (ABD)$ nên ta suy ra mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABD).

Hai mặt phẳng (BCD) và (ABD) vuông góc với nhau và có giao tuyến là BD. Đường thẳng AH thuộc mặt phẳng (ABD) và vuông góc với giao tuyến BD nên AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).



Hình 3.67

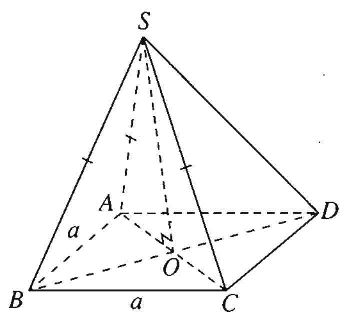
3.26. a) Gọi O là tâm của hình thoi, ta có $AC \perp BD$ tại O (h.3.68).

Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$.

Do đó AC vuông góc với mặt phẳng (SBD).

Ta suy ra mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Ba tam giác SAC, BAC, DAC bằng nhau (c.c.c) nên ta suy ra $OS = OB = OD$. Vậy tam giác SBD vuông tại S.

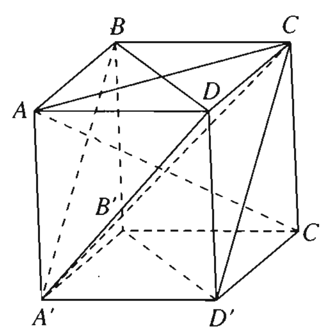


Hình 3.68

3.27. a) Ta có $AB = AD = AA' = a$

và $C'B = C'D = C'A' = a\sqrt{2}$ (h.3.69).

Do đó theo bài 3.21, vì hai điểm A và C' cách đều ba đỉnh của tam giác $A'BD$ nên A và C' thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BDA'. Vậy $AC' \perp (BDA')$. Mặt khác, vì mặt phẳng $(ACC'A')$ chứa đường thẳng AC' mà $AC' \perp (BDA')$ nên ta suy ra mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với mặt phẳng (BDA').



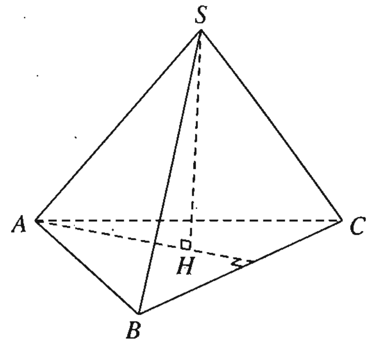
Hình 3.69

b) Ta có ACC' là tam giác vuông có cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và $CC' = a$.

Vậy $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \Rightarrow AC'^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.

Vậy $AC' = a\sqrt{3}$.

3.28. a) Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên ΔABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC$. Do đó khi ta vẽ $SH \perp (ABC)$ thì H là trọng tâm của tam giác đều ABC và ta có $AH \perp BC$. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SA \perp BC$ (h.3.70).



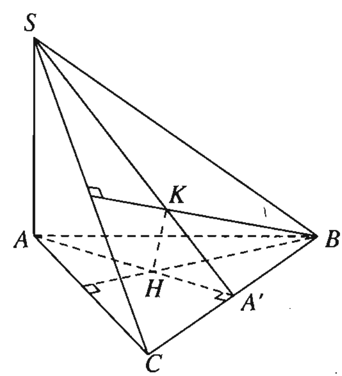
Hình 3.70

Chứng minh tương tự ta có $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

b) Vì $BC \perp AH$ và $BC \perp SH$ nên $BC \perp (SAH)$.

Chứng minh tương tự ta có $CA \perp (SBH)$ và $AB \perp (SCH)$.

3.29. a) Gọi A' là giao điểm của AH và BC. Ta cần chứng minh ba điểm S, K, A' thẳng hàng (h.3.71).



Hình 3.71

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $AA' \perp BC$. Mặt khác theo giả thiết ta có : $SA \perp (ABC)$, do đó $SA \perp BC$. Từ đó ta suy ra $BC \perp (SAA')$ và $BC \perp SA'$. Vậy SA' là đường cao của tam giác SBC nên SA' phải đi qua trực tâm K. Vậy ba đường thẳng AH, SK và BC đồng quy.

b) Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $BK \perp SC$. (1)

Mặt khác ta có $BH \perp AC$ vì H là trực tâm của tam giác ABC và $BH \perp SA$ vì $SA \perp (ABC)$.

Do đó $BH \perp (SAC)$ nên $BH \perp SC$. (2)

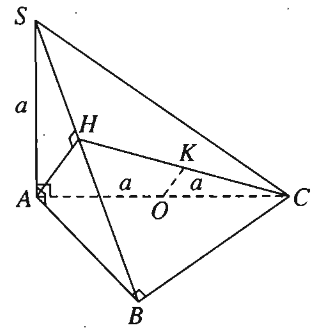
Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (BHK)$. Vì mặt phẳng (SAC) chứa SC mà $SC \perp (BHK)$ nên ta có $(SAC) \perp (BHK)$.

c) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp (SAA'), \text{ do đó } BC \perp HK \\ SC \perp (BHK), \text{ do đó } SC \perp HK \end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

mặt phẳng (BHK) chứa HK mà $HK \perp (SBC)$ nên $(BHK) \perp (SBC)$.

3.30. a) $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ (h.3.72).

b) $AH \perp SB$ mà SB là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc là (SBC) và (SAB) nên $AH \perp (SBC)$.



Hình 3.72

c) Xét tam giác vuông SAB với đường cao AH ta có :

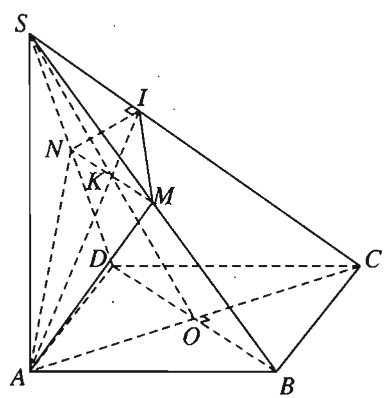
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

Vậy $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

d) Vì $OK \perp (SBC)$ mà $AH \perp (SBC)$ nên $OK \parallel AH$, ta có K thuộc CH.

$$OK = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

3.31. a) Gọi I là giao điểm của mặt phẳng (α) với cạnh SC. Ta có $(\alpha) \perp SC$, $AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI$. Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC. Trong mặt phẳng SAC, đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α).



Hình 3.73

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC).$

$$\Rightarrow BD \perp SC.$$

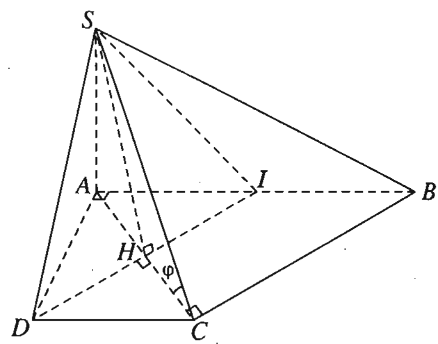
Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Vì $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD \parallel (\alpha)$ (h.3.73).

c) Ta có $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD). Mặt phẳng (SBD) chứa $BD \parallel (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d \parallel BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD). Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD. Ta được thiết diện là tứ giác $AMIN$ có đường chéo AI vuông góc với SC và đường chéo MN song song với BD.

3.32. a) Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ (h.3.74).



Hình 3.74

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Vì $DI \parallel CB$ và $DI \perp AC$ nên $AC \perp CB$. Do đó $CB \perp (SAC)$.

Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Ta có $\varphi = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\left.\begin{array}{l} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DI \perp (SAC)$.

Vậy (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI). Do đó thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều SDI có chiều dài mỗi cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Gọi H là tâm hình vuông $AICD$ ta có $SH \perp DI$ và $SH = \dfrac{DI\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tam giác SDI có diện tích :

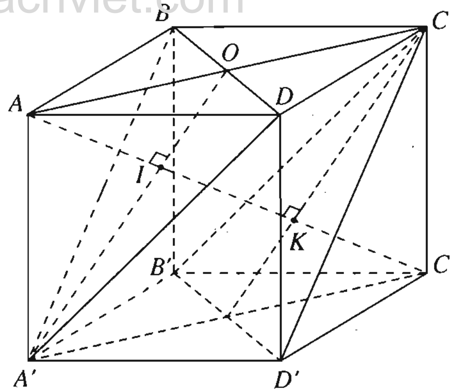
$$S_{\Delta SDI} = \frac{1}{2}\,SH.DI = \frac{1}{2}\,\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

§5. KHOẢNG CÁCH

3.33. Điểm A cách đều ba đỉnh của tam giác đều $A'BD$ vì ta có $AB = AD = AA' = a$, điểm C' cũng cách đều ba đỉnh của tam giác đều đó vì ta có :

$$C'B = C'D = C'A' = a\sqrt{2}.$$

Vậy AC' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$, tức là đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$ tại trọng tâm I của tam giác $A'BD$. Ta cần tìm khoảng cách $A'I$ (h.3.75).



Hình 3.75

Ta có $A'I = BI = DI = \dfrac{2}{3}A'O$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta lại có $A'O = BD\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

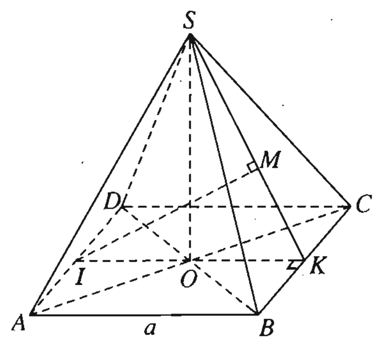
$$= a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy $A'I = \dfrac{2}{3}A'O = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Tương tự điểm C' cách đều ba đỉnh của tam giác đều $CB'D'$, tính được khoảng cách từ C, B', D' tới đường chéo AC'.

3.34. a) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, dễ thấy I, O, K thẳng hàng (h.3.76). Vì K là trung điểm của BC nên $SK \perp BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp SK \\ BC \perp OK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIK).$



Hình 3.76

Do đó $(SBC) \perp (SIK)$.

b) Hai đường thẳng AD và SB chéo nhau. Ta có mặt phẳng (SBC) chứa SB và song song với AD. Do đó khoảng cách giữa AD và SB bằng khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC). Khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SBC).

Theo câu a) ta có $(SIK) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SK và khoảng cách cần tìm là IM, trong đó M là chân đường vuông góc hạ từ I tới SK. Dựa vào hệ thức $IM.SK = SO.IK$, ta có $IM = \dfrac{SO.IK}{SK}\cdot$

Ta lại có : $SK^2 = SB^2 - BK^2 = 2a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow SK = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

và $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 2a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó $IM = \dfrac{SO.IK}{SK} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a : \dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là bằng $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

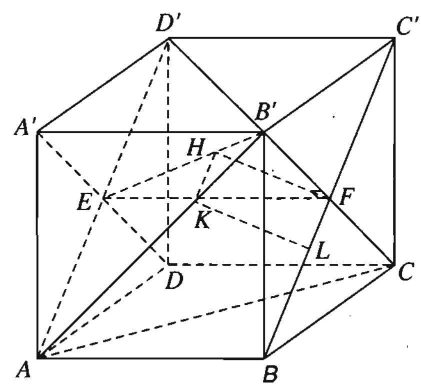
3.35. a) Ta có $B'C \perp BC'$ vì đây là hai đường chéo của hình vuông $BB'C'C$ (h.3.77).

Ngoài ra ta còn có : $A'B' \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'B' \perp BC'$.

Từ đó ta suy ra $BC' \perp (A'B'CD)$ vì mặt phẳng $(A'B'CD)$ chứa đường thẳng $A'B'$ và $B'C$ cùng vuông góc với BC'.

b) Mặt phẳng $(AB'D')$ chứa đường thẳng AB' và song song với BC', ta hãy tìm hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$. Gọi E, F lần lượt là tâm các hình vuông $ADD'A'$, $BCC'B'$. Kẻ $FH \perp EB'$ với $H \in EB'$, khi đó FH nằm trên mặt phẳng $(A'B'CD)$ nên theo câu a) thì $FH \perp BC'$ hay $FH \perp AD'$. Vậy $FH \perp (AB'D')$, do đó hình chiếu BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$ là đường thẳng đi qua H và song song với BC'. Giả sử đường thẳng đó cắt AB' tại K thì từ K vẽ đường thẳng song song với HF cắt BC' tại L. Khi đó KL là đoạn vuông góc chung cần dựng. Tam giác $B'EF$ vuông tại F nên từ công thức $\dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{FE^2} + \dfrac{1}{FB'^2}$ ta tính được

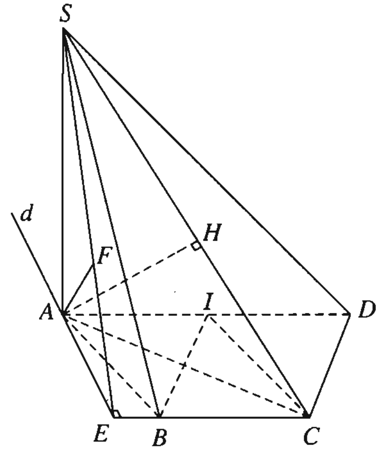
$KL = FH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Hình 3.77

Nhận xét. Độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(AB'D')$ và $(BC'D)$ lần lượt chứa hai đường thẳng đó. Khoảng cách này bằng $\frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3.36. a) Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ nên ta có : $AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = a$, đồng thời $AC \perp CD$, $AB \perp BD$, $AC = BD = a\sqrt{3}$ (h.3.78).



Hình 3.78

Như vậy $\left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AH \perp SC$ tại H ta có $AH \perp CD$ và $AH \perp SC$ nên $AH \perp (SCD)$.

Vậy $AH = d(A, (SCD))$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có AH là đường cao, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$= \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

Vậy $AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $BI \parallel CD$ nên BI song song với mặt phẳng (SCD). Từ đó suy ra $d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$.

Mặt khác AI cắt (SCD) tại D nên

$$d(I, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó : $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$, do đó $d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Dựng $Ad \perp BC$ tại $E \Rightarrow BC \perp (SAE)$.

Dựng $AF \perp SE$ tại F ta có : $\left.\begin{array}{l} AF \perp SE \\ AF \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAE)) \end{array}\right\} \Rightarrow AF \perp (SBC)$.

Vậy $AF = d(A,(SBC)) = d(AD, (SBC))$.

Xét tam giác vuông AEB ta có : $AE = AB \sin\widehat{ABE} = a\sin 60^{\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SAE vuông tại A ta có :

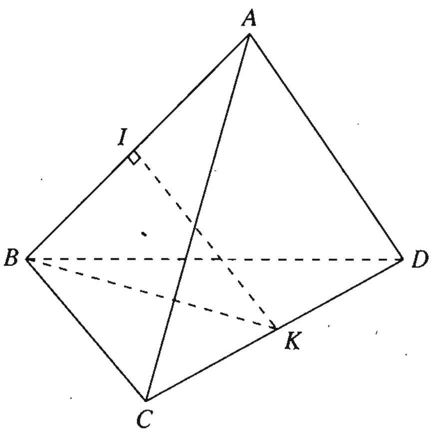
$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{9}{6a^2}.$$

Do đó $AF^2 = \dfrac{6a^2}{9} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(AD, (SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

3.37. Giả thiết cho $ABCD$ là tứ diện đều nên các cặp cạnh đối diện của tứ diện đó có vai trò như nhau. Do đó ta chỉ cần tính khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD là đủ (h.3.79).

Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Dễ thấy IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD nên nó chính là khoảng cách giữa AB và CD.



Hình 3.79

Tam giác BKI vuông tại I. Ta có :

$$IK^2 = BK^2 - BI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3.38. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD (h.3.80), ta có IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD và độ dài đoạn IK là khoảng cách cần tìm :

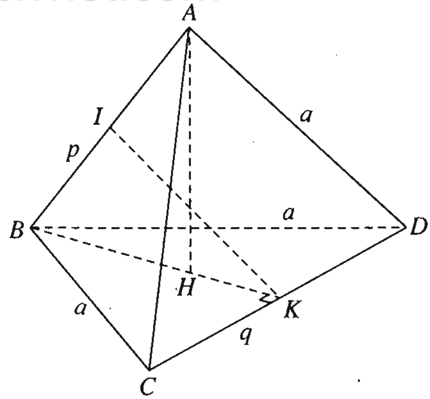
$$IK^2 = BK^2 - BI^2 = BK^2 - \frac{p^2}{4}$$

mà $BK^2 = BC^2 - CK^2 = a^2 - \frac{q^2}{4}$.

Vậy $IK^2 = a^2 - \frac{p^2+q^2}{4}$.

Do đó $IK = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2+q^2)}$

với điều kiện $4a^2 - (p^2 + q^2) > 0$.



Hình 3.80

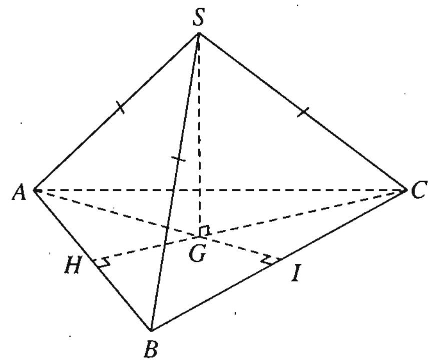
3.39. a) SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên $SG \perp (ABC)$ (h.3.81). Ta có

$$SG^2 = SA^2 - AG^2$$

$$= (2a)^2 - \left[\frac{2}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2$$

$$= 4a^2 - 3a^2 = a^2.$$

Vậy khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC) là độ dài của đoạn $SG = a$.



Hình 3.81

b) Ta có $CG \perp AB$ tại H. Vì GH là đoạn vuông góc chung của AB và SG, do đó $HG = \frac{1}{3}HC$ mà $HC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$ nên $HG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3.40. a) Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$. Theo giả thiết ta có $AI \perp (A'B'C')$ và $\widehat{AA'I} = 60^o$. Ta biết rằng hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách AI (h.3.82).

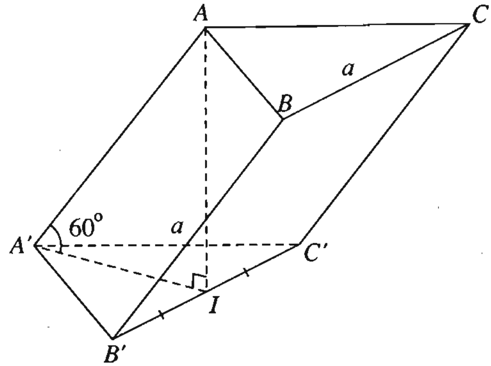
Do đó $AI = AA'.\sin 60^o = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) $\left.\begin{array}{l} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp AI \end{array}\right\} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

$\Rightarrow B'C' \perp AA'$

Mà $AA' \,//\, BB' \,//\, CC'$ nên $B'C' \perp BB'$.

Vậy mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông vì nó là hình thoi có một góc vuông.



Hình 3.82

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.41. a) Đúng b) Đúng c) Sai
d) Sai e) Sai f) Đúng.

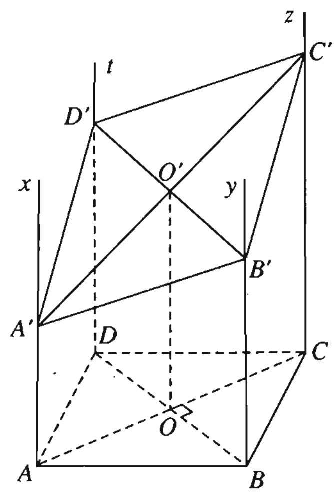
3.42. a) Sai b) Sai
c) Đúng d) Sai.

3.43. a) Ta có hai mặt phẳng song song là :
$(Ax, AD) \,//\, (By, BC)$.

Hai mặt phẳng này bị cắt bởi mặt phẳng (β) nên ta suy ra các giao tuyến của chúng phải song song nghĩa là $A'D' \,//\, B'C'$ (h.3.83).

Tương tự ta chứng minh được $A'B' \,//\, D'C'$. Vậy $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Các hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ đều có OO' là đường trung bình trong đó O là tâm của hình vuông $ABCD$ và O' là tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$. Do đó :

$AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'$.



Hình 3.83

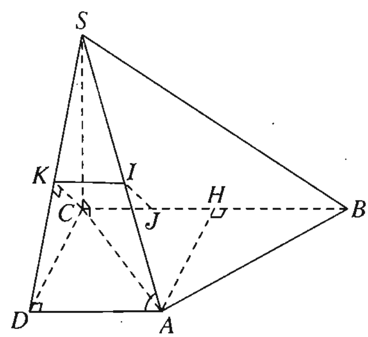
b) Muốn hình bình hành $A'B'C'D'$ là hình thoi ta cần phải có $A'C' \perp B'D'$. Ta đã có $AC \perp BD$. Người ta chứng minh được rằng hình chiếu vuông góc của một góc vuông là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song với mặt phẳng chiếu hay nằm trong mặt chiếu. Vậy $A'B'C'D'$ là hình thoi khi và chỉ khi $A'C'$ hoặc $B'D'$ song song với mặt phẳng (α) cho trước. Khi đó ta có $AA' = CC'$ hoặc $BB' = DD'$.

c) Muốn hình bình hành $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật ta cần có $A'B' \perp B'C'$, nghĩa là $A'B'$ hoặc $B'C'$ phải song song với mặt phẳng (α). Khi đó ta có $AA' = BB'$ hoặc $BB' = CC'$, nghĩa là hình bình hành $A'B'C'D'$ có hai đỉnh kề nhau cách đều mặt phẳng (α) cho trước.

3.44. a) Gọi H là trung điểm của đoạn BC (h.3.84). Qua A vẽ AD song song với BC và bằng đoạn HC thì góc giữa BC và SA là góc $\widehat{SAD}$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $SD \perp DA$ và khi đó :

$$\cos\widehat{SAD} = \frac{AD}{SA} = \frac{HC}{SA} = \frac{\frac{7a}{2}}{7a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy góc giữa BC và SA được xác định sao cho $\cos\widehat{SAD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Hình 3.84

b) Vì $BC \parallel AD$ nên BC song song với mặt phẳng (SAD). Do đó khoảng cách giữa SA và BC chính là khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng (SAD).

Ta kẻ $CK \perp SD$, suy ra $CK \perp (SAD)$, do đó CK chính là khoảng cách nói trên. Xét tam giác vuông SCD với đường cao CK xuất phát từ đỉnh góc vuông C ta có hệ thức :

$$\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CD^2} \Rightarrow \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{(7a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{7a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

(vì $CD = AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$).

Do đó $\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{49a^2} + \frac{4}{3.49a^2} = \frac{3+4}{3.49a^2} = \frac{1}{21a^2}$. Vậy $CK = a\sqrt{21}$.

☞ ***Chú ý.*** Nếu kẻ $KI \parallel AD$ và kẻ $IJ \parallel CK$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

3.45. Giả sử $AB \perp CD$ ta phải chứng minh $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ (h.3.85).

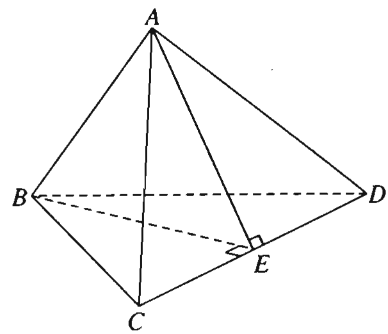
Thật vậy, kẻ $BE \perp CD$ tại E, do $AB \perp CD$ ta suy ra $CD \perp (ABE)$ nên $CD \perp AE$. Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông AEC, BEC, AED và BED ta có :

$$AC^2 = AE^2 + CE^2$$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2$$

$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2.$$



Hình 3.85

Từ đó ta suy ra $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Ngược lại nếu tứ diện $ABCD$ có $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ thì :

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$

Nếu $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = k^2$ thì trong mặt phẳng (ACD) điểm A thuộc đường thẳng vuông góc với CD tại điểm H trên tia ID với I là trung điểm của CD sao cho $IH^2 = \dfrac{k^2}{2CD}$.

Tương tự điểm B thuộc đường thẳng vuông góc với CD cũng tại điểm H nói trên. Từ đó suy ra CD vuông góc với mặt phẳng (ABH) hay $CD \perp AB$.

Nếu $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = -k^2$ thì ta có

$AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2 = k^2$ và đưa về trường hợp xét như trên.

☞ ***Chú ý.*** Từ kết quả của bài toán trên ta suy ra :

Tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

3.46. a) Ta có $AB' \parallel DC'$. Gọi α là góc giữa AB' và BC', khi đó $\alpha = \widehat{DC'B}$ (h.3.86).

Vì tam giác $BC'D$ đều nên $\alpha = 60^o$.

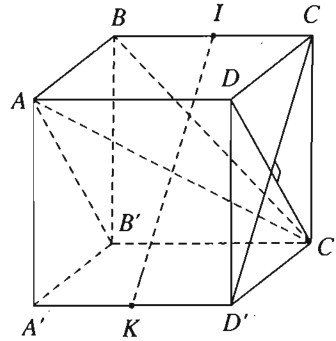
b) Gọi β là góc giữa AC' và CD'.

Vì $CD' \perp C'D$ và $CD' \perp AD$

(do $AD \perp (CDD'C')$),

ta suy ra $CD' \perp (ADC'B')$.

Vậy $CD' \perp AC'$ hay $\beta = 90^o$.



Hình 3.86

☞ ***Chú ý.*** Ta có thể chứng minh $\beta = 90^o$ bằng cách khác như sau :

Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $A'D'$. Ta có $IK \parallel CD'$. Dễ dàng chứng minh được $AIC'K$ là một hình bình hành có bốn cạnh bằng nhau và đó là một hình thoi. Vậy $AC' \perp IK$ hay $AC' \perp CD'$ và $\beta = 90^o$.

3.47. Theo giả thiết ta có M và N là hai điểm di động lần lượt trên hai tia Ax và By sao cho $AM + BN = MN$ (h.3.87).

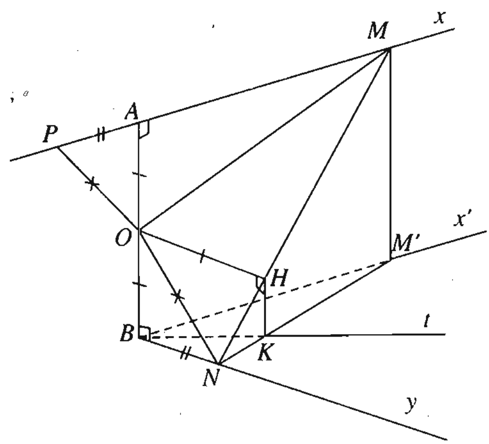
a) Kéo dài MA một đoạn $AP = BN$, ta có $MP = MN$ và $OP = ON$.

Do đó $\Delta OMP = \Delta OMN$ (c. c. c)

$\Rightarrow OA = OH$ nên $OH = a$.

Ta suy ra $HM = AM$ và $HN = BN$.

b) Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Bx', By) ta có :



Hình 3.87

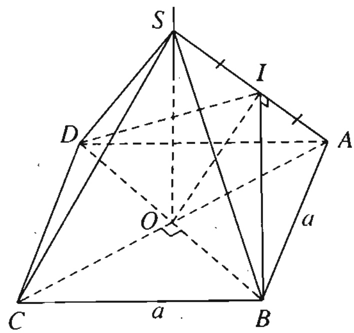
$HK \parallel MM'$ với $K \in NM'$.

Khi đó $\dfrac{KM'}{KN} = \dfrac{HM}{HN} = \dfrac{AM}{BN} = \dfrac{BM'}{BN}$.

Do đó đối với tam giác BNM' đường thẳng BK là phân giác của góc $\widehat{x'By}$.

c) Gọi (β) là mặt phẳng (AB, BK). Vì $HK \parallel AB$ nên HK nằm trong mặt phẳng (β) và do đó H thuộc mặt phẳng (β). Trong mặt phẳng (β) ta có $OH = a$. Vậy điểm H luôn luôn nằm trên đường tròn cố định, đường kính AB và nằm trong mặt phẳng cố định $(\beta) = (AB, BK)$.

3.48. a) Hai tam giác vuông SOB và AOB có cạnh OB chung và $SB = AB = a$ nên chúng bằng nhau. Do đó $SO = OA = OC$ suy ra tam giác SAC vuông tại S (h.3.88).



Hình 3.88

Mặt khác vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn SA.

Vì $BS = BA = a$ nên $BI \perp SA$

Vì $DS = DA = a$ nên $DI \perp SA$. Ta suy ra $\widehat{BID}$ là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). Trong tam giác vuông AOB ta có :

$$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ (vì theo giả thiết } OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}\text{)}.$$

$$\text{Vì } SO = OA \text{ nên } OI = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Như vậy ta suy ra : $OI = OB = OD$ do đó tam giác BID vuông tại I, nghĩa là $(SAB) \perp (SAD)$. Chứng minh tương tự ta có $(SCB) \perp (SCD)$.

c) Khoảng cách giữa SA và BD chính là độ dài đoạn vuông góc chung OI.

Ta có : $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.49. (C) **3.50.** (C) **3.51.** (D) **3.52.** (A)

3.53. (D) **3.54.** (D) **3.55.** (C) **3.56.** (C)

3.57. (A) là mệnh đề đúng còn (B), (C), (D) là mệnh đề sai.

3.58. Mệnh đề đúng : (B); (C); (D). Mệnh đề sai : (A)

3.59. Mệnh đề đúng : (A). Mệnh đề sai : (B), (C), (D).

3.60. (B) **3.61.** (D) **3.62.** (B) **3.63.** (D)

3.64. (B) **3.65.** (A) **3.66.** (B) **3.67.** (B)

3.68. (D) **3.69.** (B).

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

I. ĐỀ BÀI

1. Cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d song song với đoạn thẳng AB. Điểm C chạy trên đường thẳng d. Tìm tập hợp các trọng tâm của tam giác ABC.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số -2 và phép đối xứng qua trục Oy.

3. Tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) với mặt phẳng (ABC).

Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và B. Hình thang có cạnh $AD = 2a$, $AB = BC = a$ và hình chóp có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

a) Chứng minh $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^{\circ}$.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trong một mặt phẳng. Từ đó chứng minh rằng $C'D'$ đi qua một điểm cố định khi đỉnh S di động trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A là Ax.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $AS = a\sqrt{2}$.

5. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và có mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB và K là giao điểm của BI và CM.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (CMF) vuông góc với mặt phẳng (SIB)

b) Tính BK và KF và suy ra tam giác BKF cân tại đỉnh K.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

6. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh $B'D'$ song song với BD và AB' vuông góc với SB.

c) M là một điểm di động trên đoạn BC, gọi K là hình chiếu của S trên DM. Tìm tập hợp các điểm K khi M di động.

d) Đặt $BM = x$. Tính độ dài đoạn SK theo a và x. Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn SK.

7. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đoạn $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với (α). Tính diện tích thiết diện này.

d) Tính góc giữa (α) và $(ABCD)$.

8. Cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD và E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh CE vuông góc với SA và DF vuông góc với SB. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB). Hai mặt phẳng này có vuông góc với nhau không ?

c) Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD).

d) Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu của S trên mặt phẳng (CDM).

9. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với (α).

c) Tính diện tích của thiết diện nói trên.

d) Gọi φ là góc giữa AB và (α). Tính $\sin\varphi$.

10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Trên hai tia Bx và Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho : $BM.DN = \frac{a^2}{2}$.

Đặt $\widehat{BOM} = \alpha, \widehat{DON} = \beta$.

a) Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta = 1$. Kết luận được gì về hai góc α và β?

b) Chứng minh mặt phẳng (ACM) vuông góc với mặt phẳng (CAN).

c) Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Tính OH. Từ đó chứng minh rằng AH vuông góc với HC và mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (CMN).

12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'.

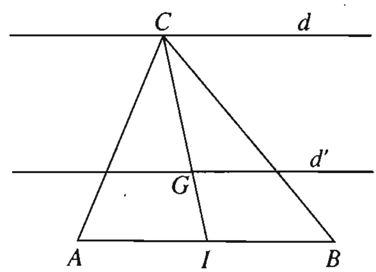
a) Dựng thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFM).

b) Tính $\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (EFM).

c) Tính diện tích của thiết diện dựng được ở câu a).

II. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

1. Gọi I là trung điểm của AB, khi đó I cố định và trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến CI sao cho $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$. Do đó có thể xem G là ảnh của C qua phép vị tự tâm I, tỉ số $\frac{1}{3}$ (h.3.89).



Hình 3.89

2. Qua phép vị tự tâm O tỉ số -2 đường thẳng d biến thành đường thẳng d_1 có phương trình $x + 2y + 4 = 0$. Qua phép đối xứng qua trục Oy đường thẳng d_1 biến thành đường thẳng d' có phương trình $x - 2y - 4 = 0$. Đó là phương trình cần tìm.

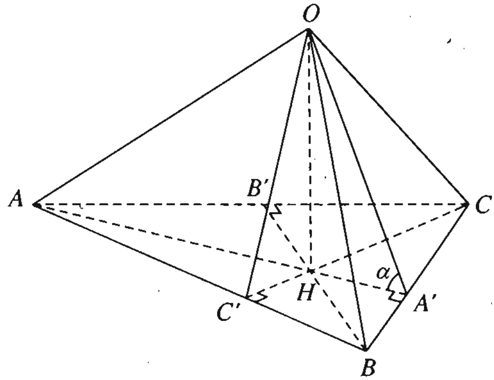
3. *Hướng dẫn :*

Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh O xuống mặt phẳng (ABC) (h.3.90). Ta chứng minh được H là trực tâm của tam giác ABC, nghĩa là chứng minh $AH \perp BC$ tại A', $BH \perp CA$ tại B' và $CH \perp AB$ tại C'.

Từ đó suy ra $\alpha = \widehat{OA'A}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\widehat{OA'A} = \sin\widehat{OAA'}$$

$$= \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{a}.$$



Hình 3.90

Xét tam giác vuông AOA' ta có :

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OA'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{OA'^2}. \qquad (1)$$

Xét tam giác vuông BOC ta có :

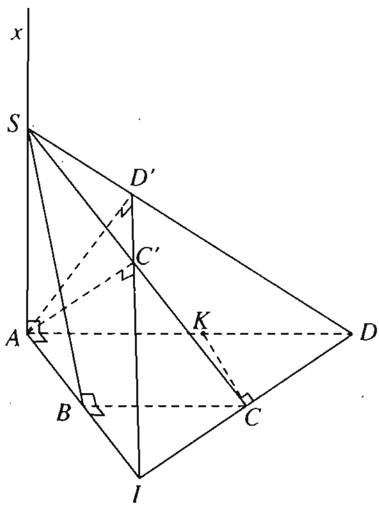
$$\frac{1}{OA'^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

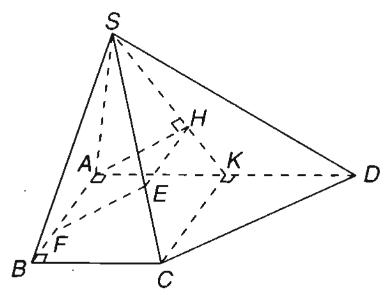
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \text{ hay } \frac{OH^2}{a^2}+\frac{OH^2}{b^2}+\frac{OH^2}{c^2}=1.$$

Vậy $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4. *Hướng dẫn :*



Hình 3.91



Hình 3.92

a) Áp dụng định lí ba đường vuông góc ta chứng minh được $SB \perp BC$ và $SC \perp CD$.

b) Hãy chứng minh AD', AC', AB đều vuông góc với SD, từ đó suy ra AD', AC', AB cùng nằm trong mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với SD. Do đó $C'D'$ đi qua một điểm cố định là giao điểm I của AB và CD khi điểm S di động trên đường thẳng Ax (h.3.91).

c) Gọi K là trung điểm của cạnh AD (h.3.92). Ta có $AB \parallel (SCK)$.

Dựng $AH \perp SK$, $HE \parallel KC$, $EF \parallel HA$.

Ta được EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Ta có $EF = AH$ và $AH.SK = AS.AK$. Suy ra $AH = \dfrac{AS.AK}{SK} = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

($SK^2 = SA^2 + AK^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$).

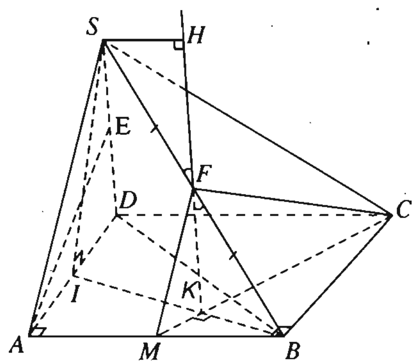
5. *Hướng dẫn :*

a) Chứng minh $CM \perp BI$ (h.3.93) và có $CM \perp SI$, ta suy ra $CM \perp (SIB)$. Mặt phẳng (CMF) chứa đường thẳng CM nên $(CMF) \perp (SIB)$.

b) Xét tam giác vuông BCM ta có :

$$BK.CM = BM.BC \Rightarrow BK = \frac{BM.BC}{CM}.$$

Do đó $BK = \dfrac{\dfrac{a}{2}\cdot a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



Hình 3.93

Xét tam giác vuông SIB, ta có :

$$SB^2 = SI^2 + IB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2.$$

Do đó $SB = a\sqrt{2}$ và $BF = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác BKF, ta có :

$$FK^2 = BF^2 + BK^2 - 2BF.BK.\cos B \text{ với } \cos B = \frac{IB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$FK^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} - 2\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}}\right)$$

$$FK^2 = \frac{7a^2}{10} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{5}\cdot \text{ Do đó } FK = \frac{a\sqrt{5}}{5} = BK.$$

Vậy tam giác BKF có $BK = FK$, nên tam giác BKF là tam giác cân tại K.

c) Mặt phẳng (SCD) chứa CD, trong đó $CD \parallel AB$, do đó $(SCD) \perp (SDA)$ vì $CD \perp (SAD)$.

Trong tam giác SAD ta vẽ $AE \perp SD$ thì đoạn vuông góc chung của SD và AB là AE. Ta có AE là đường cao của tam giác đều SAD nên $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Mặt phẳng (CMF) chứa CM và song song với SA vì $MF \parallel SA$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và CM bằng khoảng cách giữa SA và mặt phẳng song song với SA đồng thời chứa CM. Ta có

$d(SA, CM) = d(SA, (CMF))$

Theo câu a) ta có $(CMF) \perp (SIB)$ với giao tuyến là FK.

Trong mặt phẳng (SIB) dựng $SH \perp FK$ thì $SH \perp (CMF)$.

Do đó $SH = d(SA, CM)$ nghĩa là SH là khoảng cách giữa SA và CM.

$$\text{Ta có } SH = SF.\sin\widehat{SFH} = SF.\sin\widehat{KFB} = SF.\sin\widehat{SBI} = SF\cdot\frac{SI}{SB}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

6. a) Áp dụng tính chất vuông góc của SA với mặt phẳng $(ABCD)$ và định lí ba đường vuông góc, ta chứng minh được các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Dễ chứng minh : $BD \perp (SAC)$, do đó $BD \perp SC$.

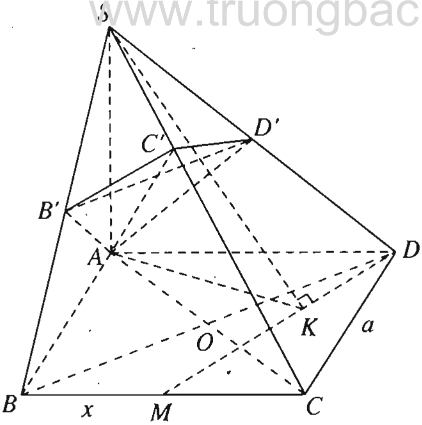
Mặt khác vì $(\alpha) \perp SC$ nên $B'D' \perp SC$.

Như vậy ta có hai đường thẳng BD và $B'D'$ phân biệt nằm trong mặt phẳng (SBD) và cùng vuông góc với SC. Nhưng vì SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD) nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SBD) sẽ vuông góc với BD và $B'D'$. Suy ra $BD \parallel B'D'$.

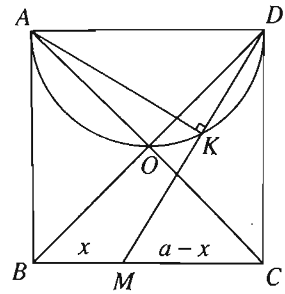
Ta có : $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

$SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AB'$.

Vậy $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$ (h.3.94).



Hình 3.94



Hình 3.95

c) *Phần thuận* : Vì $SK \perp MD$, áp dụng định lí ba đường vuông góc, ta có : $AK \perp DM$ hay $\widehat{AKD} = 90^{\circ}$.

Vậy K nằm trên đường tròn đường kính AD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì DM luôn luôn nằm trong góc $\widehat{BDC}$ nên K nằm trên cung $\overset{\frown}{OD}$ (h.3.95).

Phần đảo : Lấy điểm K bất kì trên cung $\overset{\frown}{OD}$, DK cắt BC tại M. Ta phải chứng minh $SK \perp DM$. Thật vậy, điều đó hiển nhiên vì $AK \perp DM$.

Vậy tập hợp các điểm K khi M di động trên đoạn BC là cung $\overset{\frown}{OD}$.

d) Vì $BM = x$, nên $CM = a - x$, vậy :

$$DM = \sqrt{a^2 + (a-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}.$$

Tam giác AMD có diện tích bằng $\dfrac{a^2}{2}$ nên :

$$AK = \frac{a^2}{DM} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2}}.$$

Ta có : $SK^2 = SA^2 + AK^2$

$$SK^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2 - 2ax + 2a^2} = \frac{a^2(x^2 - 2ax + 3a^2)}{x^2 - 2ax + 2a^2}$$

$$SK = a\sqrt{\frac{x^2-2ax+3a^2}{x^2-2ax+2a^2}}.$$

SK nhỏ nhất khi và chỉ khi AK nhỏ nhất, tức là khi và chỉ khi K trùng O, hay $x = 0$.

Khi đó $SK_{\min} = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$

7. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) được kí hiệu là $d(M, (\alpha))$.

a) Vì BCD là tam giác đều nên $DE \perp BC$ và do đó $OF \perp BC$, ngoài ra $SO \perp BC$ nên $BC \perp (SOF)$.

b) Trong mặt phẳng (SOF) dựng $OH \perp SF$ thì $OH \perp (SBC)$. Trong tam giác vuông SOF, ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}\cdot$$

Vậy $d(O, (SBC)) = \frac{3a}{8}\cdot$

Gọi $I = FO \cap AD$. Trong mặt phẳng (SIF) dựng : $IK \perp SF$.

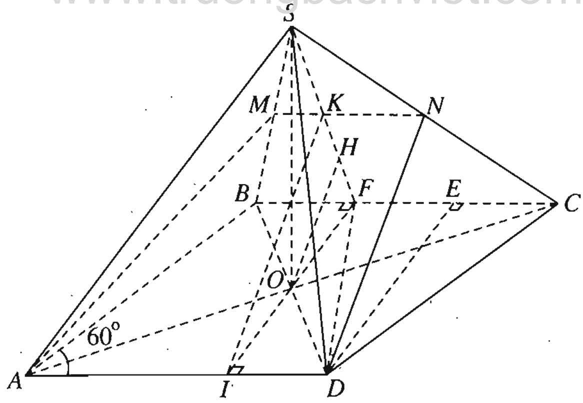
Vì $AD \parallel (SBC)$ nên ta có :

$$d(A, (SBC)) = d(I, (SBC)) = IK = 2OH = \frac{3a}{4}\cdot$$

c) Ta có $IK \perp (SBC)$ nên (α) là mặt phẳng (ADK). Giao tuyến của (α) với (SBC) là $MN \parallel BC$. Ta được thiết diện là hình thang $ADNM$ (h.3.96). Muốn tính MN ta cần tính tỉ số $\frac{SK}{SF}\cdot$ Xét tam giác vuông SOF ta tính được $SF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và xét tam giác vuông SKI ta tính được $SK = \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot$

Do đó $\frac{SK}{SF} = \frac{1}{2}\cdot$ Ta suy ra $MN = \frac{a}{2}\cdot$

$$S_{ADMN} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\cdot\frac{3a}{4} = \frac{9a^2}{16}\cdot$$



Hình 3.96

d) Gọi φ là góc giữa (α) và $(ABCD)$.

Ta có $\varphi = \widehat{KIF}$ và $\cos\varphi = \dfrac{IK}{IF} = \dfrac{\dfrac{3a}{4}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\varphi = 30^{\circ}$.

Ta kí hiệu khoảng cách như trong bài 7.

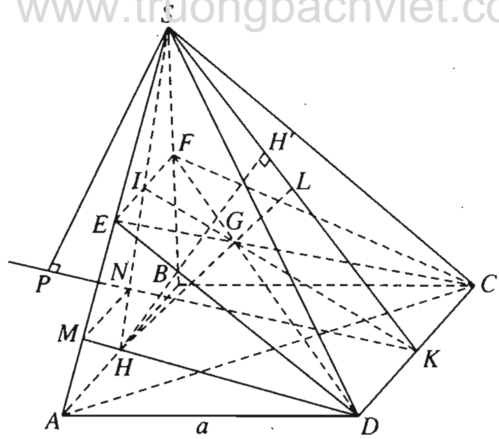
a) Vì $AH \parallel (SDC)$ nên $d(A, (SDC)) = d(H, (SDC))$. Xét tam giác vuông SHK ta tính được : $SK = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Trong (SHK) dựng $HH' \perp SK$ thì $HH' \perp (SCD)$ nên $HH' = d(H, (SDC))$.

$$\text{Ta có : } HH' = \frac{HS.HK}{SK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc $\widehat{HSK}$ (h.3.97)

$$\tan\widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 3.97

b) Ta có $CS = \sqrt{SK^2 + KC^2} = 2a^2 \Rightarrow CS = a\sqrt{2}$.

Do đó $CA = CS = a\sqrt{2}$. Vì E là trung điểm SA nên $CE \perp SA$.

Tương tự ta có : $DF \perp SB$.

Gọi I là giao điểm của EF và SH. Ta có $\widehat{HIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB). Ta hãy xét tan $\widehat{HIK}$:

$$\tan\widehat{HIK} = \frac{HK}{HI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (GEF) không vuông góc với nhau.

c) Ta có KI là trung tuyến của tam giác SHK và KI qua G.

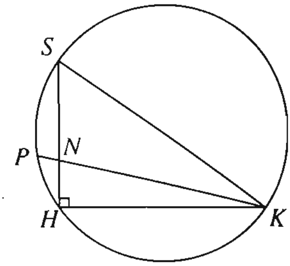
Mặt khác $\frac{GK}{GI} = \frac{CD}{EF} = 2 \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác SHK.

Do đó HG đi qua trung điểm L của SK và $\frac{GL}{HL} = \frac{1}{3}$ mà $d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(G, (SCD)) = \frac{1}{3}d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{21}$.

d) $CD \perp (SHK) \Rightarrow (CDM) \perp (SHK)$. Dựng $MN \,//\, CD$, $N \in SH$, ta được $(CDM) \cap (SHK) = KN$.

Dựng $SP \perp KN$ thì $SP \perp (CDM)$, do đó P là hình chiếu của S trên mặt phẳng (CDM).



Hình 3.98

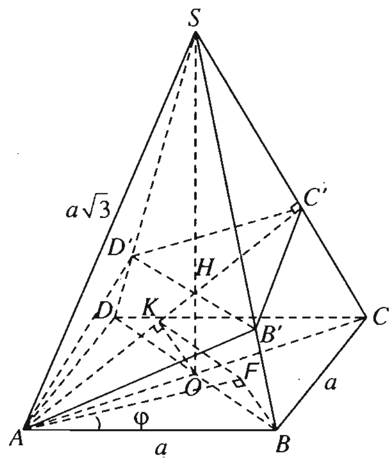
Ta có : $\widehat{SPK} = 1v$. Do đó P thuộc đường tròn đường kính SK trong mặt phẳng (SHK).

Mặt khác ta chú ý rằng vì M di động trên đoạn SA nên N di động trên đoạn SH.

Ta suy ra điểm P chạy trên cung $\overset{\frown}{SH}$.

Chứng minh xong phần đảo ta sẽ tìm được tập hợp các điểm P là cung $\overset{\frown}{SH}$ (h.3.98).

9. a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì SO là khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ (h.3.99).



Hình 3.99

Ta có : $SO^2 = SC^2 - OC^2$

$$= 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

b) Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Trong (SAC) dựng $AC' \perp SC$. AC' cắt SO tại H và cắt SC tại C'. Trong (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Ta có : $B'D' \perp SC$. Vậy $SC \perp$ mp $(AB'C'D')$ và (α) là mặt phẳng $(AB'C'D')$. Thiết diện cần tìm là tứ giác $AB'C'D'$.

c) $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Do đó : $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}AC'.B'D'$

Ta có : $AC' = \dfrac{SO.AC}{SC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}\cdot$

$$SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \frac{5a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SC' = \frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot$$

Từ hai tam giác vuông đồng dạng SOC và $SC'H$ ta có :

$$SH = \frac{SC'.SC}{SO} = \frac{\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\cdot a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{10}}\cdot$$

Vì $B'D'$ // BD nên :

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \frac{4}{5}a\sqrt{2}\,.$$

$$S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{5}a\sqrt{2} = \frac{2a^2\sqrt{10}}{5\sqrt{3}} = \frac{2a^2\sqrt{30}}{15}\cdot$$

d) Gọi φ là góc $(AB, (\alpha))$.

Ta có : $CC' = SC - SC' = a\sqrt{3} - \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

Dựng OK // CC' với $K \in AC'$, thì $OK \perp (\alpha)$ và $OK = \dfrac{1}{2}\ CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\cdot$

Dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OK}$ thì $BF \perp (\alpha)$ và $BF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\cdot$

Ta có góc $(\widehat{AB,(\alpha)}) = \widehat{BAF} = \varphi$

$$\sin\widehat{BAF} = \frac{BF}{BA} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot$$

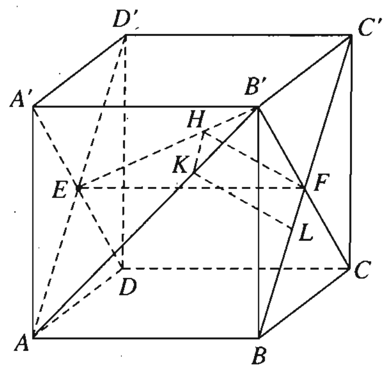
10. a) Ta có : $B'C \perp BC'$ (đường chéo hình vuông). Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên : $A'B' \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'B' \perp BC'$.

Suy ra : $BC' \perp (A'B'CD)$.

b) Mặt phẳng $(AB'D')$ chứa AB' và song song với BC'. Ta hãy tìm hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$. Gọi E, F lần lượt là tâm hình vuông $ADD'A'$, $BCC'B'$. Kẻ $FH \perp EB'$ ($H \in EB'$). Khi đó FH nằm trên mặt phẳng $(A'B'CD)$ nên theo câu a) $FH \perp BC'$ hay $FH \perp AD'$. Vậy $FH \perp (AB'D')$. Do đó hình chiếu của BC' trên mp $(AB'D')$ là đường thẳng đi qua H và song song với BC'. Nếu đường thẳng đó cắt AB' tại K, thì từ K vẽ đường thẳng song song với HF, cắt BC' tại L. Khi đó KL là đoạn vuông góc chung cần dựng.

Từ công thức : $\dfrac{1}{FH^2} = \dfrac{1}{FE^2} + \dfrac{1}{FB'^2}$ ta tính được

$KL = FH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (h.3.100).



Hình 3.100

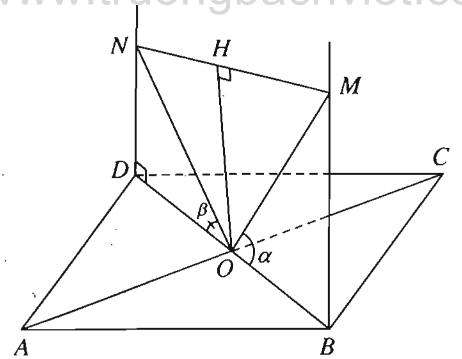
11. a) $\tan\alpha = \dfrac{BM}{OB}$, $\tan\beta = \dfrac{DN}{OD}$

$OB = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Theo giả thiết $BM.DN = \dfrac{a^2}{2}$ nên ta có : $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{BM.DN}{OB.OD} = 1$.

Do đó $\tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^o$

b) Rõ ràng rằng $AC \perp (Bx, Dy)$ nên $OM \perp AC$ và $ON \perp AC$ (h.3.101).



Hình 3.101

Vậy góc $\widehat{MON}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và (ACN).

Trong (Bx, Dy), ta có : $\widehat{MON} = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) = 90^{\circ}$.

Do đó : $(ACM) \perp (ACN)$.

c) Ta có : $OM = \dfrac{OB}{\cos\alpha}$, $ON = \dfrac{OD}{\cos\beta}$. Vì OH là đường cao trong tam giác vuông MON nên :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{OB^2} = \frac{1}{OB^2}.$$

Vậy $OH = OB$.

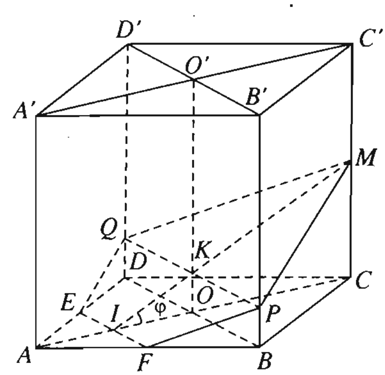
Ta suy ra $OH = OA = OC$. Do đó $\widehat{AHC} = 90^{\circ}$, hay $AH \perp HC$.

Vì $MN \perp OH$ và $MN \perp AC$ nên $MN \perp (AHC)$. Do đó $\widehat{AHC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

Từ đó ta suy ra : $(AMN) \perp (CMN)$.

12. a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, IM cắt OO' tại K (I là trung điểm của EF).

Đường thẳng qua K song song với BD cắt BB' và DD' tại P và Q. Thiết diện là ngũ giác $EFPMQ$ (h.3.102).



Hình 3.102

b) Ta có $\varphi = \widehat{MIC}$.

$$\tan\varphi = \frac{CM}{IC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

c) Gọi S là diện tích thiết diện $EFPMQ$ và S' là diện tích hình chiếu $EFBCD$ của thiết diện xuống mặt phẳng $(ABCD)$. Ta tính được $S' = \frac{7a^2}{8}$.

Ta có : $S = \frac{S'}{\cos\varphi} = \frac{7a^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{7\sqrt{11}}{24} \cdot a^2$.

MỤC LỤC

Trang

Chương I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **ĐẶNG THỊ BÌNH – HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**
Biên tập tái bản : **ĐẶNG THỊ BÌNH**
Biên tập kĩ – mĩ thuật : **BÙI NGỌC LAN**
Trình bày bìa : **HOÀNG PHƯƠNG LIÊN**
Sửa bản in : **PHÒNG SỬA BẢN IN** (NXBGD TẠI TP. HCM)
Chế bản : **PHÒNG SẮP CHỮ ĐIỆN TỬ** (NXBGD TẠI TP. HCM)

BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
Mã số : CB104T0

In 20.000 cuốn, (QĐ19BT) khổ 17 x 24 cm, in tại Công ty TNHH In Thanh Bình.
Số in 02. Số xuất bản: 01-2010/CXB/479-1485/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2010.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

QUALITY CROWN
LONDON
QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH BÀI TẬP LỚP 11

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 11
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 11
5. BÀI TẬP SINH HỌC 11
6. BÀI TẬP ĐỊA LÍ 11
7. BÀI TẬP TIN HỌC 11
8. BÀI TẬP NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
9. BÀI TẬP LỊCH SỬ 11
10. BÀI TẬP TIẾNG ANH 11
11. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 11
12. BÀI TẬP TIẾNG NGA 11

SÁCH BÀI TẬP LỚP 11 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
- BÀI TẬP VẬT LÍ 11
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 11
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 11

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– **Tại TP. Hà Nội** : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ;
23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã.
– **Tại TP. Đà Nẵng** : 15 Nguyễn Chí Thanh ; 78 Pasteur.
– **Tại TP. Hồ Chí Minh** : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ; 5 Bình Thới, Quận 11 ;
231 Nguyễn Văn Cừ và 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.
– **Tại TP. Cần Thơ** : 5/5 đường 30 tháng 4, Quận Ninh Kiều.

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 004791

Giá: 8.900đ