VŨ TUẤN (Chủ biên) - LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG - NGUYỄN THU NGA
PHẠM PHU - NGUYỄN TIẾN TÀI - CẤN VĂN TUẤT

BÀI TẬP
GIẢI TÍCH
12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

§1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$. Thế thì :

a) $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

$f'(x) < 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

b) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b) \Rightarrow f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b)$.

$f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b) \Rightarrow f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b)$.

Khoảng $(a\ ;\ b)$ được gọi chung là khoảng đơn điệu của hàm số.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau :

a) $y = x^4 + 8x^3 + 5$; b) $y = \sqrt{x}(x-3),\ (x > 0)$;

c) $y = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$.

Giải

a) $y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x+6)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-427	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -6)$, đồng biến trên khoảng $(-6 ; +\infty)$.

b) $y = \sqrt{x}(x-3)$, $(x \geq 0)$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}(x-1)}{2x};$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'	$\|$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0 ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{-x^2+4x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{7} \\ x = 2+\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$y(2-\sqrt{7})$	$\nearrow$	$y(2+\sqrt{7})$	$\searrow$	0

BT-GT 12 (Tay so: 1 - Mat in: A - Mau in: K)

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2-\sqrt{7}\,;\,2+\sqrt{7}\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty\,;\,2-\sqrt{7}\right)$, $\left(2+\sqrt{7}\,;\,+\infty\right)$.

• ***Ví dụ 2***

Sử dụng tính đồng biến và nghịch biến của hàm số, chứng minh rằng với mọi $x>0$ ta có $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$.

Giải

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0\,;\,+\infty)$, ta có

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } x>0\text{)}.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f(1)=2$ và $f(x)>2$ với mọi $0<x\ne 1$.

Vậy $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ với mọi $x>0$.

C. BÀI TẬP

1.1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y=3x^2-8x^3$;

b) $y=16x+2x^2-\dfrac{16}{3}x^3-x^4$;

c) $y=x^3-6x^2+9x$;

d) $y=x^4+8x^2+5$.

1.2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = \dfrac{3 - 2x}{x + 7}$;

b) $y = \dfrac{1}{(x - 5)^2}$;

c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$;

d) $y = \dfrac{x^4 + 48}{x}$;

e) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$;

g) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x - 2}$.

1.3. Xét tính đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \sqrt{25 - x^2}$;

b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 100}$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$;

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$.

1.4. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = x - \sin x,\ x \in [0\ ;\ 2\pi]$;

b) $y = x + 2\cos x,\ x \in \left(\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$;

c) $y = \sin\dfrac{1}{x}\ (x > 0)$.

1.5. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > \sin x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$ với $0 < x < +\infty$.

1.6. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + c = 0$ không thể có hai nghiệm thực trong đoạn $[0\ ;\ 1]$.

1.7. Xác định giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên toàn trục số.

§2. Cực trị của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$ và $x_0 \in (a\,;b)$.

1. Định lí 1

a) $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h\,;x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0\,;x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.

b) $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h\,;x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0\,;x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

2. Định lí 2

a) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

b) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 8x^3 + 432$; b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$;

c) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$.

Giải

a) Hàm số đã cho xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$;

$$y' = 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(x - 6); \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $x = 6$ là điểm cực tiểu và $y_{CT} = y(6) = 0$.

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$.

$$y' = \frac{(4x+1)(x+1) - \left(2x^2 + x + 1\right)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

$y_{CĐ} = y(-2) = -7$ và $y_{CT} = y(0) = 1$.

c) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$.

Hàm số xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$$y' = -3x^2 + 12x + 15 = -3\left(x^2 - 4x - 5\right).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Mặt khác, $y'' = -6x + 12.$

$$y''(-1) = 18 > 0,\ y''(5) = -18 < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, đạt cực đại tại $x = 5$ và

$$y_{CT} = y(-1) = 2,\ y_{CĐ} = y(5) = 110.$$

• ***Ví dụ 2***

Chứng minh rằng hàm số

$$y = x^3 + mx^2 - \left(1 + n^2\right)x - 5(n + m)$$

luôn luôn có cực trị với mọi giá trị của m và n.

Giải

Hàm số xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

Ta có

$$y' = 3x^2 + 2mx - \left(1 + n^2\right).$$

Xét phương trình $y' = 0$, ta có $\Delta' = m^2 + 3\left(1 + n^2\right) > 0$, với mọi $n, m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2, giả sử $x_1 < x_2$; y' đổi dấu khi x đi qua hai nghiệm.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi m, n.

• *Ví dụ 3*

a) Cho hàm số $u(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $u(x) \neq 0$, $\forall x \in (a\ ;\ b)$. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u^2(x)}}.$$

b) Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-5).$$

Giải

a) Xét hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, ta chứng minh công thức

$$y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Giả sử Δx là số gia của x. Ta có

$\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}\ ;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$y' = \left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}.$$

b) Theo câu a), đạo hàm của $f(x)$ là

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$f'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và triệt tiêu tại $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ $\left(f_{CĐ} = 0\right)$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$ $\left(f_{CT} = -3\sqrt[3]{4}\right)$.

C. BÀI TẬP

1.8. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = -2x^2 + 7x - 5$;

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$;

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

d) $y = (x+1)^3(5-x)$;

e) $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

1.9. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$;

b) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$;

c) $y = \dfrac{x^2+x-5}{x+1}$;

d) $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$.

1.10. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$;

b) $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$;

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$.

1.11. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = \sin 2x$;

b) $y = \cos x - \sin x$;

c) $y = \sin^2 x$.

1.12. Xác định m để hàm số

$$y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$$

có cực trị tại $x = 1$. Khi đó, hàm số đạt cực tiểu hay đạt cực đại ? Tính cực trị tương ứng.

1.13. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực đại tại điểm đó.

1.14. Xác định m để hàm số sau không có cực trị

$$y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}.$$

§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên một đoạn

ĐỊNH LÍ

$y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b] \Rightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a\,;\,b]} f(x)$, $\min\limits_{[a\,;\,b]} f(x)$.

Cách tìm

- Tìm $x_i \in [a\,;\,b]$ $(i = 1\,;\,2\,;\,...\,;\,n)$ tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Tính $f(a), f(b), f(x_i)$, $(i = 1\,;\,2\,;\,...\,;\,n)$.
- Tìm $GTLN = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)\}$;

  $GTNN = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)\}$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một khoảng

$y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$, ta xét hai trường hợp :

x	a		x_0		b
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$	GTNN	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	GTLN	$\searrow$	

(trong đó $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0).

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số sau trên đoạn $[-3\ ;\ 3]$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10.$$

Giải

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3\ ;\ 3]$,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Tính $\quad f(-3) = -35\ ;\ f(3) = 1\ ;\quad f(-1) = 17\ ;\ f(2) = -10.$

Từ đó

$$\max_{[-3\ ;\ 3]} f(x) = f(-1) = 17,$$

$$\min_{[-3\ ;\ 3]} f(x) = f(-3) = -35.$$

• ***Ví dụ 2***

Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

Giải

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. Khi đó, $V = \pi r^2 h$.

Vì $\quad r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$ nên $\quad V = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 h - \dfrac{h^3}{4}\right)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right),\ h \in (0\,;2R).$$

Ta có $\quad V'(h) = \pi\left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right)$;

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên

h	0		$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

$$\max_{(0\,;\,2R)} V = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, thể tích hình trụ là $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

C. BÀI TẬP

1.15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 8$ trên đoạn $[0 ; 1]$;

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4 ; 3]$;

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ trên đoạn $[-4 ; 4]$;

d) $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ trên đoạn $[-10 ; 10]$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$;

g) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0 ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1.16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x}{4 + x^2}$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$;

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

c) $y = \dfrac{1}{1 + x^4}$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$;

d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0 ; \pi)$.

1.17. Cho số dương m. Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

1.18. Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

1.19. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

1.20. Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$).

§4. Đường tiệm cận

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Kí hiệu (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

1. Đường tiệm cận đứng

Nếu một trong các điều kiện

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$

thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (C).

2. Đường tiệm cận ngang

Nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của (C).

B. BÀI TẬP

1.21. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $y = \dfrac{3-2x}{3x+1}$; c) $y = \dfrac{5}{2-3x}$; d) $y = \dfrac{-4}{x+1}$.

1.22. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị mỗi hàm số sau :

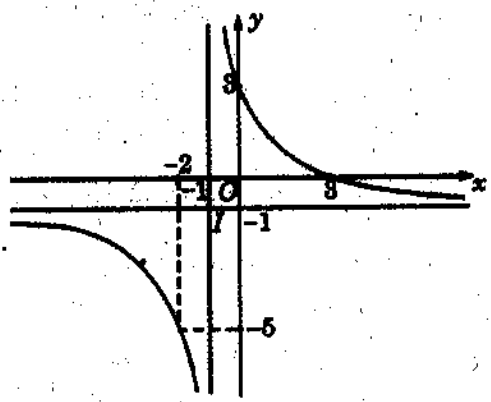
a) $y = \dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$; b) $y = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$;

c) $y = \dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$; d) $y = \dfrac{2-x}{x^2-4x+3}$.

1.23. a) Cho hàm số $y = \dfrac{3-x}{x+1}$ có đồ thị $(\mathcal{H})$ (H.1).

Chỉ ra một phép biến hình biến $(\mathcal{H})$ thành $(\mathcal{H}')$ có tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

b) Lấy đối xứng $(\mathcal{H}')$ qua gốc O, ta được hình $(\mathcal{H}'')$. Viết phương trình của $(\mathcal{H}'')$.



Hình 1

§5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ $y = f(x)$.

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên

a) Chiều biến thiên

• Tính y'.

• Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định.

• Xét dấu y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

b) Tìm cực trị.

c) Tìm các giới hạn vô cực ; các giới hạn tại $+\infty$, $-\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định. Tìm các tiệm cận đứng và ngang (nếu có).

d) Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

➤ **Chú ý**

1) Nếu hàm số là tuần hoàn với chu kì T thì chỉ cần vẽ đồ thị trên một chu kì rồi tịnh tiến đồ thị song song với Ox.

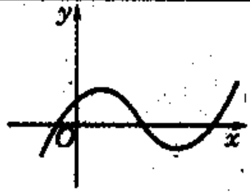
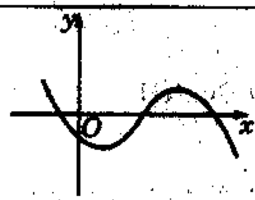
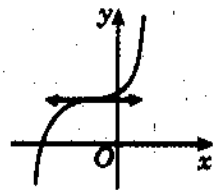
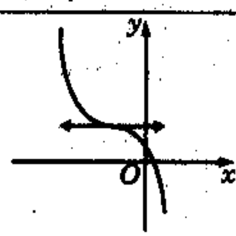
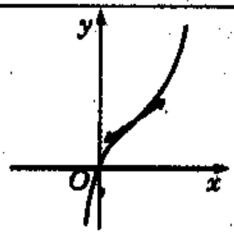
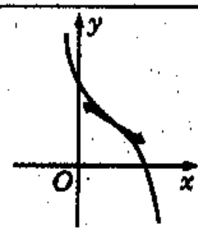
2) Để vẽ đồ thị thêm chính xác, ta cần :

• Tính thêm toạ độ một số điểm, đặc biệt nên tính các giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ.

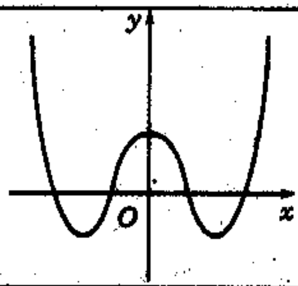
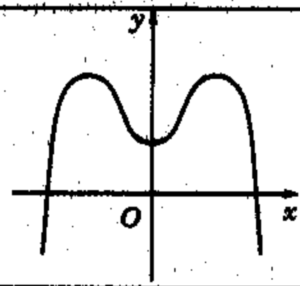
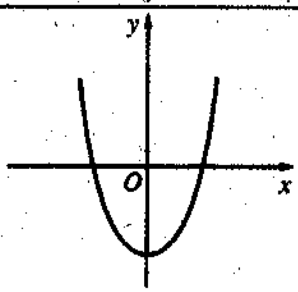
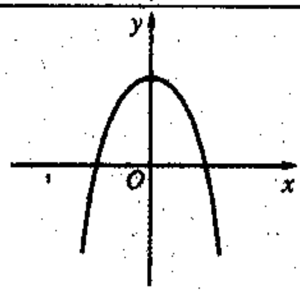
• Lưu ý tính chất đối xứng (qua trục, qua tâm, ...) của đồ thị.

II – KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM SỐ ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC

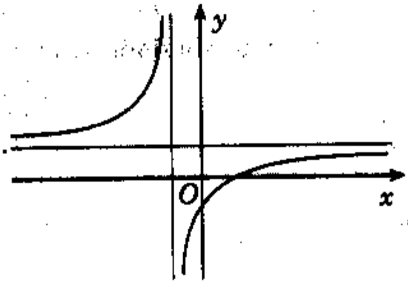
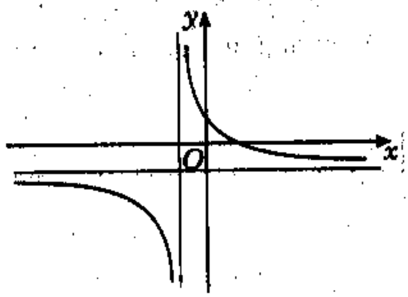
Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

Dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

Dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

III – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

1. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

Giả sử (C_1) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2).

2. Viết phương trình tiếp tuyến

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) và $M_0(x_0\,;\,f(x_0)) \in (C)$; $f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

a) Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = -2x + 2$. (d)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng

$$y = -\frac{5}{3}x - 1. \qquad (d')$$

Giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Các điểm cực trị của (C) là $M_1(0\,;4)$ và $M_2(2\,;0)$.

Parabol (P) đi qua M_1 và M_2 có dạng

$$y = ax^2 - 2(1+a)x + 4 \ (a \neq 0).$$

Điều kiện để parabol (P) tiếp xúc với (d) là hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax^2 - 2(1+a)x + 4 = -2x + 2 \\ 2ax - 2(1+a) = -2 \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

Giải hệ trên, ta được $a = 2,\ x = 1$.

Parabol (P) phải tìm có phương trình là $y = 2x^2 - 6x + 4$.

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với (d') là $y = -\frac{5}{3}(x - x_0) + y_0$.

Giải phương trình $3x^2 - 6x = -\frac{5}{3}$, ta được $x = \frac{5}{3}$ và $x = \frac{1}{3}$. Từ đó hai phương trình tiếp tuyến phải tìm là $y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{3}\right) + \frac{8}{27}$ và $y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{100}{27}$.

• *Ví dụ 2*

Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2-2x-3}{x-3}=x+m.$$

Giải

Ta có

$$\frac{2x^2-2x-3}{x-3}=x+m \Leftrightarrow x^2+(1-m)x-3(1-m)=0 \ (x\neq 3). \quad (*)$$

Ta có $9+3(1-m)-3(1-m)\neq 0$ nên $x\neq 3$,

$$\Delta=(1-m)^2+12(1-m)=(m-1)(m-13).$$

Từ đó ta có

$m>13$ hoặc $m<1 \Rightarrow \Delta>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm.

$m=1$ hoặc $m=13 \Rightarrow \Delta=0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm.

$1<m<13 \Rightarrow \Delta<0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

C. BÀI TẬP

1.24. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y=x^2-4x+3$; b) $y=2-3x-x^2$;

c) $y=2x^3-3x^2-2$; d) $y=x^3-x^2+x$;

e) $y=\dfrac{x^4}{2}-x^2+1$.

1.25. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$; b) $y=\dfrac{2x-1}{3x+2}$; c) $y=\dfrac{2-x}{2x-1}$.

1.26. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y=-x^3+3x+1.$$

b) Chỉ ra phép biến hình biến (C) thành đồ thị (C') của hàm số

$$y = (x+1)^3 - 3x - 4.$$

c) Dựa vào đồ thị (C'), biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$(x+1)^3 = 3x + m.$$

d) Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C'), biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{x}{9} + 1$.

1.27. Cho hàm số

$$y = \frac{4-x}{2x+3m}.$$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số.

b) Chứng minh rằng với mọi m, tiệm cận ngang của đồ thị (C_m) của hàm số đã cho luôn đi qua điểm $B\left(-\dfrac{7}{4}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Biện luận theo m số giao điểm của (C_m) và đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

d) Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \left|\frac{4-x}{2x+3}\right|.$$

1.28. Biện luận theo k số nghiệm của phương trình :

a) $(x-1)^2 = 2\,|\,x-k\,|$; b) $(x+1)^2(2-x) = k$.

1.29. Cho hàm số

$$y = x^3 - (m+4)x^2 - 4x + m. \qquad (1)$$

a) Tìm các điểm mà đồ thị của hàm số (1) đi qua với mọi giá trị của m.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đồ thị của hàm số (1) luôn luôn có cực trị.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của (1) khi $m = 0$.

d) Xác định k để (C) cắt đường thẳng $y = kx$ tại ba điểm phân biệt.

1.30. Cho hàm số

$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của nó với trục Ox.

c) Biện luận theo k số giao điểm của (C) với đồ thị (P) của hàm số

$$y = k - 2x^2.$$

1.31. Cho hàm số

$$y = x^4 + mx^2 - m - 5.$$

a) Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C_{-2}) (ứng với $m = -2$) song song với đường thẳng $y = 24x - 1$.

Bài tập ôn chương I

1.32. Cho hàm số

$$y = 4x^3 + mx \qquad (1)$$

(m là tham số).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $m = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 13x + 1$.

c) Xét sự biến thiên của hàm số (1) tuỳ thuộc giá trị của m.

1.33. Cho hàm số

$$y = x^3 + mx^2 - 3. \qquad (1)$$

a) Xác định m để hàm số (1) luôn luôn có cực đại, cực tiểu.

b) Chứng minh rằng phương trình

$$x^3 + mx^2 - 3 = 0 \qquad (2)$$

luôn luôn có một nghiệm dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

c) Xác định m để phương trình (2) có một nghiệm duy nhất.

1.34. Cho hàm số

$$y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5.$$

a) Xác định m để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Tại sao ?

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$?

1.35. Cho hàm số $y = \dfrac{(a-1)x^3}{3} + ax^2 + (3a-2)x$.

a) Xác định a để hàm số luôn luôn đồng biến.

b) Xác định a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $a = \dfrac{3}{2}$.

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số

$$y = \left|\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right|.$$

1.36. Cho hàm số

$$y = f(x) = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

1.37. Cho hàm số $y = \dfrac{3(x+1)}{x-2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết phương trình các đường thẳng đi qua $O(0\,;\,0)$ và tiếp xúc với (C).

c) Tìm tất cả các điểm trên (C) có toạ độ là các số nguyên.

1.38. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x+2}{x-3}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai tiệm cận của (C) là tâm đối xứng của (C).

c) Tìm điểm M trên đồ thị của hàm số sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

1.39. Chứng minh rằng phương trình $3x^5 + 15x - 8 = 0$ chỉ có một nghiệm thực.

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng (các bài 1, 2,..., 6) :

1. Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng :

(A) $(-\infty ; 0)$; (B) $(1 ; +\infty)$; (C) $(-3 ; 4)$; (D) $(-\infty ; 1)$.

2. Với giá trị nào của m, hàm số

$$y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2 - x}$$

nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó ?

(A) $m = -1$; (B) $m > 1$; (C) $m \in (-1 ; 1)$; (D) $m \leq -\frac{5}{2}$.

3. Các điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 + 3x^2 + 2$ là :

(A) $x = -1$; (B) $x = 5$; (C) $x = 0$; (D) $x = 1, x = 2$.

4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là :

(A) 3 ; (B) 2 ; (C) -5 ; (D) 10.

5. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$.

(A) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định ;

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;+\infty)$;

(C) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định ;

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;+\infty)$.

6. Toạ độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$ và $y = x+1$ là :

(A) $(2\,;2)$; (B) $(2\,;-3)$; (C) $(-1\,;0)$; (D) $(3\,;1)$.

7. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-3)(x^2+x+4)$ với trục hoành là :

(A) 2 ; (B) 3 ; (C) 0 ; (D) 1.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG I

§1.

1.1. a) $y = 3x^2 - 8x^3$. TXĐ(*) : $\mathbb{R}$.

$$y' = 6x - 24x^2 = 6x(1-4x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

$y' > 0$ trên khoảng $\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$, suy ra y đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

$y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty\,;0)$, $\left(\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right)$, suy ra y nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;0)$; $\left(\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right)$.

b) $y = 16x + 2x^2 - \dfrac{16}{3}x^3 - x^4$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = 16 + 4x - 16x^2 - 4x^3 = -4(x+4)(x^2-1).$$

(*) *Tập xác định* viết tắt là TXĐ.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \\ x = \ \ 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số y đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -4)$ và $(-1 ; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-4 ; -1)$ và $(1 ; +\infty)$.

c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 12x + 9,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$y' > 0$ trên các khoảng $(-\infty ; 1)$, $(3 ; +\infty)$ nên y đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 1)$, $(3 ; +\infty)$.

$y' < 0$ trên khoảng $(1 ; 3)$ nên y nghịch biến trên khoảng $(1 ; 3)$.

d) $y = x^4 + 8x^2 + 5$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2 + 4)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0$ trên khoảng $(0 ; +\infty) \Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

$y' < 0$ trên khoảng $(-\infty ; 0) \Rightarrow y$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

1.2 a) $y = \dfrac{3 - 2x}{x + 7}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

$$y' = \frac{-17}{(x + 7)^2}.$$

$y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty ; -7)$, $(-7 ; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

b) $y = \dfrac{1}{(x - 5)^2}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

$$y' = \frac{-2}{(x - 5)^3}.$$

$y' < 0$ trên khoảng $(5 ; +\infty)$ nên y nghịch biến trên khoảng $(5 ; +\infty)$.

$y' > 0$ trên khoảng $(-\infty ; 5)$ nên y đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 5)$.

c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$. TXĐ : $\mathbb{R}\backslash\{-3 ; 3\}$.

$$y' = \frac{-2\left(x^2 + 9\right)}{\left(x^2 - 9\right)^2}.$$

$y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty ; -3)$, $(-3 ; 3)$, $(3 ; +\infty)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng đó.

d) $y = \dfrac{x^4 + 48}{x}$. TXĐ : $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$y' = \frac{3(x^4 - 16)}{x^2} = \frac{3(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2}, \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-32	↘	$-\infty \;\|\; +\infty$	↘	32	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -2)$, $(2 ; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2 ; 0)$, $(0 ; 2)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$. TXĐ : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}, \; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{6} \\ x = -1 + \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{6}$		-1		$-1 + \sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-4 - 2\sqrt{6}$	↘	$-\infty \;\|\; +\infty$	↘	$2\sqrt{6} - 4$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1 - \sqrt{6})$, $(-1 + \sqrt{6} ; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-1 - \sqrt{6} ; -1)$, $(-1 ; -1 + \sqrt{6})$.

g) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x - 2}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2} > 0 \text{ (do } x^2 - 4x + 7 \text{ có } \Delta' = -3 < 0).$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; 2)$, $(2 ; +\infty)$.

1.3. a) $y = \sqrt{25 - x^2}$. TXĐ : $[-5 ; 5]$.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	-5		0		5	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y		0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5 ; 0)$, nghịch biến trên khoảng $(0 ; 5)$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 100}$. TXĐ : $[0 ; +\infty)$.

$$y' = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x + 100)^2} ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100.$$

x	$-\infty$	0		100		$+\infty$
y'			$+$	0	$-$	
y		0	$\nearrow$	$\frac{1}{20}$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100 ; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$. TXĐ : $(-4 ; 4)$.

$$y' = \frac{16}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}} > 0, \; \forall x \in (-4 ; 4).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-4 ; 4)$.

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$. TXĐ : $(-\infty\,;-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}\,;+\infty)$.

$$y' = \frac{2x^2(x^2-9)}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}}\,;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-9\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$9\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;-3)$, $(3\,;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3\,;-\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}\,;3)$.

1.4. a) $y = x - \sin x,\ x \in [0\,;2\pi]$.

$y' = 1 - \cos x \ge 0$ với mọi $x \in [0\,;2\pi]$.

Dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$ và $x = 2\pi$.

Vậy hàm số đồng biến trên đoạn $[0\,;2\pi]$.

b) $y = x + 2\cos x,\ x \in \left(\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$y' = 1 - 2\sin x < 0$ với $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

c) Xét hàm số $y = \sin\dfrac{1}{x}$ với $x > 0$.

$$y' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

Giải bất phương trình sau trên khoảng $(0\,;+\infty)$:

$$\frac{1}{x^2}\left(-\cos\frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \cos\frac{1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}(1+4k) < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}(3+4k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi(1+4k)} > x > \frac{2}{\pi(3+4k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng

$$\ldots,\left(\frac{2}{(4k+3)\pi};\frac{2}{(4k+1)\pi}\right),\left(\frac{2}{(4k-1)\pi};\frac{2}{(4k-3)\pi}\right),\ldots,\left(\frac{2}{7\pi};\frac{2}{5\pi}\right),\left(\frac{2}{3\pi};\frac{2}{\pi}\right)$$

và nghịch biến trên các khoảng

$$\ldots,\left(\frac{2}{(4k+1)\pi};\frac{2}{(4k-1)\pi}\right),\ldots,\left(\frac{2}{5\pi};\frac{2}{3\pi}\right),\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right),\text{ với } k=0,1,2,\ldots$$

1.5. a) Xét hàm số $f(x) = \tan x - \sin x$ trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$;

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} \geq 0,\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Mặt khác, ta có $f(0) = 0$, nên $f(x) = \tan x - \sin x > 0$ hay $\tan x > \sin x$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

b) • Xét hàm số $h(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$ trên $[0;+\infty)$;

$$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq 0 \text{ với } 0 \leq x < +\infty.$$

Dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$ nên $h(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.
Vì $h(0) = 0$ nên

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} > 0$$

hay $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ với $0 < x < +\infty$.

• Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8}$ trên $[0;+\infty)$;

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4},$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} \geq 0 \text{ với } 0 \leq x < +\infty.$$

Vì $g(0) = 0$ và $g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0\,;+\infty)$ nên $g(x) \geq 0$, tức là $f'(x) \geq 0$ trên khoảng đó và vì dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0\,;+\infty)$.

Mặt khác, ta có $f(0) = 0$ nên

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8} > 0 \text{ hay } 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$$

với mọi $0 < x < +\infty$.

1.6. Đặt $f(x) = x^3 - 3x + c$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \ \ 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	c	$\searrow$	$c-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Trên đoạn $[0\,;\,1]$ hàm số $f(x)$ nghịch biến nên đồ thị của hàm số $f(x)$ không thể cắt trục hoành tại hai điểm trên đoạn này, tức là phương trình $x^3 - 3x + c = 0$ không thể có hai nghiệm thực trên đoạn $[0\,;\,1]$.

1.7. $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu ta có $f'(x) = \cos x - b \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $|\cos x| \leq 1$ nên $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow b \geq 1$.

§2.

1.8. a) $y = -2x^2 + 7x - 5$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = -4x + 7, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$$

$$y'' = -4 \Rightarrow y''\left(\frac{7}{4}\right) = -4 < 0.$$

Vậy $x = \dfrac{7}{4}$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{CĐ} = \dfrac{9}{8}$.

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

$y'' = 6x - 6$.

Vì $y''(-2) = -18 < 0$, $y''(4) = 18 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; đạt cực tiểu tại $x = 4$ và $y_{CĐ} = y(-2) = 35$; $y_{CT} = y(4) = -73$.

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}. \end{array}\right.$

$y'' = 12x^2 - 10$.

Vì $y''\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = 20 > 0$, $y''(0) = -10 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ và ta có

$$y_{CĐ} = y(0) = 4,\ y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}.$$

d) $y = (x+1)^3(5 - x)$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$y' = -(x+1)^3 + 3(x+1)^2(5 - x) = 2(x+1)^2(7 - 2x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{7}{2}$ và $y_{CĐ} = y\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2187}{16}$.

e) $y = (x+2)^2(x-3)^3$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = 2(x+2)(x-3)^3 + 3(x+2)^2(x-3)^2 = 5x(x+2)(x-3)^2.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-108	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $y_{CĐ} = y(-2) = 0$; $y_{CT} = y(0) = -108$.

1.9. a) $y = \frac{x+1}{x^2+8}$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x^2 + 8 - 2x(x+1)}{(x^2+8)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, cực tiểu tại $x = -4$ và $y_{CĐ} = y(2) = \dfrac{1}{4}$,

$y_{CT} = y(-4) = -\dfrac{1}{8}$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

Hàm số xác định và có đạo hàm với mọi $x \neq 1$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 - \sqrt{2}$; đạt cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2}$, ta có

$$y_{CĐ} = y\left(1 - \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$y_{CT} = y\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

c) $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x + 1}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 6}{(x+1)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -1.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;\,-1)$, $(-1\,;\,+\infty)$ và do đó không có cực trị.

d) $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$.

Vì x^2-2x+5 luôn luôn dương nên hàm số xác định trên $(-\infty\,;\,+\infty)$.

$$y' = \frac{2(x-4)(x^2-2x+5)-(x-4)^2(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{2(x-4)(3x+1)}{(x^2-2x+5)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	1

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{1}{3}$, đạt cực tiểu tại $x = 4$ và

$$y_{CĐ} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{4};\ y_{CT} = y(4) = 0.$$

1.10. a) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$. TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$y' = 1 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 64.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		64		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy ta có $y_{CĐ} = y(0) = 0$ và $y_{CT} = y(64) = -32$.

BT-GT 12 (Tay so: 3 - Mat in: A - Mau in: K)

b) $y = (7 - x)\sqrt[3]{x + 5}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

$$y' = -\sqrt[3]{x+5} + \frac{7-x}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} = \frac{-4(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$9\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y_{CĐ} = y(-2) = 9\sqrt[3]{3}$.

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$.

Hàm số xác định trên khoảng $\left(-\sqrt{10} ; \sqrt{10}\right)$.

$$y' = \frac{\sqrt{10-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{10-x^2}}}{10-x^2} = \frac{10}{\left(10-x^2\right)\sqrt{10-x^2}}.$$

Vì $y' > 0$ với mọi $x \in \left(-\sqrt{10} ; \sqrt{10}\right)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó và do đó không có cực trị.

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$.

Tập xác định : $D = \left(-\infty ; -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6} ; +\infty\right)$.

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2-6} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6} = \frac{3x^2\left(x^2-6\right) - x^4}{\sqrt{\left(x^2-6\right)^3}} = \frac{2x^2\left(x^2-9\right)}{\sqrt{\left(x^2-6\right)^3}} ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-9\sqrt{3}$	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	$9\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Từ đó ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 3$ và

$$y_{CT} = y(3) = 9\sqrt{3}\ ;\ y_{CĐ} = y(-3) = -9\sqrt{3}.$$

1.11. a) $y = \sin 2x$.

Hàm số có chu kì $T = \pi$.

Xét hàm số $y = \sin 2x$ trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$, ta có

$$y' = 2\cos 2x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		π
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Do đó trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$, hàm số đạt cực đại tại $\dfrac{\pi}{4}$, đạt cực tiểu tại $\dfrac{3\pi}{4}$ và

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ ;\ y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Vậy trên $\mathbb{R}$ ta có :

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1,\ y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) = -1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $y = \cos x - \sin x$. Hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên ta xét trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

$y' = -\sin x - \cos x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lập bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và

$$y_{CĐ} = y\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \sqrt{2},$$

$$y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2}\ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Ta có $y = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

Do đó, hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì π. Ta xét hàm số $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$.

$y' = \sin 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k.\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lập bảng biến thiên trên đoạn $[0 ; \pi]$

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = k\frac{\pi}{2}$ với k chẵn, đạt cực đại tại $x = k\frac{\pi}{2}$ với k lẻ, và $y_{CT} = y(2m\pi) = 0$, $y_{CĐ} = y\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $(m \in \mathbb{Z})$.

1.12. $y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5.$

Ta biết hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm và y' đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Ta có $$y' = 3x^2 - 2mx + \left(m - \frac{2}{3}\right).$$

Xét $y' = 0$, ta có $\Delta' = m^2 - 3\left(m - \frac{2}{3}\right) = m^2 - 3m + 2.$

$$\Delta' > 0 \text{ khi } m < 1 \text{ hoặc } m > 2. \qquad (*)$$

Để hàm số có cực trị tại $x = 1$ thì

$$y'(1) = 3 - 2m + m - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3},$$ thoả mãn điều kiện (*).

Với $m = \frac{7}{3}$ thì hàm số đã cho trở thành

$$y = x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 5.$$

Ta có $$y' = 3x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{5}{3};$$

$$y'' = 6x - \frac{14}{3}.$$

Vì $y''(1) = 6 - \frac{14}{3} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

và $y_{CT} = y(1) = \frac{16}{3}.$

1.13. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

, không có đạo hàm tại $x = 0$ vì :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, với $x < 0$ thì $y' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, với $x > 0$ thì $y' = -2 < 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\pi$		0		π
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 0$.

1.14. Hàm số không có cực trị khi đạo hàm của nó không đổi dấu trên tập xác định $\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Ta có $\quad y = \dfrac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}$,

$$y' = \frac{(2x + 2m)(x - m) - \left(x^2 + 2mx - 3\right)}{(x - m)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2m^2 - x^2 - 2mx + 3}{(x - m)^2} = \frac{x^2 - 2mx - 2m^2 + 3}{(x - m)^2}.$$

Xét $\quad g(x) = x^2 - 2mx - 2m^2 + 3$,

$\Delta'_g = m^2 + 2m^2 - 3 = 3\left(m^2 - 1\right)$,

$\Delta'_g \le 0$ khi $-1 \le m \le 1$.

Khi $-1 < m < 1$ thì phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm hay $y' = 0$ vô nghiệm và $y' > 0$ trên tập xác định. Khi đó, hàm số không có cực trị.

Khi $m = 1$ hoặc $m = -1$, hàm số đã cho trở thành $y = x + 3$ (với $x \ne 1$) hoặc $y = x - 3$ (với $x \ne -1$). Các hàm số này không có cực trị.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị khi $-1 \le m \le 1$.

§3.

1.15. a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 8$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

$$f'(x) = -6x + 4,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{3}, \qquad f(0) = -8, \qquad f(1) = -7.$$

Vậy $\min\limits_{[0\,;\,1]} f(x) = -8$; $\max\limits_{[0\,;\,1]} f(x) = -\dfrac{20}{3}$.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4 ; 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $f_{CĐ} = f(-3) = 20$; $f_{CT} = f(1) = -12$; $f(-4) = 13$; $f(3) = 20$.

Vậy $\min\limits_{[-4\,;\,3]} f(x) = -12$; $\max\limits_{[-4\,;\,3]} f(x) = 20$.

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ trên đoạn $[-4 ; 4]$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}};\ f'(x) > 0 \text{ trên khoảng } (-4 ; 0) \text{ và}$$

$f'(x) < 0$ trên khoảng $(0 ; 4)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{CĐ} = 5$.

Mặt khác, ta có $f(-4) = f(4) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[-4\,;\,4]} f(x) = 5$, $\min\limits_{[-4\,;\,4]} f(x) = 3$.

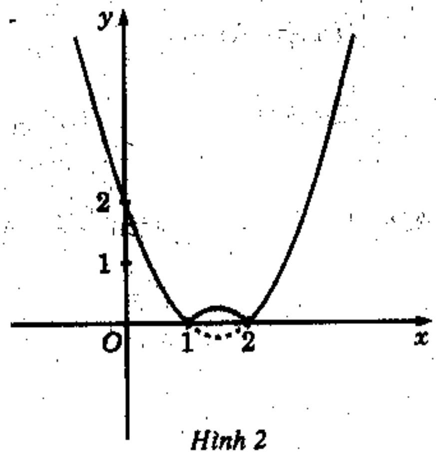
d) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10 ; 10]$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ta có

$$g'(x) = 2x - 3;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

x	-10		1		$\frac{3}{2}$		2		10
$g'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	



Hình 2

Vì $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ khi } x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ -g(x) \text{ khi } x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$

nên ta có đồ thị của $f(x)$ như Hình 2.

Từ đồ thị suy ra

$$\max_{[-10\,;\,10]} f(x) = f(-10) = 132,$$

$$\min_{[-10\,;\,10]} f(x) = f(1) = f(2) = 0.$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $f'(x) < 0$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f'(x) > 0$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$

nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{2}$ và $f_{CT} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Mặt khác, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 2$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 1$.

g) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = \dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Từ đó ta có $\max\limits_{\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = -2$.

1.16. a) $y = \frac{x}{4 + x^2}$ trên $(-\infty\,;+\infty)$.

$y' = \frac{4 - x^2}{\left(4 + x^2\right)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Từ đó ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{4}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{4}$.

b) $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,;\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của hàm số là

$$\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right)} y = y(\pi) = -1.$$

c) $y = \frac{1}{1 + x^4}$ trên khoảng $(-\infty\,;+\infty)$.

$$y' = \frac{-4x^3}{\left(1 + x^4\right)^2}\,;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của hàm số là

$$\max_{\mathbb{R}} y = y(0) = 1.$$

d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$.

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x},\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
y	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Hàm số không có giá trị lớn nhất. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

$$\min_{(0\ ;\ \pi)} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

1.17. Cho $m > 0$. Đặt x là số thứ nhất, $0 < x < m$, số thứ hai là $m - x$.

Xét tích $\quad P(x) = x(m - x).$

Ta có $\quad P'(x) = -2x + m,$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{m}{2}$		m
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của tích hai số là

$$\max_{(0\,;\,m)} P(x) = P\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}.$$

1.18. Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x + 13$.

Xét tích $p(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$;

$$p'(x) = 2x + 13\,;\ p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tích hai số là bé nhất khi một số là $-\frac{13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$.

1.19. $s = 6t^2 - t^3, t > 0.$

Vận tốc chuyển động là $v = s'$, tức là $v = 12t - 3t^2$.

Ta có $\quad v' = 12 - 6t,$

$\qquad\quad v' = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Hàm số v đồng biến trên khoảng $(0\,;\,2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2\,;\,+\infty)$.

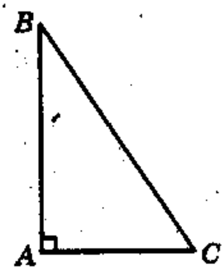
Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2$. Khi đó $\max\limits_{(0\,;\,+\infty)} V = V_{CĐ} = v(2) = 12$(m/s).

1.20. (H.3) Kí hiệu cạnh góc vuông AB là $x, 0 < x < \frac{a}{2}$.

Khi đó, cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia là

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2}$$

hay $\quad AC = \sqrt{a^2 - 2ax}.$



Hình 3

Diện tích tam giác ABC là

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}.$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2ax} - \frac{1}{2}\frac{ax}{\sqrt{a^2 - 2ax}} = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất khi $AB = \frac{a}{3}$, $BC = \frac{2a}{3}$.

§4.

1.21. a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{2x-1}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{2x-1}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Từ $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^+} \dfrac{3-2x}{3x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^-} \dfrac{3-2x}{3x+1} = -\infty$, ta có $x = -\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-2x}{3x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{3}{x} - 2}{3 + \frac{1}{x}} = -\dfrac{2}{3}$ nên đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận ngang.

c) Vì $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+}\dfrac{5}{2-3x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^-}\dfrac{5}{2-3x}=+\infty$, nên $x=\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{2-3x}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang.

d) Do $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-4}{x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-4}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4}{x+1}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang.

1.22. a) Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{12}{x}+\dfrac{27}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang.

b) Vì $\lim\limits_{x\to1^\pm}\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}=-\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng.

Từ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=1$ suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang.

c) Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+3x}{(x-2)(x+2)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+3x}{(x-2)(x+2)}=-\infty$

nên $x=2$ là một tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+3x}{(x-2)(x+2)}=-\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng thứ hai.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang.

d) Do $\lim\limits_{x\to1^\pm}\dfrac{2-x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1^\pm}\dfrac{2-x}{(x-1)(x-3)}=\mp\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to 3^{\pm}} \dfrac{2-x}{x^2-4x+3} = \mp\infty$ nên $x = 3$ cũng là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2-x}{x^2-4x+3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang.

1.23. a) Từ đồ thị $(\mathcal{H})$ (H.1), để có hình $(\mathcal{H}')$ nhận $y = 2$ là tiệm cận ngang và $x = 2$ là tiệm cận đứng, ta tịnh tiến đồ thị $(\mathcal{H})$ song song với trục Oy lên trên 3 đơn vị, sau đó tịnh tiến song song với trục Ox về bên phải 3 đơn vị, ta được các hàm số tương ứng sau :

$$y = f(x) = \frac{3-x}{x+1} + 3 = \frac{3-x+3x+3}{x+1} = \frac{2x+6}{x+1}\ ;$$

$$y = g(x) = \frac{2(x-3)+6}{x-3+1} = \frac{2x}{x-2}. \qquad (\mathcal{H}')$$

b) Lấy đối xứng hình $(\mathcal{H}')$ qua gốc O, ta được hình $(\mathcal{H}'')$ có phương trình là

$$y = h(x) = -\frac{2(-x)}{(-x)-2} = -\frac{-2x}{-2-x} = -\frac{2x}{x+2}.$$

§5.

1.24. Học sinh tự giải.

1.25. Học sinh tự giải.

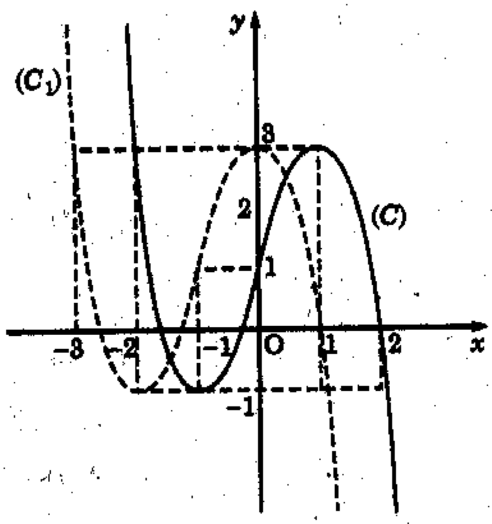
1.26. a) Hình 4.

b) Tịnh tiến (C) song song với trục Ox sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị (C_1) của hàm số

$y = f(x) = -(x+1)^3 + 3(x+1) + 1$

hay $f(x) = -(x+1)^3 + 3x + 4$. (C_1)

Lấy đối xứng (C_1) qua trục Ox, ta được đồ thị (C') của hàm số $y = g(x) = (x+1)^3 - 3x - 4$ (H.5).



Hình 4

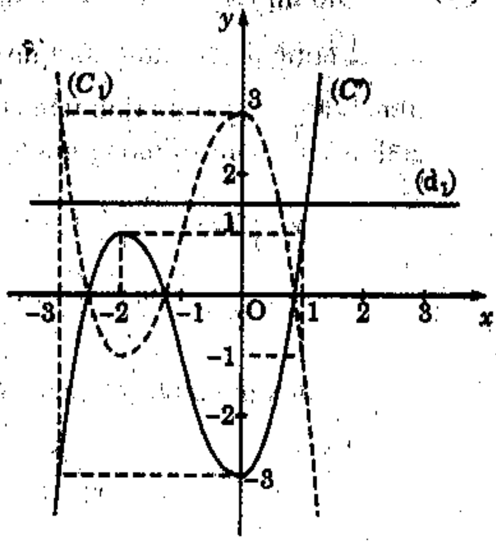
c) Ta có $(x+1)^3 = 3x + m$ (1)

$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 3x - 4 = m - 4.$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đường

$$y = g(x) = (x+1)^3 - 3x - 4 \qquad (C')$$

và $y = m - 4.$ (d_1)



Hình 5

Từ đồ thị, ta suy ra :

• $m > 5$ hoặc $m < 1$: phương trình (1) có một nghiệm.

• $m = 5$ hoặc $m = 1$: phương trình (1) có hai nghiệm.

• $1 < m < 5$, phương trình (1) có ba nghiệm.

d) Vì (d) vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{9} + 1$ nên có hệ số góc bằng 9.

Ta có $\quad g'(x) = 3(x+1)^2 - 3,$

$$g'(x) = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến phải tìm là :

$$y - 1 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 8\ ;$$

$$y + 3 = 9(x + 3) \Leftrightarrow y = 9x + 24.$$

1.27. Xét hàm số $\quad y = \dfrac{4 - x}{2x + 3m}.$

a) TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3m}{2}\right\}.$

$$y' = \frac{-2x - 3m - 2(4 - x)}{(2x + 3m)^2} = \frac{-3m - 8}{(2x + 3m)^2}.$$

• Nếu $m < -\dfrac{8}{3}$, $y' > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty\ ; -\dfrac{3m}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3m}{2}\ ; +\infty\right)$.

BT-GT 12 (Tay so: 4 - Mat in: B - Mau in: K)

• Nếu $m > -\dfrac{8}{3}$, $y' < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{3m}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3m}{2} ; +\infty\right)$.

• Nếu $m = -\dfrac{8}{3}$ thì $y = -\dfrac{1}{2}$ khi $x \neq 4$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4-x}{2x+3m} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{4}{x}-1}{2+\dfrac{3m}{x}} = -\dfrac{1}{2}$

nên với mọi m, đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang và đi qua $B\left(-\dfrac{7}{4} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Số giao điểm của (C_m) và đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là số nghiệm của phương trình $\dfrac{4-x}{2x+3m} = x$.

Ta có $\dfrac{4-x}{2x+3m} = x \Leftrightarrow 4 - x = 2x^2 + 3mx$ với $x \neq -\dfrac{3m}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (3m+1)x - 4 = 0, \qquad (*)$$

với $\quad x \neq -\dfrac{3m}{2}$.

• Thay $\quad x = -\dfrac{3m}{2}$ vào (*), ta có :

$$2.\left(-\frac{3m}{2}\right)^2 - \frac{9m^2}{2} - \frac{3m}{2} - 4 = \frac{9m^2}{2} - \frac{9m^2}{2} - \frac{3m}{2} - 4 \neq 0.$$

$\Rightarrow \qquad m \neq -\dfrac{8}{3}$.

Như vậy, để $x = -\dfrac{3m}{2}$ không là nghiệm của phương trình (*), ta phải có $m \neq -\dfrac{8}{3}$.

Ta có $\Delta = (3m+1)^2 + 32 > 0,\ \forall m$. Từ đó suy ra với $m \neq -\dfrac{8}{3}$ đường thẳng $y = x$ luôn cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt.

d) Ta có $y = \left|\dfrac{4-x}{2x+3}\right| = \begin{cases} \dfrac{4-x}{2x+3} & \text{với } \dfrac{4-x}{2x+3} \geq 0 \\ -\dfrac{4-x}{2x+3} & \text{với } \dfrac{4-x}{2x+3} < 0. \end{cases}$

Trước hết, ta vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{4-x}{2x+3}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Vì $y' = \dfrac{-11}{(2x+3)^2} < 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$.

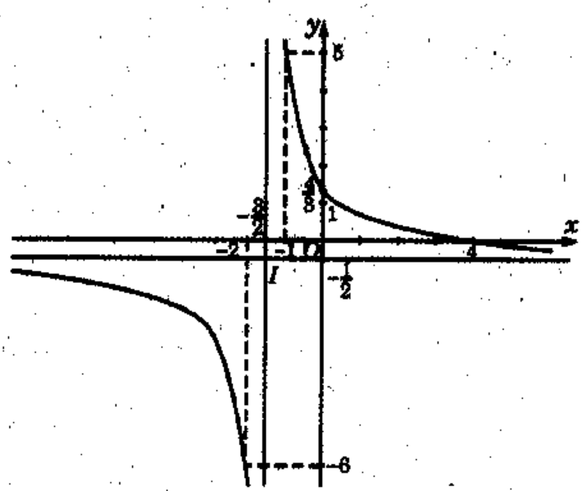
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$

Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{3}{2}$.

Tiệm cận ngang $y = -\dfrac{1}{2}$.

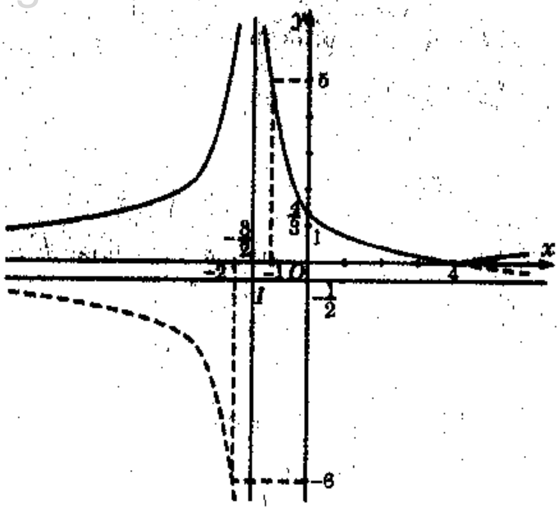
Đồ thị (C) đi qua các điểm $(-2 ; -6)$, $(-1 ; 5)$, $\left(0 ; \dfrac{4}{3}\right)$, $(4 ; 0)$ (H. 6a).



Hình 6 a)

T-GT 12 (Tay so: 4 - Mat in: A - Mau in: K)

Để vẽ đồ thị (C') của hàm số $y = \left|\dfrac{4 - x}{2x + 3}\right|$, ta giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành (H.6b).



Hình 6 b)

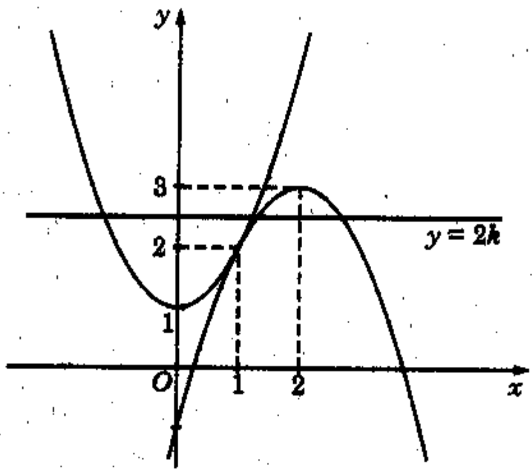
1.28. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $2(x - k) = \pm(x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 4x - 1 = 2k \\ x^2 + 1 = 2k. \end{array}\right.$$

Ta vẽ đồ thị của hai hàm số

$y = -x^2 + 4x - 1$

và $y = x^2 + 1$ (H.7).



Hình 7

Từ đồ thị ta suy ra :

$2k > 3$: phương trình có hai nghiệm ;

$2k = 3$: phương trình có ba nghiệm ;

$2 < 2k < 3$: phương trình có bốn nghiệm ;

$2k = 2$: phương trình có ba nghiệm ;

$1 < 2k < 2$: phương trình có bốn nghiệm ;

$2k = 1$: phương trình có ba nghiệm ;

$2k < 1$: phương trình có hai nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < \dfrac{3}{2} \text{ hoặc } \dfrac{1}{2} < k < 1, & \text{phương trình có bốn nghiệm ;} \\ k = 1 \text{ hoặc } k = \dfrac{1}{2}, \text{ hoặc } k = \dfrac{3}{2} & \text{phương trình có ba nghiệm ;} \\ k > \dfrac{3}{2} \text{ hoặc } k < \dfrac{1}{2} & \text{phương trình có hai nghiệm.} \end{cases}$$

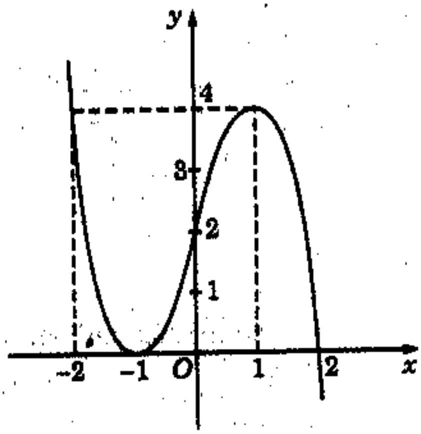
b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = (x+1)^2(2-x)$.

$$y = -x^3 + 3x + 2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3 \ ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$



Hình 8

Đồ thị như trên Hình 8.

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra :

- $k > 4$ hoặc $k < 0$: phương trình có một nghiệm ;
- $k = 4$ hoặc $k = 0$: phương trình có hai nghiệm ;
- $0 < k < 4$: phương trình có ba nghiệm.

1.29. a) $y = x^3 - (m+4)x^2 - 4x + m$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)m + y - x^3 + 4x^2 + 4x = 0.$$

Đồ thị của hàm số (1) luôn luôn đi qua điểm $A(x\ ;y)$ với mọi m khi $(x\ ;y)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y - x^3 + 4x^2 + 4x = 0. \end{cases}$$

Giải hệ, ta được hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1, \quad y = -7 \\ x = -1, \quad y = -1. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị của hàm số luôn luôn đi qua hai điểm $(1 ; -7)$ và $(-1 ; -1)$.

b) $y' = 3x^2 - 2(m + 4)x - 4$;

$\Delta' = (m + 4)^2 + 12$;

Vì $\Delta' > 0$ với mọi m nên $y' = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt (và đổi dấu khi qua hai nghiệm đó). Từ đó suy ra đồ thị của (1) luôn luôn có cực trị.

c) Học sinh tự giải.

d) Với $m = 0$ ta có $y = x^3 - 4x^2 - 4x$.

Đường thẳng $y = kx$ sẽ cắt (C) tại ba điểm phân biệt nếu phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$x^3 - 4x^2 - 4x = kx$$

hay phương trình $x^2 - 4x - (4 + k) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = k + 8 > 0 \\ k \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 < k < -4 \\ -4 < k < +\infty. \end{array}\right.$$

1.30. a) Học sinh tự giải.

b) $\dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

(C) cắt trục Ox tại $x = -3$ và $x = 3$.

Ta có $y' = x^3 - 4x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 3$ và $x = -3$ lần lượt là

$$y = y'(3)(x - 3) \text{ và } y = y'(-3)(x + 3)$$

hay $$y = 15(x - 3) \quad \text{và } y = -15(x + 3).$$

c) $\dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4} = k - 2x^2 \Leftrightarrow x^4 = 9 + 4k.$

Từ đó, ta có

$k = -\dfrac{9}{4}$: (C) và (P) có một điểm chung là $\left(0\,;-\dfrac{9}{4}\right)$.

$k > -\dfrac{9}{4}$: (C) và (P) có hai giao điểm.

$k < -\dfrac{9}{4}$: (C) và (P) không cắt nhau.

1.31. a) $y = x^4 + mx^2 - m - 5$;

$y' = 4x^3 + 2mx = 2x(2x^2 + m)$.

(C_m) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là

$2x(2x^2 + m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m < 0$.

b) Đường (C_{-2}) có phương trình là $y = x^4 - 2x^2 - 3$;

$y' = 4x^3 - 4x.$

Tiếp tuyến của (C_{-2}) song song với đường thẳng $y = 24x - 1$ và đi qua điểm trên đồ thị có hoành độ thoả mãn $4x^3 - 4x = 24$

$\Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy phương trình của tiếp tuyến phải tìm là $y - y(2) = 24(x - 2)$.

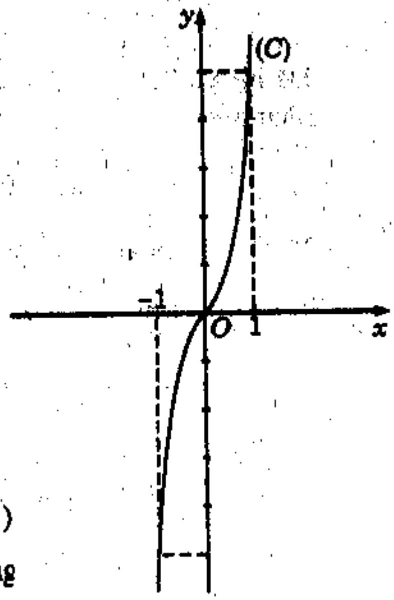
$\Leftrightarrow y = 24x - 43$.

Bài tập ôn chương I

1.32. a) $y = 4x^3 + x$, $y' = 12x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 9

Đồ thị như trên Hình 9.

b) Giả sử tiếp điểm cần tìm có toạ độ $(x_0\,;\,y_0)$ thì $f'(x_0) = 12x_0^2 + 1 = 13$ (vì tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 13x + 1$). Từ đó ta có $x_0 = \pm 1$.

Vậy có hai tiếp tuyến phải tìm là $y = 13x \pm 8$.

c) Vì $y' = 12x^2 + m$ nên :

• Với $m \geq 0$ ta có $y' > 0$ (khi $m = 0$; $y' = 0$ tại $x = 0$). Vậy hàm số (1) luôn luôn đồng biến khi $m \geq 0$.

• Với $m < 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-m}{12}}$.

Từ đó suy ra

$$y' > 0 \text{ với } -\infty < x < -\sqrt{\frac{-m}{12}} \text{ và } \sqrt{\frac{-m}{12}} < x < +\infty.$$

$$y' < 0 \text{ với } -\sqrt{\frac{-m}{12}} < x < \sqrt{\frac{-m}{12}}.$$

Vậy hàm số (1) đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty\,;\,-\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\,;\,+\infty\right)$

và nghịch biến trên khoảng $\left(-\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\,;\,\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\right)$.

1.33. Hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m).$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-2m}{3} \neq 0.$$

Muốn vậy phải có $m \neq 0$.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + mx^2 - 3\right) = +\infty$ và $y(0) = -3 < 0$.

Vậy với mọi m, phương trình $x^3 + mx^2 - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm dương.

c) Phương trình $f(x) = x^3 + mx^2 - 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cùng dấu, tức là

$$f(0)f\left(-\frac{2m}{3}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow (-3)\left(-\frac{8m^3}{27} + \frac{4m^3}{9} - 3\right) > 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 12m^3 + 81 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 < 81 \text{ hay } m < 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}},\ (m \neq 0).$$

1.34. a) $y = -\left(m^2 + 5m\right)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$.

$$y' = -3\left(m^2 + 5m\right)x^2 + 12mx + 6.$$

Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi y' không đổi dấu.

Ta xét các trường hợp :

• $m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -5. \end{array}\right.$

– Với $m = 0$ thì $y' = 6$ nên hàm số luôn đồng biến.

– Với $m = -5$ thì $y' = -60x + 6$ đổi dấu khi x đi qua $\frac{1}{10}$.

• Với $m^2 + 5m \neq 0$. Khi đó, y' không đổi dấu nếu

$$\Delta' = 36m^2 + 18\left(m^2 + 5m\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 5m \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq 0.$$

– Với điều kiện đó, ta có $-3(m^2+5m)>0$ nên $y'>0$ và do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy với điều kiện $-\frac{5}{3}\le m\le 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Nếu hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì $y'(1)=0$. Khi đó :

$$y'(1)=-3m^2-3m+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-2.\end{array}\right.$$

Mặt khác, $y''=-6(m^2+5m)x+12m$.

• Với $m=1$ thì $y''=-36x+12$. Khi đó, $y''(1)=-24<0$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

• Với $m=-2$ thì $y''=36x-24$. Khi đó, $y''(1)=12>0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy với $m=1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

1.35 a) Ta có $$y=\frac{(a-1)x^3}{3}+ax^2+(3a-2)x.$$

$$y'=(a-1)x^2+2ax+3a-2.$$

• Với $a=1$, $y'=2x+1$ đổi dấu khi x đi qua $-\frac{1}{2}$. Hàm số không luôn luôn đồng biến.

• Với $a\ne 1$ thì với mọi x mà tại đó $y'\ge 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-1>0\\ \Delta'=-2a^2+5a-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 2.$$

($y'=0$ chỉ tại $x=-2$, khi $a=2$).

Vậy với $a\ge 2$ hàm số luôn luôn đồng biến.

b) Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt. Ta có

$$y=0\Leftrightarrow x\left[\frac{(a-1)x^2}{3}+ax+3a-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[(a-1)x^2+3ax+9a-6\right]=0.$$

$y = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$(a-1)x^2 + 3ax + 9a - 6 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 0. Muốn vậy, ta phải có

$$\begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ \Delta = 9a^2 - 4(a-1)(9a-6) > 0 \\ 9a - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được :

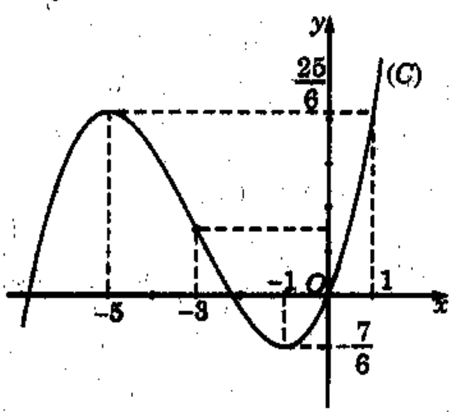
$$\frac{10-\sqrt{28}}{9} < a < \frac{2}{3};\ \frac{2}{3} < a < 1\ ;\ 1 < a < \frac{10+\sqrt{28}}{9}.$$

c) Khi $a = \dfrac{3}{2}$ thì $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{2}$.

$$y' = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{5}{2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5. \end{array}\right.$$



Hình 10

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{25}{6}$	$\searrow$	$-\frac{7}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị như trên Hình 10.

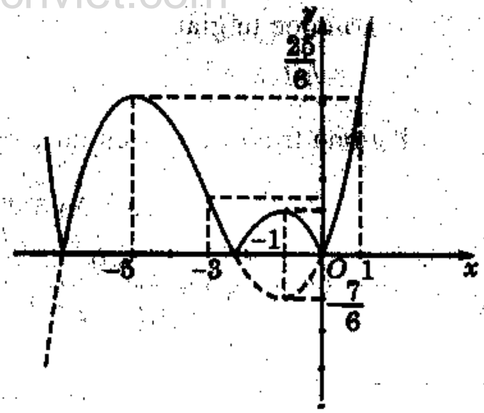
Vì

$$\left|\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{2} & \text{nếu } \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{2} \geq 0 \\ -\left(\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{2}\right) & \text{nếu } \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{2} < 0 \end{cases}$$

nên từ đồ thị (C) ta suy ngay ra đồ thị của hàm số

$$y = \left|\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right|$$

như trên Hình 11.



Hình 11

1.36. a) $y = x^4 - 2x^2$,

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

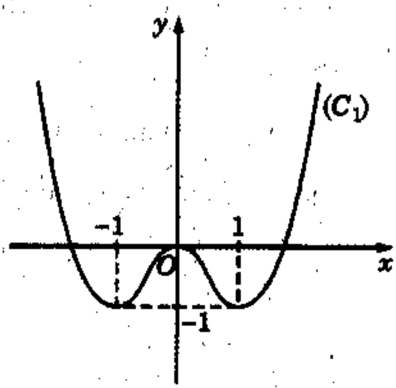
Đồ thị như Hình 12.

b) $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Để (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

• Nếu $m \le 0$ thì $x^2 - m \ge 0$ với mọi x nên đồ thị không thể tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm phân biệt

• Nếu $m > 0$ thì $y' = 0$ khi $x = 0$, $x = \pm\sqrt{m}$.



Hình 12

$$f(\sqrt{m}) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + m^3 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0).$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

1.37. a) Bạn đọc tự giải.

b) *Cách 1*

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ là

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y'(x_0) = \dfrac{-9}{(x_0-2)^2}$. Ta có

$$y = -\frac{9}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + y_0 \text{ với } y_0 = \frac{3(x_0+1)}{x_0-2}.$$

Để đường thẳng đó đi qua $O(0\,;\,0)$, điều kiện cần và đủ là

$$\frac{9x_0}{(x_0-2)^2} + \frac{3(x_0+1)}{x_0-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 2 \\ x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}.$$

- Với $x_0 = -1 + \sqrt{3}$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{3}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)x$.
- Với $x_0 = -1 - \sqrt{3}$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{3}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)x$.

Cách 2

Phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O có dạng $y = kx$.

Để xác định toạ độ tiếp điểm của hai đường

$$y = \frac{3(x+1)}{x-2} \text{ và } y = kx,$$

ta giải hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{3(x+1)}{x-2} = kx \\ -\dfrac{9}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(x+1)}{x-2} + \dfrac{9x}{(x-2)^2} = 0 \\ -\dfrac{9}{(x-2)^2} = k. \end{cases}$$

Giải phương trình thứ nhất, ta được $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$k_1 = -\frac{3}{2}(2+\sqrt{3}), \quad k_2 = -\frac{3}{2}(2-\sqrt{3}).$$

Từ đó có hai phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})x \text{ và } y = -\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})x.$$

c) Để tìm trên (C) các điểm có toạ độ nguyên, ta có

$$y = \frac{3(x+1)}{x-2} \Leftrightarrow y = 3 + \frac{9}{x-2}.$$

Điều kiện cần và đủ để $M(x\,;\,y) \in (C)$ có toạ độ nguyên là $x \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{9}{x-2} \in \mathbb{Z}$

hay $\quad 9 \,\vdots\, (x-2)$. Khi đó, $x-2$ nhận các giá trị ± 1 ; ± 3 ; ± 9

hay x nhận các giá trị 1 ; 3 ; −1 ; 5 ; −7 ; 11.

Do đó, ta có sáu điểm trên (C) có toạ độ nguyên là

$$(1\,;\,-6), (3\,;\,12)\,;\,(-1\,;\,0), (5\,;\,6)\,;\,(-7\,;\,2), (11\,;\,4).$$

1.38. a) Bạn đọc tự giải.

b) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$;

Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$;

Do đó, giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(3\,;\,1)$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 1, \end{cases}$$

ta được $Y + 1 = \dfrac{X+5}{X} \Leftrightarrow Y = \dfrac{X+5}{X} - 1 \Leftrightarrow Y = \dfrac{5}{X}$.

Vì $Y = \dfrac{5}{X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị (C) của hàm số này có tâm đối xứng là gốc toạ độ I của hệ toạ độ IXY.

c) Giả sử $M(x_0\,;\,y_0) \in (C)$. Gọi d_1 là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và d_2 là khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang, ta có :

$$d_1 = |x_0 - 3|,\ d_2 = |y_0 - 1| = \frac{5}{|x_0 - 3|}.$$

Từ giả thiết suy ra $|x_0 - 3| = \dfrac{5}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$.

Có hai điểm thoả mãn đầu bài, đó là hai điểm có hoành độ $x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$.

1.39. Hàm số $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(0) = -8 < 0$, $f(1) = 10 > 0$ nên tồn tại một số $x_0 \in (0\,;1)$ sao cho $f(x_0) = 0$, tức là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Mặt khác, ta có $y' = 15x^4 + 15 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho luôn luôn đồng biến. Vậy phương trình đó chỉ có một nghiệm.

Đáp án bài tập trắc nghiệm

1. Chọn (A).

Hàm số dạng này có một điểm cực đại tại $x = 0$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty\,; b)$ với $b \le 0$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,; 0)$.

2. Chọn (D).

$y' = \dfrac{-x^2 + 4x + 2m + 1}{(2-x)^2}$; $y' \le 0$ $(x \ne 2) \Leftrightarrow \Delta' = 2m + 5 \le 0$ (dấu "=" xảy ra nhiều nhất tại hai điểm, nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,; 2)$ và $(2\,; +\infty)$ khi $m \le -\dfrac{5}{2}$.

3. Chọn (C).

Ta có $y(0) = 2$, $y(a) = a^4 + 3a^2 + 2 > 2$ với mọi $a \ne 0$.

Vậy hàm số có một điểm cực tiểu là $x = 0$.

4. Chọn (B).

Với mọi $x \ne 0$ ta đều có $y = \dfrac{4}{x^2 + 2} \le \dfrac{4}{0 + 2} = 2$

nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 0$ hay $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 2$.

5. Chọn (A).

6. Chọn (C).

Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ không xác định tại $x = 2$ nên phải loại (A), (B).

Thay $x = 3$ vào hàm số trên, ta được $y(3) = 0$. Mặt khác, hàm số thứ hai có giá trị là 4 khi $x = 3$, do đó loại (D). Vậy (C) là khẳng định đúng.

7. Chọn (D).

Vì $x^2 + x + 4 > 0$ với mọi x nên phương trình $(x-3)(x^2 + x + 4) = 0$ chỉ có một nghiệm là $x = 3$. Do đó, đồ thị của hàm số đã cho chỉ có một giao điểm với trục hoành.

Chương II. HÀM SỐ LUỸ THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. Luỹ thừa

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

• Luỹ thừa với số mũ nguyên dương

Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}.}$$

• Luỹ thừa với số mũ nguyên âm, luỹ thừa với số mũ 0

Cho $a \neq 0$. Khi đó

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ ;\ a^0 = 1.}$$

• Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

• 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Khi n lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất $\sqrt[n]{b}$;

Khi n chẵn và
- $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b ;
- $b = 0$: Có một căn $\sqrt[n]{0} = 0$;
- $b > 0$: Có hai căn $\begin{cases} \sqrt[n]{b} > 0 \\ -\sqrt[n]{b} < 0. \end{cases}$

BT-GT 12 (Tay so: 5 - Mat in: B - Mau in: K)

3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Khi đó

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.}$$

4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$. Khi đó

$$\boxed{a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.}$$

5. Các tính chất

Cho hai số dương a, b ; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó :

* $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

* $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$; $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$;

* Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

* Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính :

a) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

b) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

c) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}}.3^{\frac{4}{5}}$;

d) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

Giải

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^3+2^4=8+16=24.$

b) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}=\left(0,2^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(0,5^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=(0,2)^{-3}-(0,5)^{-2}=125-4=121.$

c) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}.3^{\frac{4}{5}}=8^{\frac{7}{7}}-3^{\frac{10}{5}}=8-9=-1.$

d) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}=5^2+(0,2)^{-3}=25+125=150.$

• ***Ví dụ 2***

Cho a, b là các số dương. Hãy viết và rút gọn các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa :

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$;

c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$.

Giải

Với a, b là các số dương, ta có :

a) $a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}.$

b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}=b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b.$

c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=a.$

d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}.$

• ***Ví dụ 3***

Tính giá trị của biểu thức :

a) $\sqrt[3]{a}.\sqrt[6]{a}$ với $a=0,09$; b) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ với $b=27$;

c) $\dfrac{\sqrt{b}.\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ với $b=1,3$; d) $\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[12]{a^5}$ với $a=2,7$.

BT-GT 12 (Tav so: 5 - Mat in: A - Mau in: K)

Giải

a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = (0{,}09)^{\frac{1}{2}} = 0{,}3.$

b) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3.$

c) $\dfrac{\sqrt{b}.\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} = \dfrac{b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} = b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = b = 1{,}3.$

d) $\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{5}{12}} = a = 2{,}7.$

- ***Ví dụ 4***

Tính :

a) $4^{3+\sqrt{2}}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-4-\sqrt{2}}$;

b) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}$;

c) $\left(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right).5^{-1-2\sqrt{2}}$.

Giải

a) $4^{3+\sqrt{2}}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{2(3+\sqrt{2})}.2^{1-\sqrt{2}}.2^{-4-\sqrt{2}}$

$= 2^{6+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8.$

b) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}} = \dfrac{2^{3+\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}} = 2.3^2 = 18.$

c) $\left(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right).5^{-1-2\sqrt{2}} = \left(5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right).5^{-1-2\sqrt{2}} =$

$= 5^{2+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} = 5 - 5^{-1} = 5 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{24}{5}.$

- ***Ví dụ 5***

Hãy so sánh các cặp số sau :

a) $4^{-\sqrt{3}}$ và $4^{-\sqrt{2}}$;

b) $2^{\sqrt{3}}$ và $2^{1,7}$;

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1,4}$ và $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

d) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\pi}$ và $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3,14}$.

Giải

a) Ta có số mũ $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$ và cơ số $4 > 1$ nên $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$.

b) Tương tự, $\sqrt{3} > 1,7$ và $2 > 1$ nên $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$.

c) Vì $1,4 < \sqrt{2}$ và cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

d) Tương tự, $\pi > 3,14$ và $\frac{1}{9} < 1$ nên $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

• ***Ví dụ 6***

Cho a, b là các số dương. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; b) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$.

Giải

Với a, b là các số dương, ta có :

a) $$\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{1}{a}.$$

b) $$\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1 - a)} - \frac{b^{-\frac{1}{2}}(1 - b^2)}{b^{-\frac{1}{2}}(b + 1)}$$

$$= \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} - \frac{(1-b)(1+b)}{b+1} = a + b.$$

• ***Ví dụ 7***

Hãy so sánh các cặp số sau :

a) $\sqrt[3]{10}$ và $\sqrt[5]{20}$; b) $\sqrt[4]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$.

Giải

a) Đưa hai căn đã cho về cùng căn bậc 15, ta được

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[15]{10^5} = \sqrt[15]{100000},$$

$$\sqrt[5]{20} = \sqrt[15]{20^3} = \sqrt[15]{8000}.$$

Do 100 000 > 8000 nên $\sqrt[3]{10} > \sqrt[5]{20}$.

b) Tương tự, ta có

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$$

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}.$$

Vậy $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$.

C. BÀI TẬP

2.1. Tính :

a) $2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}}$;

b) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

c) $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}}.5^{1+\sqrt{7}}}$;

d) $\left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right).2^{-2\sqrt{3}}$.

2.2. Tính :

a) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + 810000^{0,25} - \left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

b) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;

c) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

d) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

2.3. Cho a và b là các số dương. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$;

b) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$;

c) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$;

d) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} + \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$.

2.4. Hãy so sánh mỗi số sau với 1 :

a) 2^{-2} ; b) $(0{,}013)^{-1}$; c) $\left(\frac{2}{7}\right)^{5}$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; e) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$

2.5. Hãy so sánh các cặp số sau :

a) $\sqrt{17}$ và $\sqrt[3]{28}$; b) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; d) $4^{\sqrt{5}}$ và $4^{\sqrt{7}}$.

§2. Hàm số luỹ thừa

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số luỹ thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^{\alpha}$ là :

- $\mathbb{R}$ với α nguyên dương ;
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ với α nguyên âm hoặc bằng 0 ;
- $(0; +\infty)$ với α không nguyên.

3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

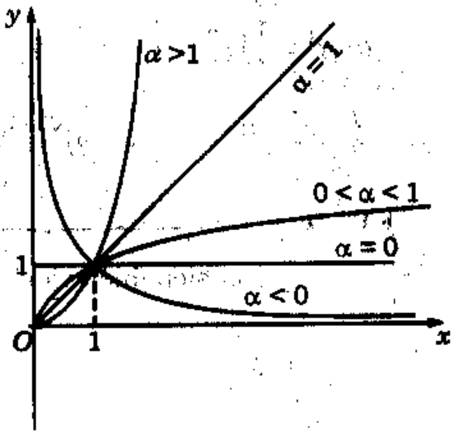
4. Tính chất của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$

1) Đồ thị luôn đi qua điểm $(1 ; 1)$.

2) Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha < 0$ hàm số luôn nghịch biến.

3) Đồ thị của hàm số không có tiệm cận khi $\alpha > 0$. Khi $\alpha < 0$, đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.

5. Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α (H.13).



Hình 13

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = 3(x-1)^{-3}$; b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$.

Giải

a) Hàm số $y = 3(x-1)^{-3} = \dfrac{3}{(x-1)^3}$ xác định khi $(x-1)^3 \neq 0$ hay $x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$ xác định khi $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty)$.

• Ví dụ 2

Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{4x^2 - 3x - 1}$; b) $y = \left(x^2 + x - 4\right)^{\frac{1}{4}}$; c) $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^{\sqrt{3}}$.

Giải

a) Ta có $y = (4x^2 - 3x - 1)^{\frac{1}{2}}$ nên

$$y' = \frac{1}{2}(4x^2 - 3x - 1)^{-\frac{1}{2}}(4x^2 - 3x - 1)' = \frac{8x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x - 1}}.$$

b) $y' = \frac{1}{4}\left(x^2 + x - 4\right)^{-\frac{3}{4}}(2x + 1)$.

c) $y' = \sqrt{3}\left(x^2 - 3x + 2\right)^{\sqrt{3}-1}(2x - 3)$.

• *Ví dụ 3*

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^{-4}$; b) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$.

Giải

a) $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số đã cho là hàm số chẵn vì $y(-x) = y(x)$.

$$y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$$

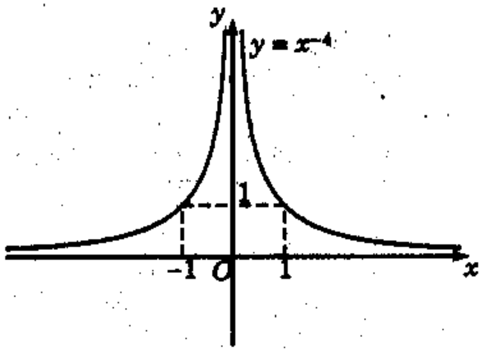
$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^+} y = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận đứng là trục tung, tiệm cận ngang là trục hoành.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

• Đồ thị (H.14) nhận trục tung là trục đối xứng.



Hình 14

b) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$.

Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}}$ là $D = (0\ ;\ +\infty)$.

$$y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} > 0,\ \forall x \in D \text{ nên hàm số luôn đồng biến.}$$

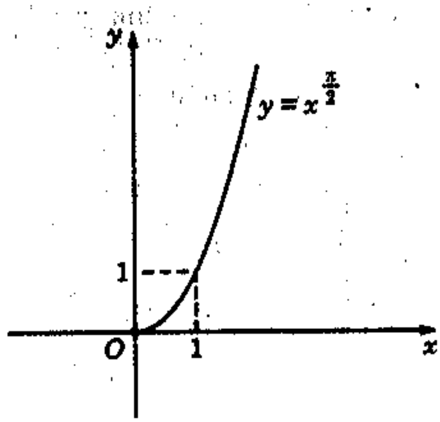
$$\lim_{x\to 0^+} y = 0\ ,\ \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	||	$+$	
y	|| 0	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị (H.15).



Hình 15

• *Ví dụ 4*

Hãy vẽ đồ thị của mỗi cặp hàm số sau trên cùng một hệ trục toạ độ :

a) $y = x^4$ và $y = x^{\frac{1}{4}}$; b) $y = x^5$ và $y = x^{-5}$.

Giải

a) • Xét hàm số $y = x^4$, ta có

Tập xác định : $\mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3.$$

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Xét hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$, ta có

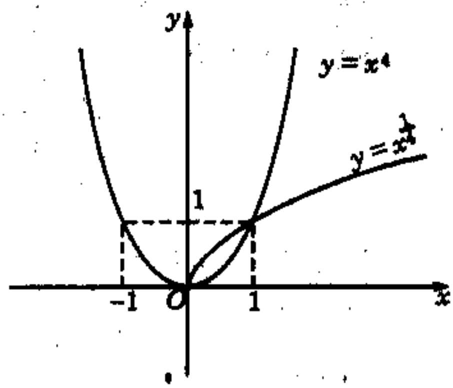
Tập xác định : $(0 ; +\infty)$.

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \; ; \; y' > 0, \; \forall x > 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} y = 0.$$

– Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 16

• Đồ thị của hai hàm số $y = x^4$, $y = x^{\frac{1}{4}}$ có dạng như Hình 16.

b) • Xét hàm số $y = x^5$.

Tập xác định : $\mathbb{R}$. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$y' = 5x^4.$$

Ta có $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Xét hàm số $y = x^{-5}$.

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$y' = -5x^{-6}.$$

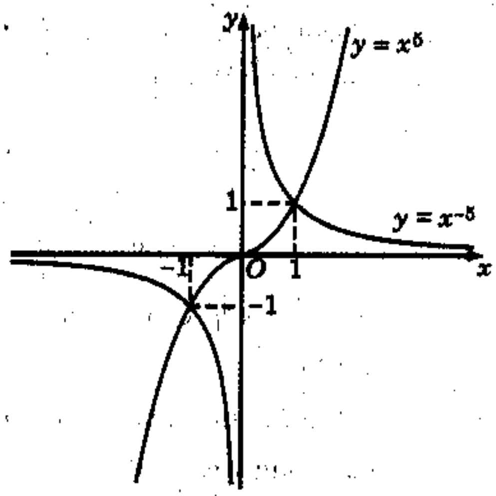
$y' < 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; +\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} y = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} y = +\infty.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0



Hình 17

• Đồ thị của hai hàm số $y = x^5$ và $y = x^{-5}$ có dạng ở Hình 17. Cả hai đồ thị này đều có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

• Ví dụ 5

Từ các đồ thị ở câu b) của Ví dụ 4, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = |x|^5$; b) $y = |x^{-5}|$.

Giải

a) Ta có

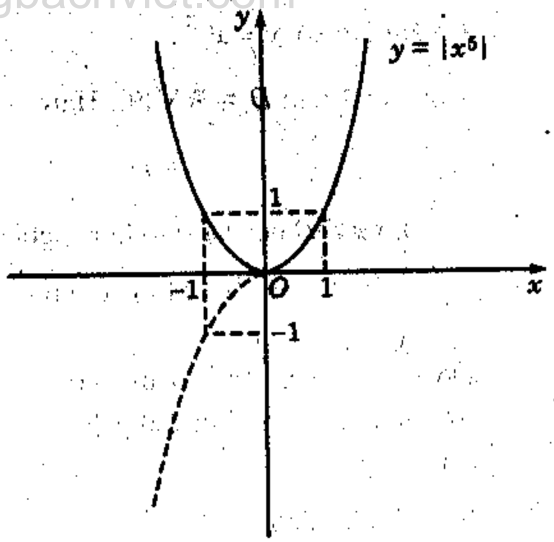
$$y = |x|^5 = \begin{cases} x^5, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^5, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của $y = |x|^5$ gồm hai phần :

– Phần đồ thị của hàm số $y = x^5$ ứng với $x \geq 0$.

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^5$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = |x|^5$ có dạng như ở Hình 18.



Hình 18

b) Ta có

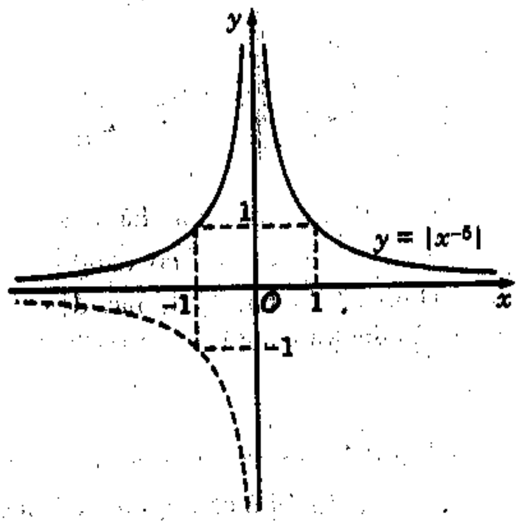
$$y = |x^{-5}| = \begin{cases} x^{-5} & \text{nếu } x > 0 \\ -x^{-5} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của $y = |x^{-5}|$ cũng gồm :

– Phần đồ thị của hàm số $y = x^{-5}$ ứng với $x > 0$;

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^{-5}$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = |x^{-5}|$ có dạng như ở Hình 19.



Hình 19

C. BÀI TẬP

2.6. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = (x^2 - 4x + 3)^{-2}$;

b) $y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}$;

c) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$;

d) $y = (x^2 + x - 6)^{-\frac{1}{3}}$.

2.7. Tính đạo hàm của các hàm số cho ở bài tập 2.6.

2.8. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^{-3}$; b) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; c) $y = x^{\frac{\pi}{4}}$;

2.9. Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một hệ trục toạ độ :

$$y = x^{6} \text{ và } y = x^{-6}.$$

2.10. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x^{\frac{1}{2}}$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

Hãy so sánh giá trị của các hàm số đó khi $x = 0$; 0,5 ; 1 ; $\frac{3}{2}$; 2 ; 3 ; 4.

2.11. Hãy viết các số sau theo thứ tự tăng dần :

a) $(0{,}3)^{\pi}$, $(0{,}3)^{0{,}5}$, $(0{,}3)^{\frac{2}{3}}$, $(0{,}3)^{3{,}1415}$; b) $\sqrt{2^{\pi}}$, $(1{,}9)^{\pi}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, π^{π} ;

c) 5^{-2}, $5^{-0{,}7}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2{,}1}$; d) $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$, $(1{,}3)^{-\frac{2}{3}}$, $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$.

§3. Lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

2. Các tính chất

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1 ;$$

$$a^{\log_a b} = b, \ \log_a(a^{\alpha}) = \alpha.$$

3. Các quy tắc tính

- Với các số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$, ta có

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 ;$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 .$$

• Với các số dương a, b và $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b ; \qquad \log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b ; \qquad \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b .$$

• Với các số dương a, b, c và $a \neq 1$, $c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} ; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1) ; \quad \log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \, (\alpha \neq 0).$$

4. Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên

$\log_{10} x = \lg x$ hoặc $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính

a) $3^{5\log_3 2}$; b) $\log_3 \log_2 8$;

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

Giải

a) $3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$.

b) $\log_3 \log_2 8 = \log_3 \log_2 2^3 = \log_3 3 = 1$.

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} =$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{45}\right)^3$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 20 + \log_{\frac{1}{3}} 45$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{36.45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} 81 = -\log_3 3^4 = -4.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho a và b là các số dương. Tìm x, biết :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$; b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

Giải

Với a và b là các số dương, ta có :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 = \log_3\left(a^4b^7\right)$.

Vậy $x = a^4b^7$.

b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b = \log_{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} + \log_{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{7}} = \log_{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{4}{7}}\right)$.

Vậy $x = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{4}{7}}$.

• ***Ví dụ 3***

Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a.

Giải

Ta có $\log_4 1250 = \log_{2^2}\left(2.5^4\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(2.5^4\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\log_2 2 + \log_2 5^4\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 4\log_2 5\right).$$

Vậy $\log_4 1250 = \frac{1}{2}(1 + 4a)$.

• ***Ví dụ 4***

Cho $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Chứng minh rằng $ab + 5(a - b) = 1$.

Giải

Ta có $$a = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Suy ra $$\log_2 3 = \frac{2a - 1}{2 - a}. \qquad (1)$$

(Hiển nhiên $2 - a \neq 0$ vì $\log_{12}18 < \log_{12}12^2 = 2$).

Tương tự, $$b = \log_{24}54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}.$$

Suy ra $$\log_2 3 = \frac{3b - 1}{3 - b}. \qquad (2)$$

(Hiển nhiên $b \neq 3$, vì $\log_{24}54 < \log_{24}24^3 = 3$).

Từ (1) và (2) ta có $$\frac{2a - 1}{2 - a} = \frac{3b - 1}{3 - b}$$

hay $$6a - 2ab - 3 + b = 6b - 3ab - 2 + a.$$

Vậy $$ab + 5(a - b) = 1.$$

• *Ví dụ 5*

Cho $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$. Hãy tính $\log_c x$ theo p, q, r.

Giải

Từ đề bài suy ra $$\log_x abc = \frac{1}{r}$$

hay $$\log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{r}.$$

Do đó $$\log_x c = \frac{1}{r} - \log_x a - \log_x b = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Vậy $$\log_c x = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

• *Ví dụ 6*

Hãy so sánh :

a) $\frac{1}{2} + \log 3$ với $\log 19 - \log 2$; b) $\log\frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ với $\frac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

Giải

a) Ta có $$\alpha = \frac{1}{2} + \log 3 = \frac{1}{2}\log 10 + \log 3 = \log 3\sqrt{10}$$

nên $\quad 3\sqrt{10} = 10^{\alpha}$;

$$\beta = \log 19 - \log 2 = \log\frac{19}{2} \text{ nên } \frac{19}{2} = 10^{\beta}.$$

Ta so sánh hai số $3\sqrt{10}$ và $\frac{19}{2}$.

Ta có $\quad (3\sqrt{10})^2 = 9.10 = 90 = \frac{360}{4},$

$$\left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$$

nên $\quad 3\sqrt{10} < \frac{19}{2}.$

Suy ra $10^{\alpha} < 10^{\beta}$.

Theo tính chất của luỹ thừa với số mũ thực, cơ số lớn hơn 1, ta có $\alpha < \beta$.

Vậy $\quad \frac{1}{2} + \log 3 < \log 19 - \log 2.$

b) Ta có $\quad \frac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2} = \log(5\sqrt{7})^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{5\sqrt{7}}.$

Đặt $\alpha = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$ thì $\sqrt{5\sqrt{7}} = 10^{\alpha}$.

Đặt $\beta = \log\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ thì $\frac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^{\beta}$.

So sánh hai số $\sqrt{5\sqrt{7}}$ và $\frac{5+\sqrt{7}}{2}$,

ta có $\quad \sqrt{5\sqrt{7}}^{\,2} = 5\sqrt{7},$

$$\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{32+10\sqrt{7}}{4} = 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7}.$$

Xét hiệu $\quad 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 8 - \frac{5}{2}\sqrt{7} = \frac{16-5\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{256}-\sqrt{175}}{2} > 0$

nên $\quad 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} > 5\sqrt{7}.$

Suy ra $\quad \frac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}.$

Từ đó $10^{\beta} > 10^{\alpha}$.

Vậy $\beta > \alpha$, tức là $\log\frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

C. BÀI TẬP

2.12. Tính :

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$;

b) $10^{3-\log 5}$;

c) $2\log_{27}\log 1000$;

d) $3\log_2\log_4 16+\log_{\frac{1}{2}}2$.

2.13. Tính :

a) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7\sqrt[3]{21}$;

b) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$;

c) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$.

2.14. Tìm x, biết :

a) $\log_5 x=2\log_5 a-3\log_5 b$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}}b$.

2.15. a) Cho $a=\log_3 15$, $b=\log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}}50$, theo a và b.

b) Cho $a=\log_2 3$, $b=\log_3 5$, $c=\log_7 2$. Hãy tính $\log_{140}63$ theo a, b, c.

2.16. Hãy so sánh mỗi cặp số sau :

a) $\log_3\frac{6}{5}$ và $\log_3\frac{5}{6}$;

b) $\log_{\frac{1}{3}}9$ và $\log_{\frac{1}{3}}17$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}e$ và $\log_{\frac{1}{2}}\pi$;

d) $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.17. Chứng minh rằng :

a) $\log_{a_1}a_2.\log_{a_2}a_3.\log_{a_3}a_4...\log_{a_{n-1}}a_n=\log_{a_1}a_n$.

b) $\dfrac{1}{\log_a b}+\dfrac{1}{\log_{a^2}b}+\dfrac{1}{\log_{a^3}b}+...+\dfrac{1}{\log_{a^n}b}=\dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$.

§4. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

• Hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

• Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi x và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Đặc biệt, $(e^x)' = e^x$.

• Các tính chất :

a) Tập xác định của hàm số mũ là $\mathbb{R}$.

b) Khi $a > 1$ hàm số mũ luôn đồng biến.

Khi $0 < a < 1$ hàm số mũ luôn nghịch biến.

c) Đồ thị của hàm số mũ có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $(0 ; 1)$, $(1 ; a)$ và nằm phía trên trục hoành.

2. Hàm số lôgarit

• Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

• Hàm số lôgarit có đạo hàm tại mọi x dương và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

• Các tính chất :

a) Tập xác định của hàm số lôgarit là $(0 ; +\infty)$.

b) Khi $a > 1$: hàm số lôgarit luôn đồng biến.

Khi $0 < a < 1$: hàm số lôgarit luôn nghịch biến.

c) Đồ thị của hàm số lôgarit có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1 ; 0)$, $(a ; 1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

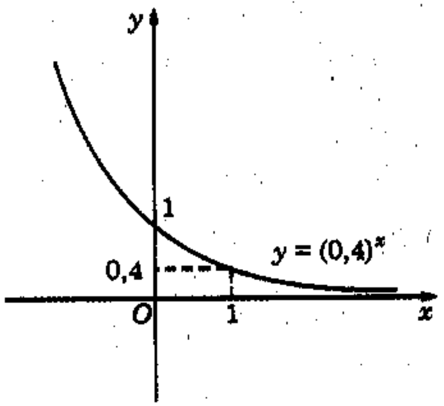
a) $y = (0,4)^x$; b) $y = (2,5)^x$; c) $y = -(0,4)^x$; d) $y = (2,5)^{|x|}$.

Giải

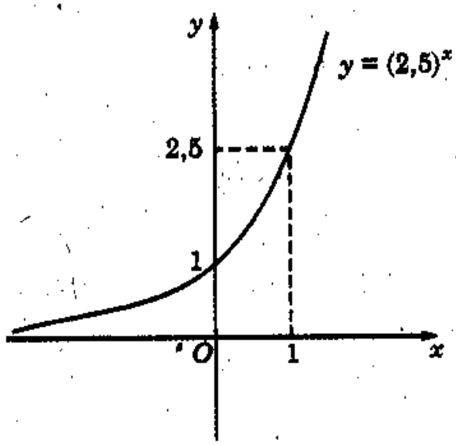
a) Hàm số $y = (0,4)^x$ là hàm số mũ với cơ số nhỏ hơn 1 nên luôn nghịch biến. Đồ thị trên Hình 20.

b) Hàm số $y = (2,5)^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị trên Hình 21.

c) Hàm số $y = -(0,4)^x$ có đồ thị đối xứng với đồ thị của hàm số $y = (0,4)^x$ qua trục hoành (H.22).



Hình 20



Hình 21

d) Ta có

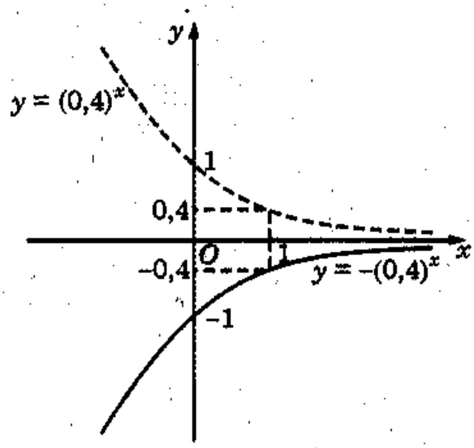
$$y = (2,5)^{|x|} = \begin{cases} (2,5)^x & \text{nếu } x \geq 0 \\ (2,5)^{-x} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Vì $(2,5)^{-x} = \left(\dfrac{1}{2,5}\right)^x = (0,4)^x$ nên đồ thị của hàm số $y = (2,5)^{|x|}$ gồm :

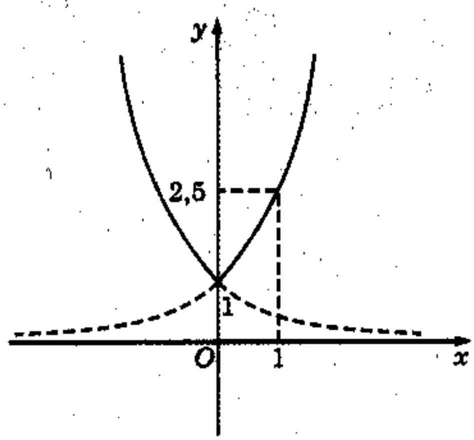
– Phần đồ thị của hàm số $y = (2{,}5)^x$ ứng với $x \geq 0$.

– Phần đồ thị của hàm số $y = (0{,}4)^x$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của $y = (2{,}5)^{|x|}$ có dạng như ở Hình 23.



Hình 22



Hình 23

Chú ý

Hàm số $y = (2{,}5)^{|x|}$ là hàm số chẵn, vì

$$y(-x) = (2{,}5)^{|-x|} = (2{,}5)^{|x|} = y(x).$$

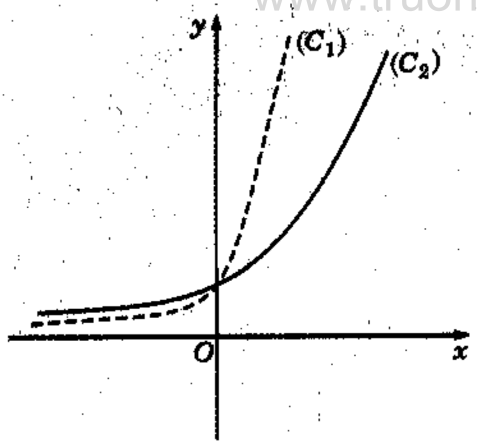
Do đó, đồ thị của hàm số này nhận trục tung là trục đối xứng.

• ***Ví dụ 2***

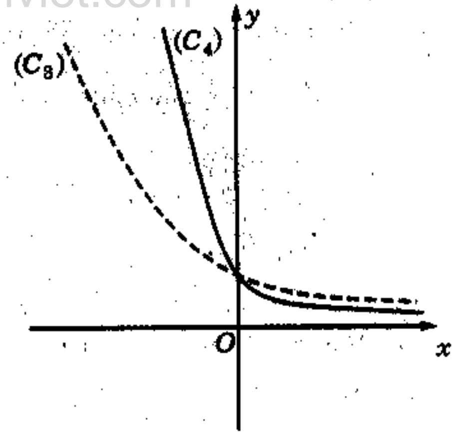
Các hình 24 và 25 là đồ thị của bốn hàm số

$$y = \left(\sqrt{2}\right)^x,\ y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x,\ y = 5^x,\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Hãy chỉ ra đồ thị tương ứng với mỗi hàm số và giải thích.



Hình 24



Hình 25

Giải

• Ta có (C_1), (C_2) đi lên từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số đồng biến $y = (\sqrt{2})^x$, $y = 5^x$. Mặt khác, khi $x > 0$ thì $(\sqrt{2})^x < 5^x$, khi $x < 0$ thì $(\sqrt{2})^x > 5^x$. Vậy (C_1) là đồ thị của hàm số $y = 5^x$, (C_2) là đồ thị của hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

• Ta có (C_3), (C_4) đi xuống từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số nghịch biến $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$, $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. Ngoài ra, khi $x > 0$ thì $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$, khi $x < 0$ thì $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$.

Vậy (C_3) là đồ thị của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$, (C_4) là đồ thị của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$.

• ***Ví dụ 3***

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^x$ trên đoạn $[-1 ; 2]$.

Giải

Ta có $y = 2^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến.

Do đó, giá trị lớn nhất của y trên đoạn $[-1 ; 2]$ là $\max\limits_{[-1 ; 2]} y = y(2) = 2^2 = 4$,

giá trị nhỏ nhất của y trên đoạn $[-1 ; 2]$ là $\min\limits_{[-1 ; 2]} y = y(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

• ***Ví dụ 4***

Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3\left(x^2 + 2x\right)$; b) $y = \log_{0,2}\left(4 - x^2\right)$;

c) $y = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{3 - x}$; d) $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$.

Giải

a) Hàm số $y = \log_3\left(x^2 + 2x\right)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0$ hay $x < -2$ hoặc $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty ; -2) \cup (0 ; +\infty)$.

b) Hàm số $y = \log_{0,2}\left(4 - x^2\right)$ xác định khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2 ; 2)$.

c) Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{3 - x}$ xác định khi $\dfrac{1}{3 - x} > 0$ hay $x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty ; 3)$.

d) Hàm số $y = \dfrac{2}{\log_4 x - 3}$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (0 ; 64) \cup (64 ; +\infty)$.

• ***Ví dụ 5***

Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log x$; b) $y = |\log x|$; c) $y = 2\ln x$; d) $y = \ln x^2$.

Giải

a) Ta có $y = \log x$ là hàm số lôgarit có cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị ở Hình 26.

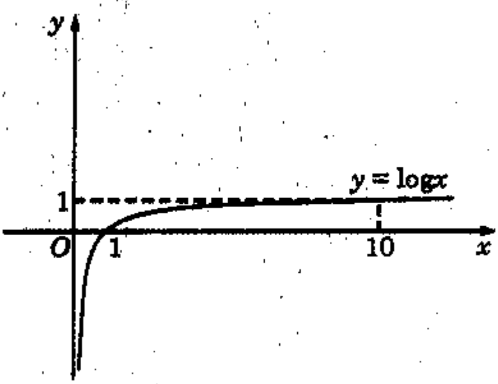
b) $y = |\log x| = \begin{cases} \log x, \text{ khi } \log x \geq 0 \\ -\log x, \text{ khi } \log x < 0. \end{cases}$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = |\log x|$ gồm :

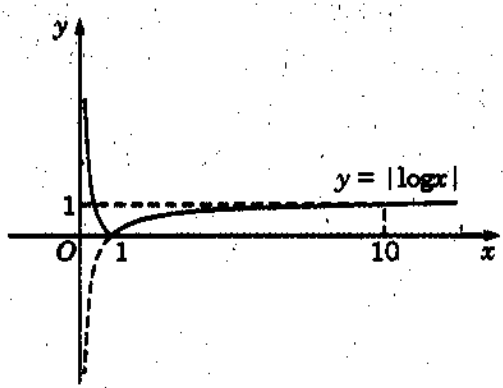
– Phần đồ thị của hàm số $y = \log x$ ứng với $\log x \geq 0$.

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = \log x$ ứng với $\log x < 0$.

Vậy đồ thị có dạng như ở Hình 27.



Hình 26



Hình 27

c) Ta có $\ln x$ là hàm số lôgarit với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến, suy ra hàm số $y = 2\ln x$ cũng luôn luôn đồng biến. Đồ thị ở Hình 28.

d) Tập xác định của hàm số $y = \ln x^2$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

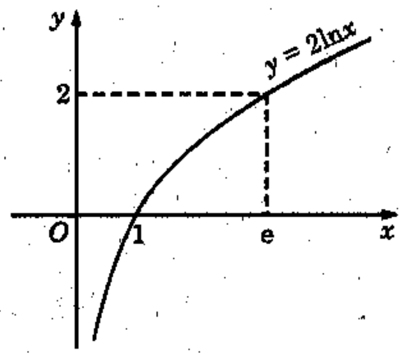
Ta có $y = \ln x^2 = \begin{cases} 2\ln x, & \text{khi } x > 0 \\ 2\ln(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = \ln x^2$ gồm :

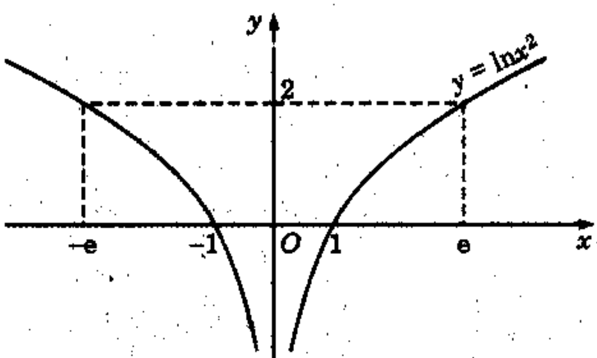
– Phần đồ thị của hàm số $y = 2\ln x$ ứng với $x > 0$.

– Phần đối xứng qua trục tung của đồ thị đó.

Vậy đồ thị có dạng như ở Hình 29.



Hình 28



Hình 29

• *Ví dụ 6*

Cho $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2004}{2005}\right).$$

Giải

Ta có nhận xét : Nếu $a + b = 1$ thì

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a\left(4^b + 2\right) + 4^b\left(4^a + 2\right)}{\left(4^a + 2\right)\left(4^b + 2\right)}$$

$$= \frac{4^{a+b} + 2.4^a + 4^{a+b} + 2.4^b}{4^{a+b} + 2.4^a + 2.4^b + 4} = \frac{2.4^a + 2.4^b + 8}{2.4^a + 2.4^b + 8} = 1.$$

Áp dụng nhận xét đó, ta được

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2004}{2005}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2005}\right) + f\left(\frac{2003}{2005}\right)\right] + \dots +$$

$$+ \left[f\left(\frac{1002}{2005}\right) + f\left(\frac{1003}{2005}\right)\right] = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1002 \text{ số hạng}} = 1002.$$

C. BÀI TẬP

2.18. Hãy so sánh mỗi số sau với 1 :

a) $(0{,}1)^{\sqrt{2}}$; b) $(3{,}5)^{0{,}1}$;

c) $\pi^{-2{,}7}$; d) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1{,}2}$.

2.19. Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị của mỗi cặp hàm số sau :

a) $y = 2^x$ và $y = 8$; b) $y = 3^x$ và $y = \dfrac{1}{3}$;

c) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ và $y = \dfrac{1}{16}$; d) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ và $y = 9$.

2.20. Sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ, hãy so sánh mỗi cặp số sau :

a) $(1{,}7)^3$ và 1 ; b) $(0{,}3)^2$ và 1 ;

c) $(3{,}2)^{1,5}$ và $(3{,}2)^{1,6}$; d) $(0{,}2)^{-3}$ và $(0{,}2)^{-2}$;

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; g) 6^{π} và $6^{3,14}$.

2.21. Từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 3^x - 2$; b) $y = 3^x + 2$;

c) $y = |3^x - 2|$; d) $y = 2 - 3^x$.

2.22. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

2.23. Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau :

a) 1,5 ngày đêm ? b) 3,5 ngày đêm ?

2.24. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ ?

2.25. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$; b) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$;

c) $y = \log_{0,7}\dfrac{x^2 - 9}{x + 5}$; d) $y = \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x - 4}{x + 4}$;

e) $y = \log_{\pi}(2^x - 2)$; g) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$.

2.26. Tính đạo hàm của các hàm số cho ở bài tập **2.25**.

2.27. Từ đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

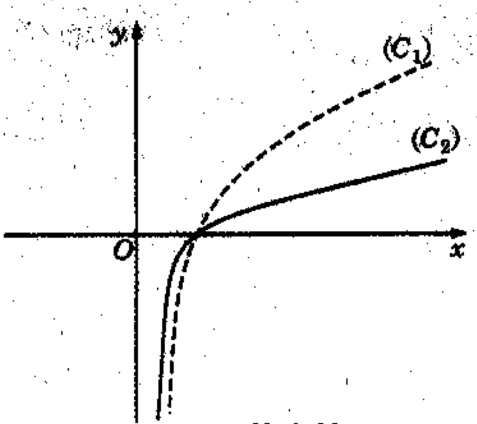
a) $y = |\log_4 x|$; b) $y = \log_4 |x|$;

c) $y = \log_4 x + 2$; d) $y = 1 - \log_4 x$.

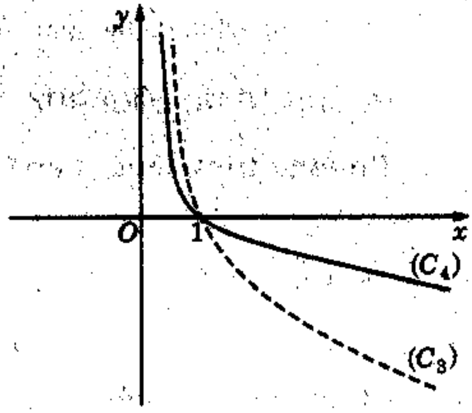
2.28. Các hình 30 và 31 là đồ thị của bốn hàm số

$$y = \log_{\sqrt{2}} x,\ y = \log_{\frac{1}{e}} x, \qquad y = \log_{\sqrt{5}} x,\ y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Hãy chỉ rõ đồ thị tương ứng với mỗi hàm số và giải thích.



Hình 30



Hình 31

2.29. Hãy so sánh x với 1, biết rằng :

a) $\log_3 x = -0,3$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1,7$;

c) $\log_2 x = 1,3$;

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -1,1$.

§5. Phương trình mũ và phương trình lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

$$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

2. Phương trình mũ đơn giản

a) Phương trình có thể đưa về phương trình mũ cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp :

- Đưa về cùng một cơ số ;
- Đặt ẩn phụ ;
- Lấy lôgarit hai vế (lôgarit hoá).

b) Phương trình có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

c) Phương trình có thể giải bằng cách áp dụng tính chất của hàm số mũ.

II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x = b \; (a > 0, a \neq 1).$$

Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất

$$x = a^b.$$

2. Phương trình lôgarit đơn giản

a) Phương trình có thể đưa về phương trình lôgarit cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp :

- Đưa về cùng một cơ số ;
- Đặt ẩn phụ ;
- Mũ hoá hai vế.

b) Phương trình có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải các phương trình sau :

a) $(1{,}5)^{5x-7} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$; b) $7^{x-1} = 2^x$;

c) $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$; d) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3.$

Giải

a) Ta có $\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = (1{,}5)^{-1}$ nên phương trình đã cho có dạng

$$(1{,}5)^{5x-7} = (1{,}5)^{-x-1}.$$

Vậy $5x - 7 = -x - 1$ hay $x = 1$.

b) Phương trình đã cho tương đương với.

$$\frac{7^x}{7} = 2^x \text{ hay } \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7.$$

Đây là phương trình cơ bản. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \log_{\frac{7}{2}} 7.$$

c) Đặt $t = e^{3x}$ $(t > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Từ đó, ta có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Vậy $e^{3x} = 1$ hoặc $e^{3x} = 2$ nên $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{3}\ln 2$.

d) Đặt $t = e^{2x}$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$t - \frac{4}{t} = 3 \text{ hay } t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Phương trình này chỉ có một nghiệm dương $t = 4$, suy ra $e^{2x} = 4$.

Vậy $x = \frac{1}{2}\ln 4$ hay $x = \ln 2$.

Đôi khi, người ta còn giải phương trình mũ bằng phương pháp đồ thị.

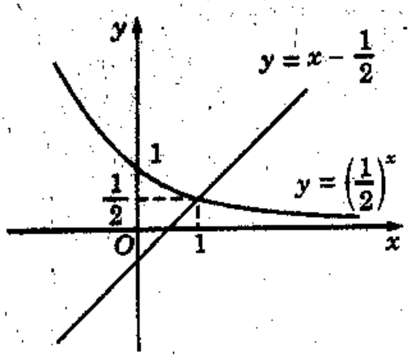
• ***Ví dụ 2***

Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

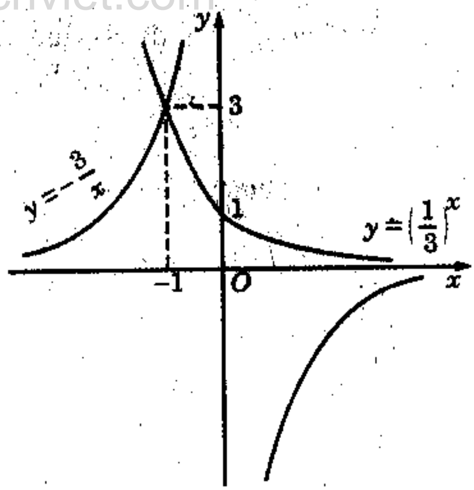
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$.

Giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.32), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến, $y = x - \frac{1}{2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.



Hình 32



Hình 33

b) Vẽ đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và $y = -\frac{3}{x}$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.33), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -1$. Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y = -\frac{3}{x}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định, hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ luôn nghịch biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ghi chú : Giải phương trình bằng đồ thị thường được thực hiện trên máy tính.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng phương trình sau chỉ có một nghiệm $x = 1$:

$$4^x + 5^x = 9.$$

Giải

Ta có $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho vì $4^1 + 5^1 = 9$.

Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = 4^x + 5^x$.

Ta có $f(x)$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ vì $f'(x) = 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó

– Với $x > 1$ thì $f(x) > f(1)$ hay $4^x + 5^x > 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x > 1$.

– Với $x < 1$ thì $f(x) < f(1)$ hay $4^x + 5^x < 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x < 1$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

• ***Ví dụ 4***

Giải các phương trình sau :

a) $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0$; b) $x.2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$.

Giải

a) Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$. Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0.$$

Suy ra $t_1 = -1$ (loại), $t_2 = 5 - 2x$.

Do đó, ta có
$$3^x = 5 - 2x. \qquad (1)$$

Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của (1).

Mặt khác, hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 5 - 2x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại ở dạng

$$x.2^x - x(3-x) - 2.2^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x(x-2) + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)\left(2^x + x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 2^x + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2^x = 1 - x. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Ta có $x = 0$ thoả mãn (2) nên là nghiệm của (2).

Mà $f(x) = 2^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, $g(x) = 1 - x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

• ***Ví dụ 5***

Giải các phương trình sau :

a) $\ln x + \ln(x+1) = 0$; b) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$;

c) $-\log^3 x + 2\log^2 x = 2 - \log x$; d) $\dfrac{1}{4+\log_2 x} + \dfrac{2}{2-\log_2 x} = 1$.

Giải

a) Với điều kiện $x > 0$ (khi đó $x+1>0$), phương trình đã cho tương đương với

$$\ln[x(x+1)] = \ln 1 \text{ hay } x(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Với điều kiện $x > -1$ (khi đó $x+1>0$, $x+3>0$, $x+7>0$), phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$\ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

c) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log x$, ta có phương trình

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -1 \\ \log x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{1}{10} \\ x = 100. \end{array}\right.$

BT-GT 12 (Tay so: 7 - Mat in: B - Mau in: ... X)

d) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $t \neq -4$, $t \neq 2$ và ta có

$$\frac{1}{4+t} + \frac{2}{2-t} = 1 \Leftrightarrow t + 10 = (4+t)(2-t) \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

• ***Ví dụ 6***

Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$;   b) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

Giải

a) Ta có điều kiện của phương trình là $x > 1$ để $\log_2 x > 0$ và $\log_4 x > 0$. Khi đó, phương trình đã cho có thể viết ở dạng

$$\log_{2^2} \log_2 x + \log_2 \log_{2^2} x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 \log_2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

b) Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{\log_2 20}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x\left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\log_2 20}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x\left(\frac{3}{2} + \log_3 2 - \log_{20} 2\right) = 0.$$

Ta có

$$\log_3 2 > \log_3 1 = 0,$$

$$\log_{20} 2 < \log_{20} 20 = 1, \text{ tức là } \frac{3}{2} - \log_{20} 2 > 0.$$

nên $\dfrac{3}{2} - \log_{20} 2 + \log_3 2 > 0$. Do đó, phương trình trở thành $\log_2 x = 0$. Vậy $x = 1$.

• Ví dụ 7

Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log\left(x^2 - x - 6\right) + x = \log(x+2) + 4$; b) $\log_2\left(1 + \sqrt{x}\right) = \log_3 x$.

Giải

a) Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Với $x > 3$ phương trình đã cho tương đương với

$$\log\left(x^2 - x - 6\right) - \log(x+2) = 4 - x \Leftrightarrow \log\frac{x^2 - x - 6}{x+2} = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow \log(x-3) = 4 - x. \qquad (1)$$

Ta có hàm số $f(x) = \log(x-3)$ đồng biến khi $x > 3$, hàm số $g(x) = 4 - x$ là hàm số nghịch biến. Mà $x = 4$ thoả mãn (1). Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của (1), tức là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

Đặt $y = \log_3 x$, ta có $x = 3^y$.

Do đó, phương trình đã cho trở thành

$$\log_2\left(1 + \sqrt{3^y}\right) = y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3^y} = 2^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1. \qquad (2)$$

Ta thấy $y = 2$ thoả mãn phương trình (2).

Mặt khác, hàm số $f(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì

$$f'(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y \ln\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y \ln\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \text{ với mọi } y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

Do đó $y = 2$ là nghiệm duy nhất của (2). Khi đó, $x = 3^2 = 9$.

C. BÀI TẬP

2.30. Giải các phương trình mũ sau :

a) $(0,75)^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

b) $5^{x^2-5x-6} = 1$;

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$;

d) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.125^{\frac{x+17}{x-3}}$.

2.31. Giải các phương trình mũ sau :

a) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3.5^x$;

b) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x}.17 + 7^x.17 = 0$;

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$;

d) $-8^x + 2.4^x + 2^x - 2 = 0$.

2.32. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

a) $2^{-x} = 3x + 10$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = -2x + 5$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$;

d) $3^x = 11 - x$.

2.33. Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log x + \log x^2 = \log 9x$;

b) $\log x^4 + \log 4x = 2 + \log x^3$;

c) $\log_4[(x+2)(x+3)] + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$;

d) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x = 2\log_3(x-2)$.

2.34. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$;

b) $\log_3 x = -x + 11$;

c) $\log_4 x = \frac{4}{x}$;

d) $16^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

2.35. Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log_2(2^x + 1).\log_2(2^{x+1} + 2) = 2$;

b) $x^{\log 9} + 9^{\log x} = 6$;

c) $x^{3\log^3 x - \frac{2}{3}\log x} = 100\sqrt[3]{10}$;

d) $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$.

§6. Bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất phương trình mũ

a) *Bất phương trình mũ cơ bản*

Dạng 1 : $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(\log_a b; +\infty)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b)$.

Dạng 2 : $a^x \geq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $[\log_a b; +\infty)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b]$

Dạng 3 : $a^x < b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là $\varnothing$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(\log_a b; +\infty)$.

Dạng 4 : $a^x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là $\varnothing$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b]$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $[\log_a b; +\infty)$.

b) *Bất phương trình mũ đơn giản*

Để giải các bất phương trình mũ, ta có thể biến đổi để đưa về bất phương trình mũ cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

2. Bất phương trình lôgarit

a) *Bất phương trình lôgarit cơ bản*

Dạng 1 : $\log_a x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$

• Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $\left(a^b ; +\infty\right)$.

• Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(0 ; a^b\right)$.

Dạng 2 : $\log_a x \geq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

• Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $[a^b ;+\infty)$.

• Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(0 ; a^b\right]$.

Dạng 3 : $\log_a x < b$ $(a > 0, a \neq 1)$

• Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $(0 ; a^b)$.

• Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(a^b ;+\infty\right)$.

Dạng 4 : $\log_a x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

• Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $\left(0 ; a^b\right]$.

• Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left[a^b ; +\infty\right)$.

b) *Bất phương trình lôgarit đơn giản*

Để giải các bất phương trình lôgarit, ta có thể biến đổi để đưa về bất phương trình lôgarit cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$;   b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$;   c) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$.

Giải

a) Vì cơ số $\frac{2}{5}$ bé hơn 1 nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2-x} < x.$$

Ta có điều kiện của bất phương trình này là $0 < x \leq 2$. Khi đó, bình phương hai vế, ta được

$$2 - x < x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x \leq 2$.

b) Vì $2,5 = \frac{1}{0,4} = (0,4)^{-1}$ nên bất phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(0,4)^x - 2,5.(0,4)^{-x} - 1,5 > 0.$$

Đặt $t = (0,4)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình

$$t^2 - 1,5t - 2,5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \text{ (loại)} \\ t > 2,5. \end{array}\right.$$

Khi đó, ta có $(0,4)^x > 2,5$ hay $(0,4)^x > (0,4)^{-1}$.

Đây là bất phương trình mũ cơ bản với cơ số nhỏ hơn 1.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -1$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4^x}{4^x - 3^x} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4^x - 4.4^x + 4.3^x}{4^x - 3^x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3.4^x + 4.3^x}{4^x - 3^x} < 0.$$

Chia cả tử và mẫu cho $4^x(4^x > 0)$, ta được $\dfrac{-3+4\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x} < 0.$

Đặt $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $\dfrac{4t-3}{t-1} > 0$, với nghiệm là $t < \dfrac{3}{4}$ hay $t > 1$.

Vì $t > 0$ nên ta có

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{3}{4} \\ t > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \left(\frac{3}{4}\right)^x < \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0. \end{array}\right.$$

• ***Ví dụ 2***

Giải các bất phương trình lôgarit sau :

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq -4$; b) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right) < 1$;

c) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6.$

Giải

a) Ta có điều kiện của bất phương trình là $x^2+2x-8>0$. Khi đó, ta có thể viết bất phương trình dưới dạng

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Vì cơ số $\dfrac{1}{2}$ nhỏ hơn 1 nên bất phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ hoặc } x > 2 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-6\,;-4) \cup (2\,;4]$.

b) Ta có $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 1 \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < \log_3 3$

$\Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \Leftrightarrow 1 > x^2 - 1 > \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2 > x^2 > \frac{9}{8} \Leftrightarrow \sqrt{2} > |x| > \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\sqrt{2} ; \frac{-3}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} ; \sqrt{2}\right)$.

c) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log_{0,2} x$, ta có bất phương trình

$$t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3,$$

suy ra $2 < \log_{0,2} x < 3$ hay $\log_{0,2} 0,04 < \log_{0,2} x < \log_{0,2} 0,008$.

Vì cơ số 0,2 nhỏ hơn 1 nên ta có $0,008 < x < 0,04$ (thoả mãn điều kiện $x > 0$).

• ***Ví dụ 3***

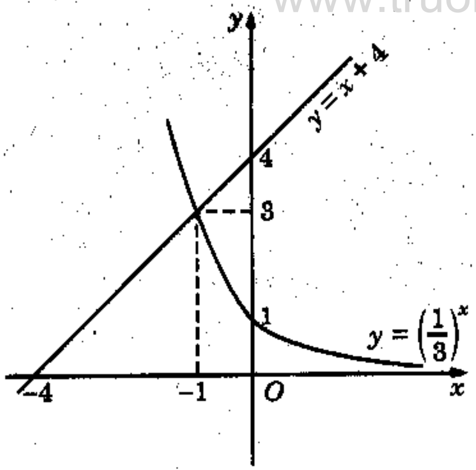
Giải các bất phương trình sau bằng đồ thị :

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le x + 4$;   b) $\log_3 x > 4 - x$.

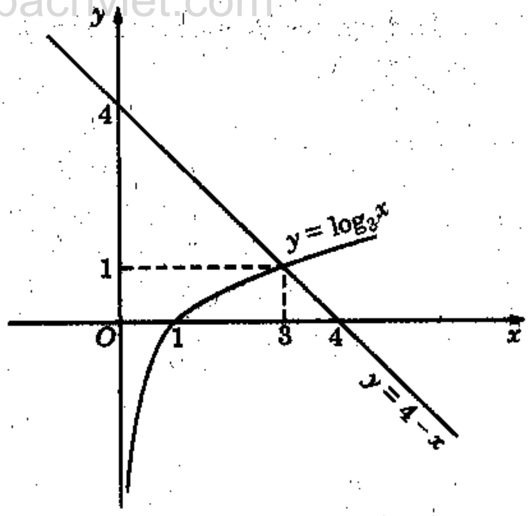
Giải

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và đường thẳng $y = x + 4$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.34), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x = -1$. Từ đồ thị ta thấy : Khi $x \ge -1$ thì đường cong $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nằm phía dưới đường thẳng $y = x + 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-1 ; +\infty)$.



Hình 34



Hình 35

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ và đường thẳng $y = 4 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.35), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x = 3$.

Từ đồ thị ta thấy đường cong $y = \log_3 x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 4 - x$ khi $x > 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3 ; +\infty)$.

C. BÀI TẬP

2.36. Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{|x-2|} < 9$;

b) $4^{|x+1|} > 16$;

c) $2^{-x^2+3x} < 4$;

d) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$;

e) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$;

g) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;

h) $16^x - 4^x - 6 \leq 0$;

i) $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3$.

2.37. Giải các bất phương trình lôgarit sau :

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq -2$;

b) $\log_3(x-3) + \log_3(x-5) < 1$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+3}{x-7} < 0$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$;

e) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} < 1$;

g) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leq 1.$

2.38. Giải các bất phương trình sau bằng đồ thị :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < x - \dfrac{1}{2}$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq x+1$;

c) $\log_{\frac{1}{3}} x > 3x$;

d) $\log_2 x \leq 6 - x$.

Bài tập ôn chương II

2.39. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^{\sqrt{3}}$;

b) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$;

c) $y = x^{-e}$.

2.40. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2}{\sqrt{4^x - 2}}$;

b) $y = \log_6 \dfrac{3x+2}{1-x}$;

c) $y = \sqrt{\log x + \log(x+2)}$;

d) $y = \sqrt{\log(x-1) + \log(x+1)}$.

2.41. Cho hai hàm số

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \; g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

b) Tìm giá trị bé nhất của $f(x)$ trên tập xác định.

2.42. Cho $a + b = c$, với $a > 0$, $b > 0$.

a) Chứng minh rằng $a^m + b^m < c^m$, nếu $m > 1$.

b) Chứng minh rằng $a^m + b^m > c^m$, nếu $0 < m < 1$.

2.43. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; b) $y = 2^{x+1}$; c) $y = 3^{x-2}$.

2.44. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log_3(x-1)$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; c) $y = 1 + \log_3 x$.

2.45. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1}{(2+3x)^2}$; b) $y = \sqrt[3]{(3x-2)^2}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$;

d) $y = 3x^{-3} - \log_3 x$; e) $y = \left(3x^2 - 2\right)\log_2 x$; g) $y = \ln(\cos x)$;

h) $y = e^x \sin x$; i) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.

2.46. Giải các phương trình sau :

a) $9^x - 3^x - 6 = 0$; b) $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$;

c) $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^{x+1} - \frac{1}{2}.9^{x+1}$; d) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

2.47. Giải các phương trình sau :

a) $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$; b) $\log_2(3x+1)\log_3 x = 2\log_2(3x+1)$;

c) $2^{\log_3 x^2}.5^{\log_3 x} = 400$; d) $\ln^3 x - 3\ln^2 x - 4\ln x + 12 = 0$.

2.48. Giải các phương trình sau :

a) $e^{2+\ln x} = x + 3$; b) $e^{4-\ln x} = x$;

c) $(5-x)\log(x-3) = 0$.

2.49. Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $(8,4)^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$; b) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$;

c) $\dfrac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$; d) $\dfrac{1}{3^x + 5} \le \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$.

2.50. Giải các bất phương trình lôgarit sau :

a) $\dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1} < 0$; b) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \le 0$;

c) $\log\left(x^2 - x - 2\right) < 2\log(3-x)$; d) $\ln|x-2| + \ln|x+4| \le 3\ln 2$.

2.51. Giải các bất phương trình sau :

a) $(2x-7)\ln(x+1) > 0$;

b) $(x-5)(\log x + 1) < 0$;

c) $2\log_2^3 x + 5\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$;

d) $\ln\left(3e^x - 2\right) \leq 2x$.

2.52. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-9}$;

b) $3 - \left(\frac{7}{5}\right)^n \leq 0$;

c) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,97$;

d) $\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \geq 2$.

Bài tập trắc nghiệm

1. Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$ thì :

(A) $0 < a < 1$, $b > 1$;

(B) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$;

(C) $a > 1$, $b > 1$;

(D) $a > 1$, $0 < b < 1$.

2. Hàm số $y = x^2e^{-x}$ tăng trong khoảng :

(A) $(-\infty;0)$;

(B) $(2;+\infty)$;

(C) $(0\ ;\ 2)$;

(D) $(-\infty;+\infty)$.

3. Hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi :

(A) $m = 2$;

(B) $m > 2$ hoặc $m < -2$;

(C) $m < 2$;

(D) $-2 < m < 2$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = x(\ln x - 1)$ là :

(A) $\ln x - 1$;

(B) $\ln x$;

(C) $\frac{1}{x} - 1$;

D) 1.

5. Nghiệm của phương trình $\log_2(\log_4 x) = 1$ là :

(A) 2 ;

(B) 4 ;

(C) 8 ;

(D) 16.

6. Nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(3^x - 2\right) < 0$ là :

(A) $x > 1$; (B) $x < 1$;

(C) $0 < x < 1$; (D) $\log_3 2 < x < 1$.

7. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \geq 5 - 2x$ là :

(A) $[1 ; +\infty)$; (B) $(-\infty ; 1]$; (C) $(1 ; +\infty)$; (D) $\varnothing$

8. Hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$

(A) Có một cực tiểu ; (B) Có một cực đại ;

(C) Không có cực trị ; (D) Có một cực đại và một cực tiểu.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG II

§1

2.1. a) 4 ; b) 3 ; c) 5 ; d) $2^{2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{4}$.

2.2. a) $36,5 = \dfrac{73}{2}$; b) $5,9375 = \dfrac{95}{16}$; c) $\dfrac{113}{12}$; d) $\dfrac{289}{27}$.

2.3. Với a và b là các số dương, ta có :

a) $$\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a.$$

b) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[3]{ab}.$$

c) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right).$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a+b$$

d) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{\dfrac{2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{ab}}}$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\sqrt[3]{ab}}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2}=\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

2.4. a) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}<1$;

b) $(0{,}013)^{-1}=\frac{1}{0{,}013}>1$;

c) Tương tự, $\left(\frac{2}{7}\right)^5<1$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$;

e) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}<1$;

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1.$

2.5. a) $\sqrt{17}=\sqrt[6]{17^3}=\sqrt[6]{4913}$; $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}.$

Vậy $\sqrt{17}>\sqrt[3]{28}$.

b) $\sqrt[4]{13}=\sqrt[20]{13^5}=\sqrt[20]{371293}$; $\sqrt[5]{23}=\sqrt[20]{23^4}=\sqrt[20]{279841}.$

Ta có $371293>279841$ nên $\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}.$

c) $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ và $\frac{1}{3}<1$ nên $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}.$

d) $\sqrt{5}<\sqrt{7}$ và $4>1$ nên $4^{\sqrt{5}}<4^{\sqrt{7}}.$

§2

2.6. a) Hàm số xác định khi $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ hay $x \neq 1$ và $x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$.

b) Hàm số xác định khi $x^3 - 8 > 0$ hay $x > 2$. Vậy tập xác định là $(2 ; +\infty)$.

c) Hàm số xác định khi $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$ hay $x(x-1)(x-2) > 0$.

Suy ra $0 < x < 1$ hoặc $x > 2$. Vậy tập xác định là $(0 ; 1) \cup (2 ; +\infty)$.

d) Hàm số xác định khi $x^2 + x - 6 > 0$ hay $x < -3$ và $x > 2$.

Vậy tập xác định là $(-\infty ; -3) \cup (2 ; +\infty)$.

2.7. a) $y' = -2\left(x^2 - 4x + 3\right)^{-3}(2x - 4)$;

b) $y' = \frac{\pi}{3}\left(x^3 - 8\right)^{\frac{\pi}{3}-1}.3x^2 = \pi x^2\left(x^3 - 8\right)^{\frac{\pi}{3}-1}$;

c) $y' = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)^{-\frac{3}{4}}\left(3x^2 - 6x + 2\right)$;

d) $y' = -\frac{1}{3}\left(x^2 + x - 6\right)^{-\frac{4}{3}}(2x + 1)$.

2.8. a) $y = x^{-3}$.

Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

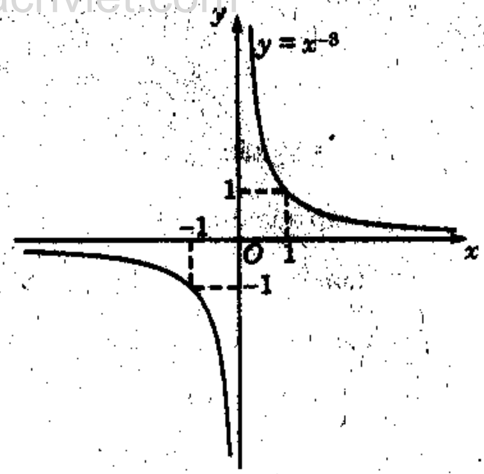
Ta có $y' < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y = 0,\ \lim_{x \to 0^+} y = +\infty,\ \lim_{x \to 0^-} y = -\infty.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0



Hình 36

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là gốc toạ độ (H.36).

b) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

$y' < 0$ với mọi $x \in D$ nên hàm số nghịch biến.

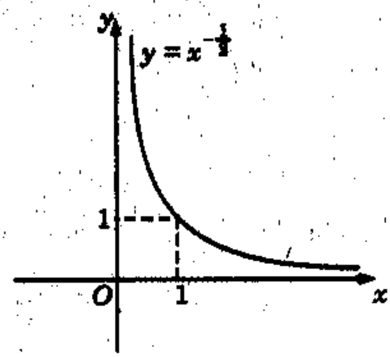
$$\lim_{x\to 0^+} y = +\infty, \ \lim_{x\to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận đứng là trục tung, tiệm cận ngang là trục hoành.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	||	$-$	
y	||	$+\infty$ $\searrow$	0

Đồ thị (H.37)



Hình 37

c) $y = x^{\frac{\pi}{4}}$

Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

$$y' = \frac{\pi}{4}x^{\frac{\pi}{4}-1}.$$

$y' > 0, \forall x \in D$ nên hàm số đồng biến.

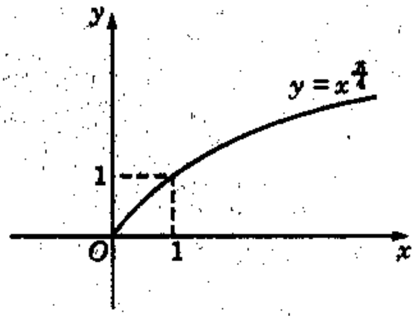
$$\lim_{x \to 0^+} y = 0, \ \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị (H.38)



Hình 38

2.9. • Xét hàm số $y = x^6$.

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$y' = 6x^5.$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Xét hàm số $y = x^{-6}$.

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$y' = -6x^{-7}.$$

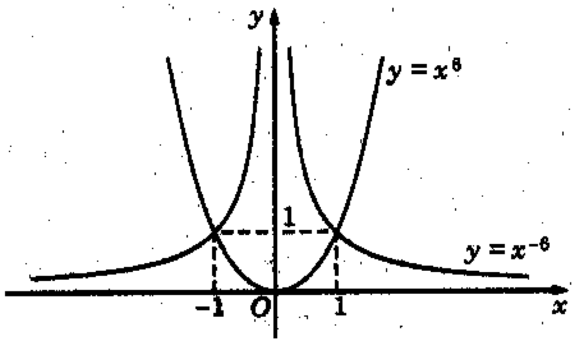
$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^+} y = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	0 ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Đồ thị của các hàm số $y = x^6$, $y = x^{-6}$ như trên Hình 39. Các đồ thị này đều có trục đối xứng là trục tung.



Hình 39

2.10. Đặt $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$;

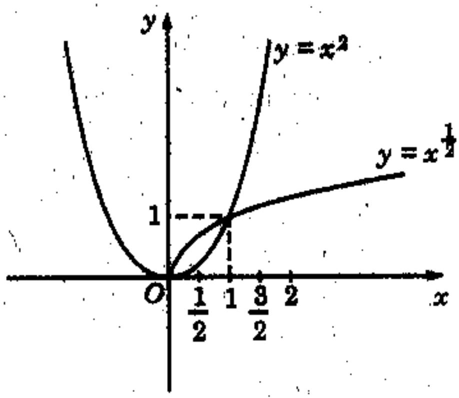
$g(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x > 0.$

Từ đồ thị của hai hàm số đó (H.40), ta có

$f(0,5) < g(0,5)$;

$f(1) = g(1) = 1;\ f\left(\frac{3}{2}\right) > g\left(\frac{3}{2}\right)$;

$f(2) > g(2)$; $f(3) > g(3)$; $f(4) > g(4)$.



Hình 40

2.11. a) $(0,3)^{\pi}$; $(0,3)^{3,1415}$; $(0,3)^{\frac{2}{3}}$; $(0,3)^{0,5}$.

$\left(\text{vì cơ số } a = 0,3 < 1 \text{ và } \pi > 3,1415 > \frac{2}{3} > 0,5\right)$.

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}; \left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$; $(1,9)^{\pi}$; π^{π} $\quad\left(\text{vì } \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} < 1,9 < \pi\right)$.

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$; 5^{-2}; $5^{-0,7}$; $5^{\frac{1}{3}}$.

d) $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$; $(1,3)^{-\frac{2}{3}}$; $(0,5)^{-\frac{2}{3}}$.

§3

2.12. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{10^3}{10^{\log 5}} = \frac{10^3}{5} = 200$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2.

2.13. a) $\log_7 \sqrt{36} - \log_7 14 - \log_7 21 = \log_7 \frac{1}{49} = -2$;

b) $\frac{\log_2 24 - \log_2 \sqrt{72}}{\log_3 18 - \log_3 \sqrt[3]{72}} = \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{9}{8}$;

c) $\frac{\log_2 2^2 + \log_2\left(2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_2\left(2^2.5\right) + 3} = \frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 5}{2 + 3 + \log_2 5} = \frac{1}{2}$.

2.14. a) $x = \frac{a^2}{b^3}$; b) $x = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}}$.

2.15. a) Ta có

- $a = \log_3 15 = \log_3(3.5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

Suy ra $\log_3 5 = a - 1$.

- $b = \log_3 10 = \log_3(2.5) = \log_3 2 + \log_3 5$.

Suy ra $\log_3 2 = b - \log_3 5 = b - (a - 1) = b - a + 1$.

Do đó

$$\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{3^{\frac{1}{2}}}\left(2.5^2\right) = 2\log_3 2 + 4\log_3 5$$

$$= 2(b - a + 1) + 4(a - 1) = 2a + 2b - 2.$$

b) Ta có

$$\log_{140}63 = \log_{140}(3^2.7) = 2\log_{140}3 + \log_{140}7$$

$$= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3(2^2.5.7)} + \frac{1}{\log_7(2^2.5.7)}$$

$$= \frac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1}.$$

Từ đề bài suy ra

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a},$$

$$\log_7 5 = \log_7 2.\log_2 3.\log_3 5 = cab,$$

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2.\log_2 3} = \frac{1}{ca}.$$

Vậy $$\log_{140}63 = \frac{2}{\frac{2}{a} + b + \frac{1}{ca}} + \frac{1}{2c + cab + 1} = \frac{2ac+1}{abc + 2c + 1}.$$

2.16. a) $\log_3 \frac{6}{5} > \log_3 \frac{5}{6}$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} e > \log_{\frac{1}{2}} \pi$;

d) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.17. a) Sử dụng tính chất $\log_a b.\log_b c = \log_a c$.

b) Sử dụng tính chất $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$

và $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

§4

2.18. a) $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$; b) $(3,5)^{0,1} > 1$; c) $\pi^{-2,7} < 1$; d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2} > 1$.

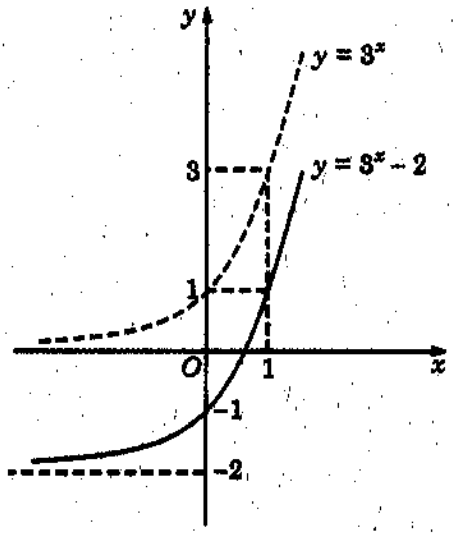
2.19. a) $(3\ ;\ 8)$; b) $\left(-1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$; c) $\left(2\ ;\ \frac{1}{16}\right)$; d) $(-2\ ;\ 9)$.

2.20. a) $(1,7)^3 > 1$; b) $(0,3)^2 < 1$; c) $(3,2)^{1,5} < (3,2)^{1,6}$;

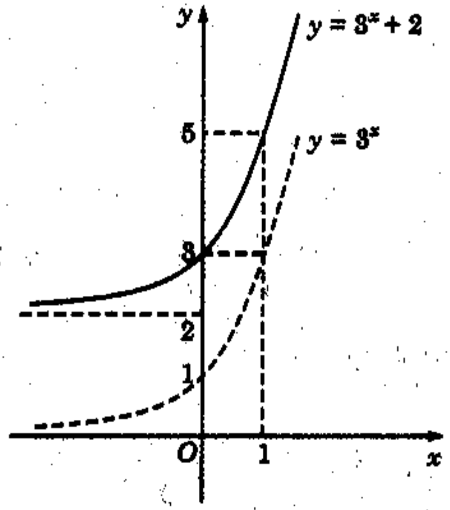
d) $(0,2)^{-3} > (0,2)^{-2}$; e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; g) $6^{\pi} > 6^{3,14}$.

2.21. a) Đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung xuống dưới 2 đơn vị (H.41).

b) Đồ thị của hàm số $y = 3^x + 2$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung lên phía trên 2 đơn vị (H.42).



Hình 41



Hình 42

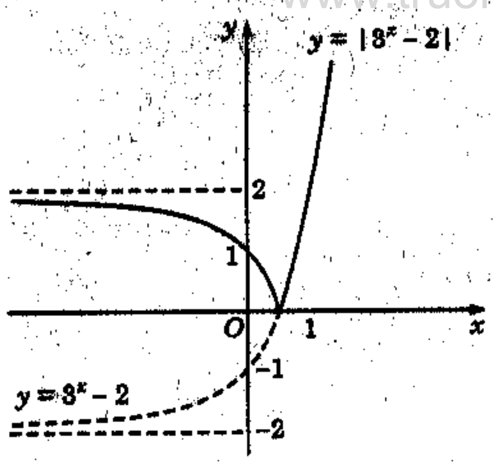
c) $y = |3^x - 2| = \begin{cases} 3^x - 2, & \text{khi } 3^x - 2 \ge 0 \\ -3^x + 2, & \text{khi } 3^x - 2 < 0. \end{cases}$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = |3^x - 2|$ gồm :

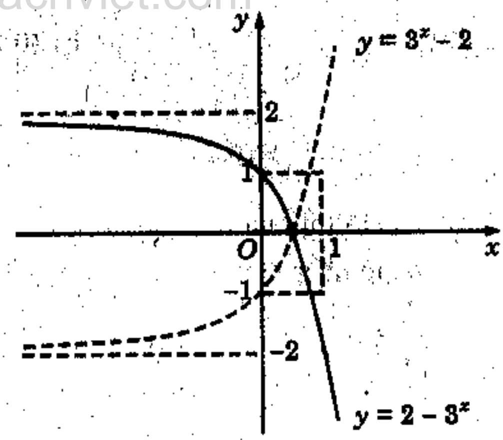
– Phần đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ ứng với $3^x - 2 \ge 0$ (nằm phía trên trục hoành).

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = 3^x - 2$ ứng với $3^x - 2 < 0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = |3^x - 2|$ có dạng như ở Hình 43.



Hình 43



Hình 44

d) $y = 2 - 3^x = -(3^x - 2)$.

Ta có đồ thị của hàm số $y = 2 - 3^x$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = 3^x - 2$ qua trục hoành (H.44).

2.22. Trên đoạn $[-1 ; 1]$, ta có $y = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, \text{ khi } x \in [0 ; 1] \\ 2^{-x}, \text{khi } x \in [-1 ; 0]. \end{cases}$

Do đó, trên đoạn $[0 ; 1]$ hàm số đồng biến, trên đoạn $[-1 ; 0]$ hàm số nghịch biến. Suy ra các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất sẽ đạt được tại các đầu mút.

Ta có $y(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$, $\quad y(0) = 2^0 = 1$, $\quad y(1) = 2^1 = 2$.

Vậy $\max\limits_{[-1\,;\,1]} y = y(1) = y(-1) = 2$, $\min\limits_{[-1\,;\,1]} y = y(0) = 1$.

2.23. Ta biết công thức tính khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t là

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tức là tại thời điểm $t = 0$) ; T là chu kì bán rã.

Ta có $T = 24$ giờ $= 1$ ngày đêm, $m_0 = 250$ gam.

Do đó :

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 1,5 ngày đêm là

$$m(1,5) = 250\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1,5}{1}} \approx 88,388 \text{ (gam)}.$$

b) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 3,5 ngày đêm là

$$m(3,5) = 250\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3,5}{1}} \approx 22,097 \text{ (gam)}.$$

2.24. Gọi trữ lượng gỗ ban đầu là V_0, tốc độ sinh trưởng hàng năm của rừng là i phần trăm. Ta có :

– Sau 1 năm, trữ lượng gỗ là

$$V_1 = V_0 + iV_0 = V_0(1+i);$$

– Sau 2 năm, trữ lượng gỗ là

$$V_2 = V_1 + iV_1 = V_1(1+i) = V_0(1+i)^2;$$

...

– Sau 5 năm, trữ lượng gỗ là

$$V_5 = V_0(1+i)^5.$$

Thay $V_0 = 4.10^5 (m^3)$, $i = 4\% = 0,04$, ta được

$$V_5 = 4.10^5(1+0,04)^5 \approx 4,8666.10^5 (m^3).$$

2.25. a) $D = (-\infty\,;-1) \cup (4\,;+\infty)$; b) $D = (-1\,;6)$;

c) $D = (-5\,;-3) \cup (3\,;+\infty)$; d) $D = (-\infty\,;-4) \cup (4\,;+\infty)$;

e) $D = (1\,;+\infty)$; g) $(3\,;+\infty)$.

2.26. a) $y' = \dfrac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$;

b) $y' = \dfrac{-2x+5}{(-x^2+5x+6)\ln\sqrt{3}} = \dfrac{-4x+10}{(-x^2+5x+6)\ln 3}$;

c) $y' = \dfrac{x^2 + 10x + 9}{(x^2 - 9)(x + 5)\ln 0,7}$; d) $y' = \dfrac{8}{(16 - x^2)\ln 3}$;

e) $y' = \dfrac{2^x \ln 2}{(2^x - 2)\ln \pi}$; g) $y' = \dfrac{3^{x-1}}{3^{x-1} - 9}$.

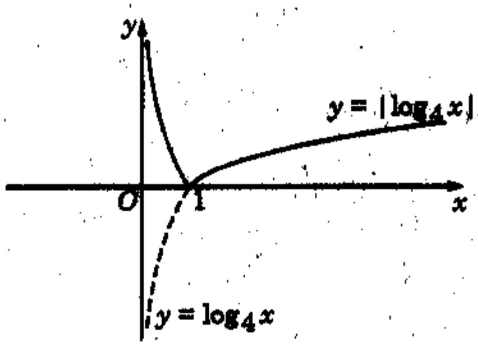
2.27. a) $y = |\log_4 x| = \begin{cases} \log_4 x, \text{ khi } x \geq 1 \\ -\log_4 x, \text{ khi } 0 < x < 1. \end{cases}$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = |\log_4 x|$ gồm :

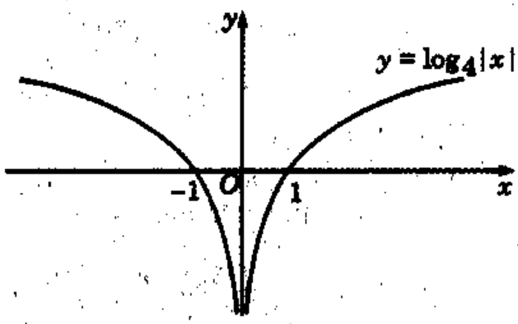
– Phần đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$ ứng với $x \geq 1$.

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = \log_4 x$ ứng với $0 < x < 1$.

Vậy đồ thị có dạng như ở Hình 45.



Hình 45



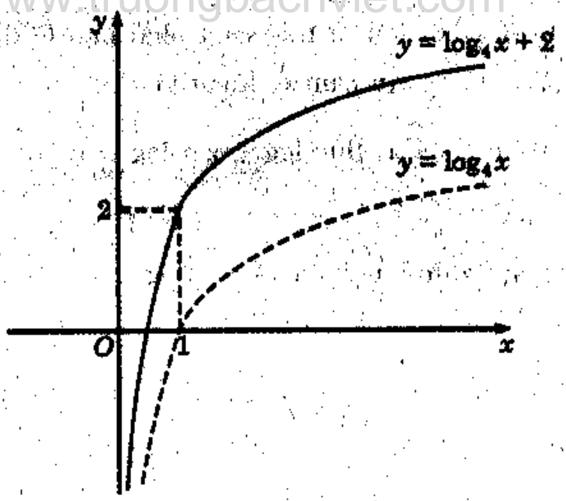
Hình 46

b) Hàm số $y = \log_4 |x|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ và là hàm số chẵn vì $y(-x) = \log_4 |-x| = \log_4 |x| = y(x)$.

Do đó, đồ thị của hàm số này có trục đối xứng là trục tung, trong đó phần đồ thị ứng với $x > 0$ là đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$.

Vậy ta có đồ thị như trên Hình 46.

c) Đồ thị của hàm số $y = \log_4 x + 2$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung lên trên 2 đơn vị (H.47).



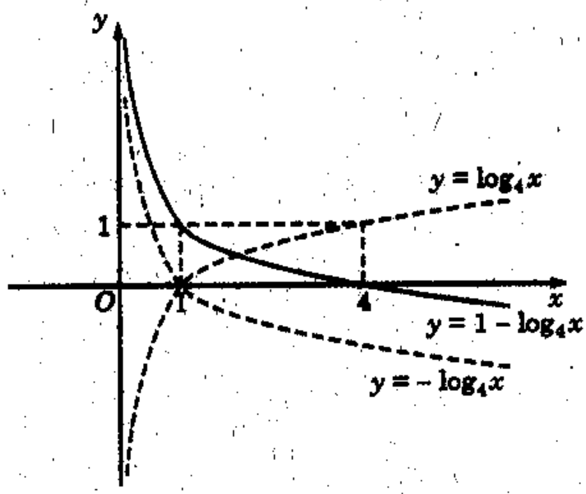
Hình 47

d) Để vẽ đồ thị của hàm số $y = 1 - \log_4 x$, ta thực hiện các bước sau :

– Lấy đối xứng qua trục hoành đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$ để được đồ thị của hàm số $y = -\log_4 x$;

– Tịnh tiến song song với trục tung đồ thị của hàm số $y = -\log_4 x$ lên phía trên 1 đơn vị.

Vậy ta có đồ thị của hàm số $y = 1 - \log_4 x$ như trên Hình 48.



Hình 48

2.28. Ta có (C_1), (C_2) đi lên từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số đồng biến, tức là ứng với hàm số lôgarit có cơ số lớn hơn 1.

Mặt khác, khi $x > 1$ thì $\log_{\sqrt{2}} x > \log_{\sqrt{5}} x$ và khi $0 < x < 1$ thì $\log_{\sqrt{2}} x < \log_{\sqrt{5}} x$.

Do đó, (C_1) là đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$, (C_2) là đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} x$.

• Ta có (C_3), (C_4) đi xuống từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số nghịch biến, nghĩa là ứng với hàm số lôgarit có cơ số nhỏ hơn 1.

Mặt khác, khi $x > 1$ thì $\log_{\frac{1}{e}} x < \log_{\frac{1}{3}} x$ và khi $0 < x < 1$ thì $\log_{\frac{1}{e}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$.

Do đó, (C_3) là đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{e}} x$; (C_4) là đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

2.29. a) $x < 1$; b) $x < 1$; c) $x > 1$; d) $x > 1$.

§5

2.30. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5-x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-5} \Leftrightarrow 2x - 3 = x - 5 \Leftrightarrow x = -2$;

b) $5^{x^2-5x-6} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 6 \end{array}\right.$;

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

d) $2^{5.\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}.5^{3.\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x+25}{x-7}+2} = 5^{\frac{3x+51}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{7x+11}{x-7}} = 5^{\frac{3x+51}{x-3}}$.

Lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế, ta được

$$\frac{7x+11}{x-7} = \frac{3x+51}{x-3}\log_2 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 10x - 33 = \left(3x^2 + 30x - 357\right)\log_2 5 \\ x \neq 7, x \neq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (7 - 3\log_2 5)x^2 - 2(5 + 15\log_2 5)x - (33 - 357\log_2 5) = 0.$$

Ta có $\Delta' = (5 + 15\log_2 5)^2 + (7 - 3\log_2 5)(33 - 357\log_2 5)$

$$= 1296\log_2^2 5 - 2448\log_2 5 + 256 > 0.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{5 + 15\log_2 5 \pm \sqrt{\Delta'}}{7 - 3\log_2 5},$$

đều thoả mãn điều kiện $x \neq 7$ và $x \neq 3$.

2.31. a) $16.2^x + 4.2^x = 5.5^x + 3.5^x \Leftrightarrow 20.2^x = 8.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1$;

b) $16.7^x - 16.5^{2x} = 0 \Leftrightarrow 7^x = 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^x = \left(\frac{7}{25}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$;

c) Chia hai vế cho $12^x\left(12^x > 0\right)$, ta được

$$4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 - 3\left(\frac{4}{3}\right)^x = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $4t + 1 - \frac{3}{t} = 0$ hay $4t^2 + t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Do đó $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1$. Vậy $x = 1$.

d) Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình

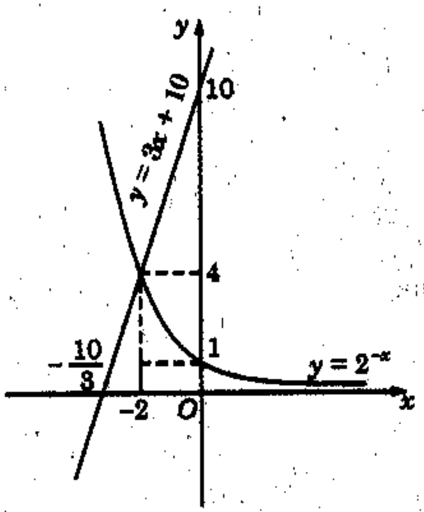
$$-t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2. \end{array}\right.$

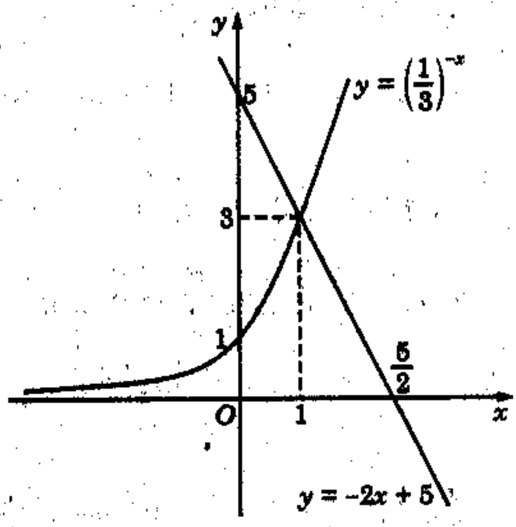
Vậy $x = 0$ và $x = 1$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

2.32. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2^{-x}$ và đường thẳng $y = 3x + 10$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.49) ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$. Thử lại, ta thấy $x = -2$ thoả mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ luôn nghịch biến, hàm số $y = 3x + 10$ luôn đồng biến. Vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất.



Hình 49



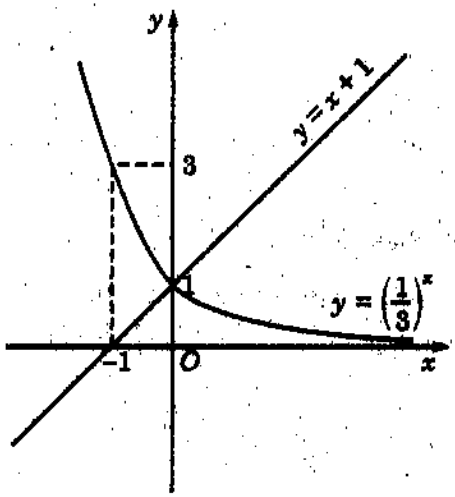
Hình 50

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ và đường thẳng $y = -2x + 5$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.50), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Thử lại, ta thấy $x = 1$ thoả mãn phương trình đã cho.

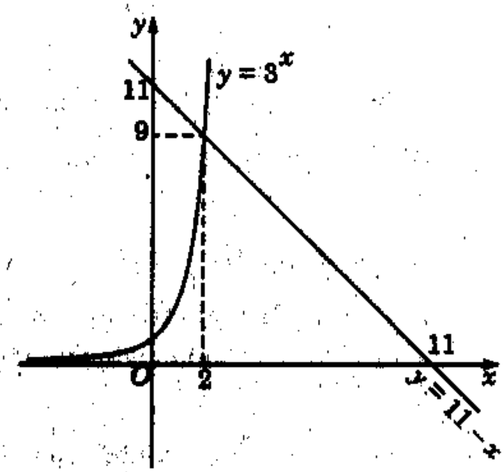
Mặt khác, hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $y = -2x + 5$ luôn nghịch biến.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và đường thẳng $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.51), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 0$. Thử lại, ta thấy $x = 0$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là hàm số luôn nghịch biến, hàm số $y = x + 1$ luôn đồng biến. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.



Hình 51



Hình 52

d) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = 11 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.52), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 2$. Thử lại, ta thấy $x = 2$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = 3^x$ luôn đồng biến, $y = 11 - x$ luôn nghịch biến. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

2.33. a) Với điều kiện $x > 0$, ta có $\log x + 2\log x = \log 9 + \log x \Leftrightarrow \log x = \log 3$ $\Leftrightarrow x = 3$.

b) Với điều kiện $x > 0$, ta có $4\log x + \log 4 + \log x = 2\log 10 + 3\log x$

$\Leftrightarrow \log x = \log 5 \Leftrightarrow x = 5$.

c) Ta có điều kiện của phương trình đã cho là

$$\begin{cases}(x+2)(x+3)>0\\ \dfrac{x-2}{x+3}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-3 \quad \text{hoặc } x>-2\\ x<-3 \quad \text{hoặc } x>2\end{cases} \Leftrightarrow x<-3 \text{ hoặc } x>2. \quad (1)$$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_4\left[(x+2)(x+3)\frac{x-2}{x+3}\right]=\log_4 16 \Leftrightarrow x^2-4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{5}\\ x=-2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm trên đều thoả mãn điều kiện (1).

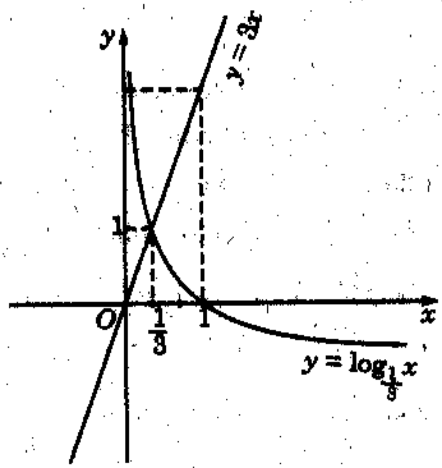
d) Với điều kiện $x>2$, ta có phương trình $2\log_3(x-2)(\log_5 x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0\\ \log_5 x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5.\end{array}\right.$$

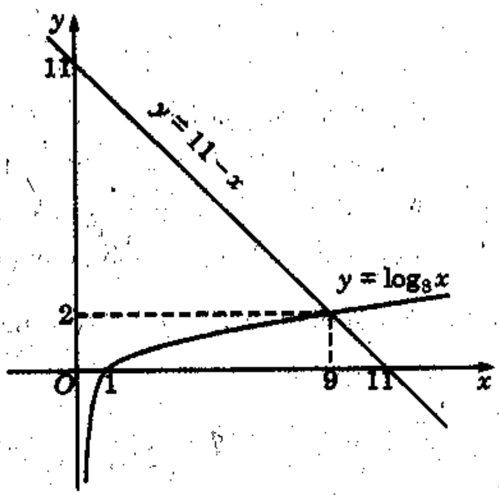
Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện $x>2$.

2.34. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ và đường thẳng $y=3x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.53), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$.

Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ luôn nghịch biến, hàm số $y=3x$ luôn đồng biến. Vậy $x=\dfrac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.



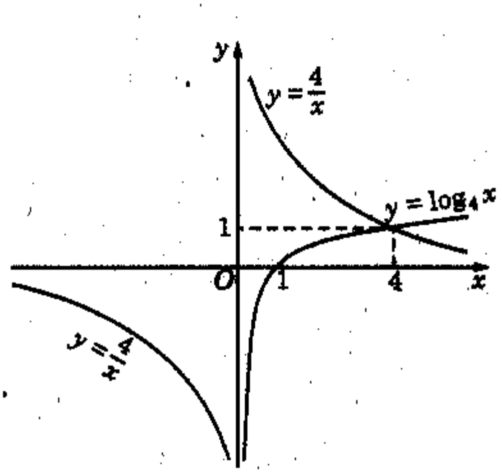
Hình 53



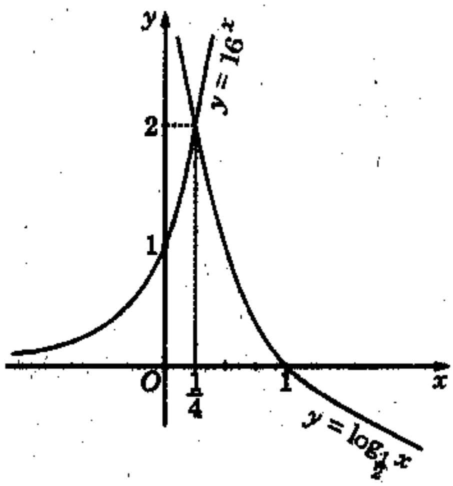
Hình 54

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ và đường thẳng $y = -x + 11$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.54), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 9$. Lập luận tương tự câu a), ta cũng có đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \log_4 x$ và $y = \frac{4}{x}$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.55), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 4$. Ta cũng có hàm số $y = \log_4 x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \frac{4}{x}$ luôn nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$. Do đó, $x = 4$ là nghiệm duy nhất.



Hình 55



Hình 56

d) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 16^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.56), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{4}$. Thử lại, ta thấy $x = \frac{1}{4}$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y = 16^x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ luôn nghịch biến.

Vậy $x = \frac{1}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2.35. a) $\log_2(2^x+1).\log_2[2(2^x+1)]=2 \Leftrightarrow \log_2(2^x+1).\left[1+\log_2(2^x+1)\right]=2.$

Đặt $t=\log_2(2^x+1)$, ta có phương trình $t(1+t)=2 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2^x+1)=1 \\ \log_2(2^x+1)=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x+1=2 \\ 2^x+1=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=1 \\ 2^x=-\dfrac{3}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

b) Với điều kiện $x>0$, ta có

$$\log(x^{\log 9})=\log 9.\log x \text{ và } \log(9^{\log x})=\log x.\log 9$$

nên $$\log(x^{\log 9})=\log(9^{\log x}).$$

Suy ra $x^{\log 9}=9^{\log x}$.

Đặt $t=x^{\log 9}$, ta được phương trình $2t=6 \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow x^{\log 9}=3$

$\Leftrightarrow \log(x^{\log 9})=\log 3 \Leftrightarrow \log 9.\log x=\log 3$

$\Leftrightarrow \log x=\dfrac{\log 3}{\log 9} \Leftrightarrow \log x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{10}$ (thoả mãn điều kiện $x>0$).

c) Với điều kiện $x>0$, lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình đã cho, ta được

$$\left(3\log^3 x-\frac{2}{3}\log x\right).\log x=\frac{7}{3}.$$

Đặt $t=\log x$, ta được phương trình $3t^4-\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{7}{3}=0$

$$\Leftrightarrow 9t^4-2t^2-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=-\dfrac{7}{9} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x=1 \\ \log x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=\dfrac{1}{10}. \end{array}\right.$$

d) Đặt $t = \log_5(x+2)$ với điều kiện $x + 2 > 0$, $x + 2 \neq 1$, ta có

$$1 + \frac{2}{t} = t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0,\ t \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5(x+2) = -1 \\ \log_5(x+2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = \frac{1}{5} \\ x + 2 = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{9}{5} \\ x = 23. \end{array}\right.$$

§6

2.36. a) $3^{|x-2|} < 3^2 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

b) $4^{|x+1|} > 4^2 \Leftrightarrow |x+1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3. \end{array}\right.$

c) $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2. \end{array}\right.$

d) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x \leq -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

e) $\sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 6 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -6 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < 0 \\ \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3$.

g) $\frac{1}{2}.2^{2x} + \frac{1}{4}.2^{2x} + \frac{1}{8}.2^{2x} \geq 448 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 512 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^9 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$.

h) Đặt $t = 4^x$ $(t > 0)$, ta có hệ bất phương trình

$\begin{cases} t^2 - t - 6 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 3 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow 0 < 4^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_4 3$.

i) $\dfrac{3^x}{3^x-2}-3<0 \Leftrightarrow \dfrac{-2.3^x+6}{3^x-2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{3^x-3}{3^x-2}>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x>3\\ 3^x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<\log_3 2.\end{array}\right.$$

2.37. a) $0<x-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1<x\le 10.$

b) $\begin{cases}x>5\\ \log_3[(x-3)(x-5)]<\log_3 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>5\\ x^2-8x+12<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>5\\ 2<x<6\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 5<x<6.$$

c) $\begin{cases}x-7>0\\ \dfrac{2x^2+3}{x-7}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>7\\ 2x^2+3>x-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>7\\ 2x^2-x+10>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>7\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x>7.$$

d) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x^2>\log_{\frac{1}{3}}1 \Leftrightarrow \log_2 x^2<1 \Leftrightarrow \log_2 x^2<\log_2 2 \Leftrightarrow 0<x^2<2$

$$\Leftrightarrow 0<|x|<\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<0 \text{ hoặc } 0<x<\sqrt{2}.$$

e) Đặt $t=\log x$ với điều kiện $t\ne 5$, $t\ne -1$, ta có

$\dfrac{1}{5-t}+\dfrac{2}{1+t}<1 \Leftrightarrow \dfrac{t+1+10-2t}{5+4t-t^2}-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-5t+6}{t^2-4t-5}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t-3)}{(t+1)(t-5)}>0 \Leftrightarrow t<-1 \text{ hoặc } 2<t<3 \text{ hoặc } t>5.$$

Suy ra $\log x<-1$ hoặc $2<\log x<3$ hoặc $\log x>5$.

Vậy $x<\dfrac{1}{10}$ hoặc $100<x<1000$ hoặc $x>100\,000$.

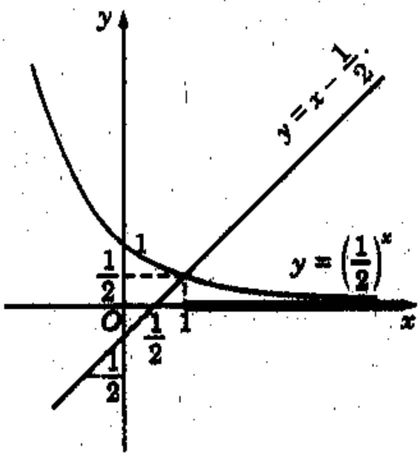
g) Với điều kiện $x>0, x\ne 1$, đặt $t=\log_4 x$, ta có $4t-\dfrac{33}{t}\le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{4t^2-t-33}{t}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4t+11)(t-3)}{t}\le 0$

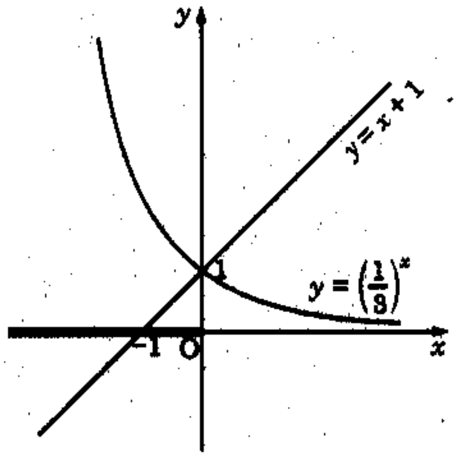
$\Leftrightarrow t\le -\dfrac{11}{4}$ hoặc $0<t\le 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_4 x\le -\dfrac{11}{4}\\ 0<\log_4 x\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 4^{-\frac{11}{4}}\\ 1<x\le 64.\end{array}\right.$

2.38. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.57), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Với $x > 1$ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nằm phía dưới đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1\ ;+\infty)$.



Hình 57

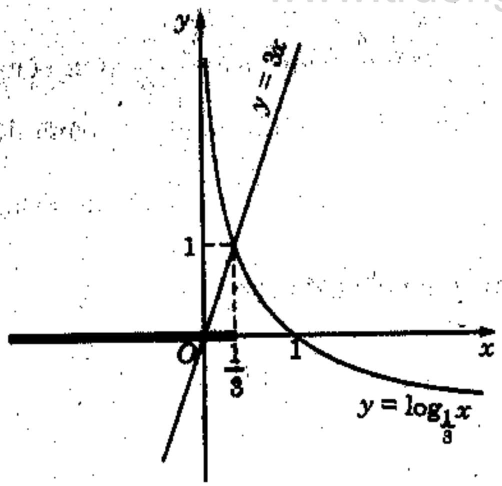


Hình 58

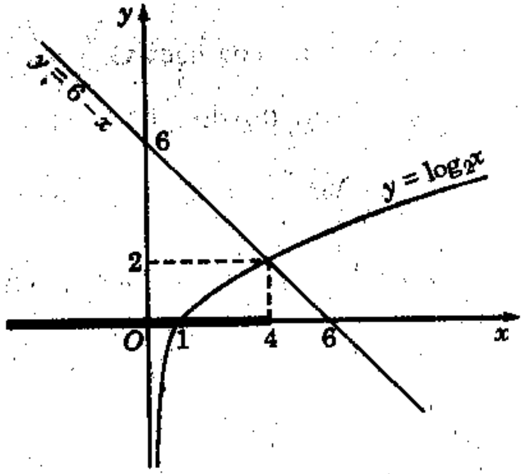
b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và đường thẳng $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.58), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 0$. Khi $x < 0$ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = x + 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty\ ; 0]$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ và đường thẳng $y = 3x$ trên cùng một hệ trục toạ độ ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ (H.59). Khi $x < \frac{1}{3}$ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 3x$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty\ ; \frac{1}{3}\right)$.



Hình 59



Hình 60

d) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ và đường thẳng $y = 6 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 4$ (H.60). Khi $x < 4$, đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 6 - x$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty\ ;\ 4]$.

Bài tập ôn chương II

2.39. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{\sqrt{3}}$.

Tập xác định : $D = (0\ ;\ +\infty)$.

$$y' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}.$$

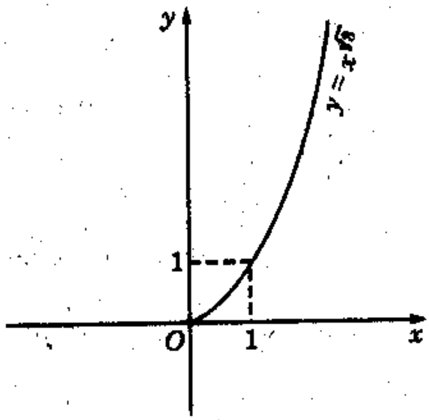
$y' > 0,\ \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\lim_{x\to 0^+} y = 0,\ \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'	‖	$+$
y	‖ 0	$\nearrow$ $+\infty$



Hình 61

Đồ thị (H.61).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{1}{\pi}}$.

Tập xác định : $D = (0\,;+\infty)$.

$$y' = \frac{1}{\pi}x^{\frac{1}{\pi}-1}.$$

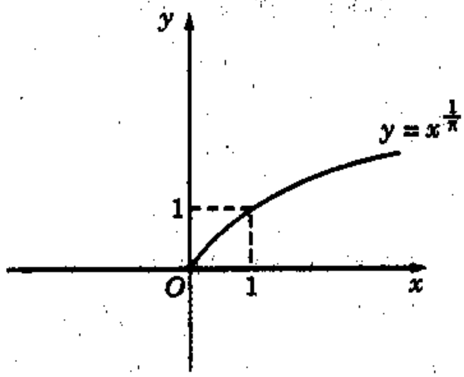
$y' > 0,\ \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\lim_{x\to 0^+} y = 0,\ \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	‖	+	
y	‖ 0	↗	$+\infty$



• Đồ thị (H.62).

Hình 62

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{-e}$.

Tập xác định : $D = (0\,;+\infty)$.

$$y' = -ex^{-e-1}.$$

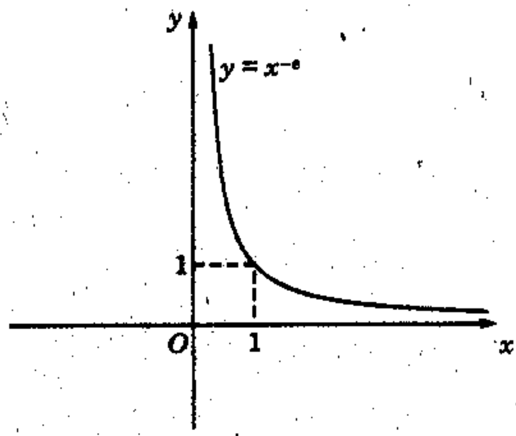
$y' < 0,\ \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến.

$$\lim_{x\to 0^+} y = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		–	
y	$+\infty$	↘	0



Đồ thị (H.63).

Hình 63

2.40. a) Hàm số xác định khi

$$4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Vậy tập xác định là $D = \left(\frac{1}{2}\,;+\infty\right)$.

b) $D = \left(-\frac{2}{3}\,;1\right)$.

c) Hàm số xác định khi

$$\log x + \log(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log[x(x+2)] \geq \log 1\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + 2x - 1 \geq 0\\ x > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leq -1-\sqrt{2} \text{ hoặc } x \geq -1+\sqrt{2}\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1+\sqrt{2}.$$

Vậy tập xác định là $D = [-1+\sqrt{2}\,;+\infty)$.

d) Tương tự câu c), $D = [\sqrt{2}\,;+\infty)$.

2.41. a) Ta có tập xác định của cả hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ đều là $\mathbb{R}$. Mặt khác

$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x), \quad g(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -g(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

b) Ta có $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \sqrt{a^x a^{-x}} = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

và $$f(0) = \frac{a^0 + a^0}{2} = 1.$$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1$.

2.42. a) Ta có $$a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1. \qquad (1)$$

Theo đề bài $a + b = c$, $a > 0$, $b > 0$ nên $0 < \dfrac{a}{c} < 1$, $0 < \dfrac{b}{c} < 1$.

Suy ra với $m > 1$ thì $\left(\dfrac{a}{c}\right)^m < \left(\dfrac{a}{c}\right)^1$; $\left(\dfrac{b}{c}\right)^m < \left(\dfrac{b}{c}\right)^1$.

Từ đó ta có $\left(\dfrac{a}{c}\right)^m + \left(\dfrac{b}{c}\right)^m < \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = 1$.

Vậy (1) đúng và ta có điều phải chứng minh.

b) Chứng minh tương tự.

2.43. a) Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung lên trên 3 đơn vị.

b) Đồ thị của hàm số $y = 2^{x+1}$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 2^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục hoành sang trái 1 đơn vị.

c) Đồ thị của hàm số $y = 3^{x-2}$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục hoành sang phải 2 đơn vị.

2.44. a) Đồ thị của hàm số $y = \log_3(x-1)$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang bên phải 1 đơn vị.

b) Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang bên trái 1 đơn vị.

c) Đồ thị của hàm số $y = 1 + \log_3 x$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung lên trên 1 đơn vị.

2.45. a) $y' = -6(2+3x)^{-3}$; b) $y' = 2(3x-2)^{-\frac{1}{3}}$;

c) $y' = -(3x-7)^{-\frac{4}{3}}$; d) $y' = -9x^{-4} - \frac{1}{x\ln 3}$;

e) $y' = 6x\log_2 x + \frac{3x^2-2}{x\ln 2}$; g) $y' = -\tan x$;

h) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$; i) $y' = \frac{x(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x}}{x^2}$.

2.46. a) $x = 1$.

b) Đặt $t = e^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$t^2 - 3t - 4 + \frac{12}{t} = 0$$

hay $t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 3. \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} e^x = 2 \\ e^x = 3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x = \ln 2 \\ x = \ln 3. \end{array}\right.$

c) $3.4^x + 27.9^x = 24.4^x - \dfrac{9}{2}.9^x \Leftrightarrow 63.9^x = 42.4^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{4}\right)^x = \dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

d) $\dfrac{1}{2}.2^{x^2} - 3^{x^2} = \dfrac{1}{3}.3^{x^2} - 4.2^{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}.2^{x^2} = \dfrac{4}{3}.3^{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

2.47. a) Với điều kiện $x > 1$ ta có phương trình $\ln(4x + 2) = \ln[x(x-1)]$

$\Leftrightarrow 4x + 2 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$

b) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $\log_2(3x+1)[\log_3 x - 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(3x+1) = 0 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9.$$

c) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $4^{\log_3 x}.5^{\log_3 x} = 400$

$\Leftrightarrow 20^{\log_3 x} = 20^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$ (thoả mãn điều kiện).

d) Đặt $t = \ln x$ $(x > 0)$, ta có phương trình $t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 2 \\ \ln x = -2. \\ \ln x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e^2 \\ x = e^{-2} \\ x = e^3. \end{array}\right.$$

2.48. a) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $e^2.e^{\ln x} = x + 3$

$\Leftrightarrow e^2.x = x + 3 \Leftrightarrow x(e^2 - 1) = 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{e^2 - 1}$ (thoả mãn điều kiện).

b) Tương tự câu a), $x = e^2$.

c) Với điều kiện $x > 3$ ta có

$$\left[\begin{array}{l} 5 - x = 0 \\ \log(x - 3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

2.49. a) $8,4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 8,4^0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 3}{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow x < 3.$

b) $2^{|x-2|} > 2^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x - 2| > 2|x + 1| \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4(x^2 + 2x + 1)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0.$$

c) $2^{2x} - 2.2^x + 8 < 2^{3x}.2^{1-x} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2.2^x - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x, t > 0 \\ t^2 + 2t - 8 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x, t > 0 \\ t < -4 \text{ hoặc } t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

d) Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $\dfrac{1}{t + 5} \le \dfrac{1}{3t - 1}$.

Vì vế trái dương nên vế phải cũng phải dương, tức là $3t - 1 > 0$. Từ đó, ta có hệ

$$\begin{cases} 3t - 1 \le t + 5 \\ 3t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \le 3.$$

Do đó $\dfrac{1}{3} < 3^x \le 3$. Vậy $-1 < x \le 1$.

2.50. a) $\dfrac{1}{e^2} < x < e$;

b) $(0,2)^3 \le x \le 25$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 < (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 2 \\ x < 3 \\ x < \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } 2 < x < \frac{11}{5}.$$

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; -1) \cup \left(2 ; \dfrac{11}{5}\right)$.

d) $\ln|(x-2)(x+4)| \le \ln 8 \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 8| \le 8 \Leftrightarrow -8 \le x^2 + 2x - 8 \le 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \ge 0 \\ x^2 + 2x - 16 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ hoặc } x \ge 0 \\ -1 - \sqrt{17} \le x \le -1 + \sqrt{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \le x \le -2 \text{ hoặc } 0 \le x \le -1 + \sqrt{17}.$$

Vậy tập nghiệm là $\left[-1 - \sqrt{17} ; -2\right] \cup \left[0 ; -1 + \sqrt{17}\right]$.

2.51. a) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 7 > 0 \\ \ln(x+1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ \ln(x+1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{7}{2} \\ x + 1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{7}{2} \\ 0 < x + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{7}{2} \\ \begin{cases} x < \dfrac{7}{2} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{7}{2} \\ -1 < x < 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm là $(-1; 0) \cup \left(\dfrac{7}{2} ; +\infty\right)$.

b) Tương tự câu a), tập nghiệm là $\left(\dfrac{1}{10} ; 5\right)$.

c) Đặt $t = \log_2 x$, ta có bất phương trình $2t^3 + 5t^2 + t - 2 \ge 0$

hay $(t+2)(2t^2 + t - 1) \ge 0$ có nghiệm $-2 \le t \le -1$ hoặc $t \ge \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$ hoặc $x \ge \sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2} ; +\infty\right)$.

d) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 3e^x - 2 > 0 \\ \ln(3e^x - 2) \le \ln e^{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^{2x} - 3e^x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^x \le 1 \text{ hoặc } e^x \ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x \ge 2 \\ \frac{2}{3} < e^x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \ln 2 \\ \ln\frac{2}{3} < x \le 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm là $\left(\ln\frac{2}{3} ; 0\right] \cup [\ln 2 ; +\infty)$.

2.52. a) $n \ge \log_{\frac{1}{2}} 10^{-9}$ hay $n \ge 9\log_2 10 \approx 29,897$.

Vì n là số tự nhiên bé nhất nên $n = 30$.

b) $n = 4$;

c) $n = 16$;

d) $n = 15$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (A), **2.** (C), **3.** (D), **4.** (B), **5.**(D), **6.**(D).

7. (A) (Giải bằng đồ thị), **8.** (B) (Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên).

Chương III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. Nguyên hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nguyên hàm và tính chất

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng. Hàm số $F(x)$ được gọi là *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên K, nếu

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in K.$$

Định lí

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Ngược lại, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

Kí hiệu họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Tính chất 2

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (} k \text{ là hằng số khác 0).}$$

Tính chất 3

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Sự tồn tại nguyên hàm

Định lí. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	**Nguyên hàm của hàm số hợp (với $u = u(x)$)**
$\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int 0\mathrm{d}u = C$
$\int \mathrm{d}x = x + C$	$\int \mathrm{d}u = u + C$
$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$
$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$	$\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + C$
$\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a \neq 1, a > 0)$	$\int a^{u}\mathrm{d}u = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C\ (0 < a, a \neq 1)$
$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$
$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \tan u + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\cot u + C$

2. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Nếu $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C,$$

Hệ quả. Nếu $u = ax + b\ (a \neq 0)$ thì ta có

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí 2. Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, thì

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

hay
$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x.$$

Giải

Ta có
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \cos x$, ta được $t' = -\sin x$ và

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x\mathrm{d}x \text{ viết thành } -\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Do đó, nguyên hàm đã cho viết thành

$$-\int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + C.$$

Thay $t = \cos x$, ta được
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

• ***Ví dụ 2***

Tính
$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Giải

Đặt $u = \ln(\sin x)$ và $\mathrm{d}v = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$, ta có

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \ln(\sin x)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \tan x.\ln(\sin x) - \int \mathrm{d}x = \tan x\ln(\sin x) - x + C.$$

• *Ví dụ 3*

Tính $\int \cos\sqrt{x}\,dx.$

Giải

Đổi biến $t = \sqrt{x}$, ta được $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ và

$$\cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \text{ viết thành } 2t\cos t dt.$$

Vậy nguyên hàm đã cho viết thành $2\int t\cos t dt.$

Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int t\cos t dt = t\sin t - \int \sin t dt = t\sin t + \cos t + \frac{C}{2}.$$

Do đó $$\int \cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$$

C. BÀI TẬP

3.1. Kiểm tra xem hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số còn lại trong mỗi cặp hàm số sau :

a) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ và $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

b) $f(x) = e^{\sin x}\cos x$ và $g(x) = e^{\sin x}$;

c) $f(x) = \sin^2\dfrac{1}{x}$ và $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ và $g(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$;

e) $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$ và $g(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

3.2. Chứng minh rằng các hàm số $F(x)$ và $G(x)$ sau đều là một nguyên hàm của cùng một hàm số :

a) $F(x) = \dfrac{x^2+6x+1}{2x-3}$ và $G(x) = \dfrac{x^2+10}{2x-3}$;

b) $F(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ và $G(x) = 10 + \cot^2 x$;

c) $F(x) = 5 + 2\sin^2 x$ và $G(x) = 1 - \cos 2x$.

3.3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = (x-9)^4$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

e) $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}$;

f) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

3.4. Tính các nguyên hàm sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ với $x > -1$ (đặt $t = 1 + x^3$) ;

b) $\int xe^{-x^2}dx$ (đặt $t = x^2$) ;

c) $\int \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx$ (đặt $t = 1 + x^2$) ;

d) $\int \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}dx$ (đặt $t = \sqrt{x}$) ;

e) $\int \sin\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x^2}dx$ $\left(\text{đặt } t = \dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}dx$ (đặt $t = \ln x$) ;

h) $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$ (đặt $t = \cos x$) ;

i) $\int \cos x \sin^3 x\,dx$ (đặt $t = \sin x$) ;

k) $\int \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}dx$ (đặt $t = e^x$) ;

l) $\int \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}dx$ (đặt $t = \sin x - \cos x$).

3.5. Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính :

a) $\int (1-2x)e^x dx$;

b) $\int xe^{-x}dx$;

c) $\int x\ln(1-x)dx$;

d) $\int x\sin^2 x\,dx$;

e) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$;

g) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$;

h) $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$.

3.6. Tính các nguyên hàm sau :

a) $\int x(3-x)^5\,dx$;

b) $\int (2^x-3^x)^2\,dx$;

c) $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$;

d) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$;

e) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$;

g) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}\,dx$;

h) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx$;

i) $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$;

k) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

l) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$, $(a^2 \neq b^2)$.

HD : Đặt $u=\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

3.7. Bằng cách biến đổi các hàm số lượng giác, hãy tính :

a) $\int \sin^4 x\,dx$;

b) $\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx$;

c) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$;

d) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$;

e) $\int \frac{1}{\cos x\sin^2 x}\,dx$;

g) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

3.8. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{1}{1+\sin x}\ ?$$

a) $F(x)=1-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

b) $G(x)=2\tan\frac{x}{2}$;

c) $H(x)=\ln(1+\sin x)$;

d) $K(x)=2\left(1-\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)$.

§2. Tích phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tích phân và tính chất

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là *tích phân từ a đến b* (hay tích phân xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$) của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy ta có $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ $\left(\text{hay } F(x)\big|_a^b\right)$.

➤ **Chú ý**

1) Trường hợp $a = b$, ta định nghĩa $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Trường hợp $a > b$, ta định nghĩa $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2) Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ hay } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \ldots \text{ đều bằng } F(b) - F(a).$$

Tính chất của tích phân

Tính chất 1

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Tính chất 2

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tính chất 3

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,\ a < c < b.$$

➤ **Chú ý**

Mở rộng của tính chất 3 :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$(a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b)$.

2. Phương pháp tính tích phân

b) Phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\,\beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$, $\forall t \in [\alpha\,;\,\beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Định lí 2. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ sao cho $\alpha \le u(x) \le \beta$, $\forall x \in [a\,;\,b]$. Nếu $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $\forall x \in [a;b]$, trong đó $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\,\beta]$ thì

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

a) Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí 1. Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

hay
$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

➤ **Chú ý**

Nếu $\alpha > \beta$ thì ta xét đoạn $[\beta\,;\,\alpha]$.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Tính $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ nhờ đổi biến $x=\sin t$.

Giải

Đổi biến số $x = \sin t$, ta được $x' = \cos t$ và khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\cos^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

• *Ví dụ 2*

Tính $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx$ nhờ đổi biến $x=\pi-t$.

Giải

Đổi biến số $x = \pi - t$, ta được $x' = -1$ và khi $x = 0$ thì $t = \pi$; khi $x = \pi$ thì $t = 0$. Do đó

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{-\sin 4t}{1+\sin t}\,dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4t}{1+\sin t}\,dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx$$

Do đó $2\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = 0$. Vậy $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = 0$.

• *Ví dụ 3*

Tính $\int_1^{e} \sqrt{x}\ln x\,dx$.

Giải

Đặt $u = \ln x$ và $dv = \sqrt{x}\,dx$, ta có $du = \dfrac{dx}{x}$ và $v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Vậy

$$\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^e - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^e = \frac{2}{9}(e\sqrt{e}+2).$$

• ***Ví dụ 4***

Tính $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x)dx.$

Giải

Đặt $u = \ln(\sin x)$ và $dv = \cos x dx$, ta được $du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$ và $v = \sin x$. Do đó

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x)dx = \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

C. BÀI TẬP

3.9. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^1 (y^3 + 3y^2 - 2)dy$;

b) $\displaystyle\int_1^4 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right)dt$;

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - \sin 2x)\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^1 (3^s - 2^s)^2 ds$;

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 3x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos 3x dx$; g) $\int_{0}^{3} \left|x^2 - x - 2\right| dx$;

h) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$.

3.10. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $\int_{1}^{2} x(1-x)^5 dx$ (đặt $t = 1 - x$) ;

b) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ (đặt $t = \sqrt{e^x - 1}$) ;

c) $\int_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x} dx$ (đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$) ;

d) $\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (đặt $u = \sqrt{x^2+x+1}$) ;

e) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$ (đặt $t = \frac{1}{x}$) ;

g) $\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ (đặt $x = \pi - t$).

3.11. Áp dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính các tích phân sau :

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$; b) $\int_{0}^{\ln 2} x e^{-2x} dx$;

c) $\int_{0}^{1} \ln(2x+1) dx$; d) $\int_{2}^{3} [\ln(x-1) - \ln(x+1)] dx$;

e) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$;

g) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin^2 x dx$;

h) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$;

i) $\int\limits_{1}^{e}\frac{1+x\ln x}{x}e^x dx$;

3.12. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{0}^{1}x^n\sin\pi x dx = 0.$$

3.13. Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ cho bởi

$$f(x)=\int\limits_{0}^{x}\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt,\ x\in\mathbb{R}$$

là hàm số chẵn.

3.14. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a\ ;\ a]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx & \text{nếu } f \text{ là hàm số chẵn,}\\ 0 & \text{nếu } f \text{ là hàm số lẻ.}\end{cases}$$

Áp dụng để tính $\int\limits_{-2}^{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

3.15. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$$

3.16. Đặt $I_n=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n>2.$

3.17. Đặt $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}, \quad m > 0, n > 1.$$

3.18. Hãy chỉ ra kết quả nào dưới đây đúng :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\cos x}\right)dx = 0$;

c) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx = 0$;

d) $\int_0^2 \left(\frac{1}{1+x+x^2+x^3} + 1\right)dx = 0.$

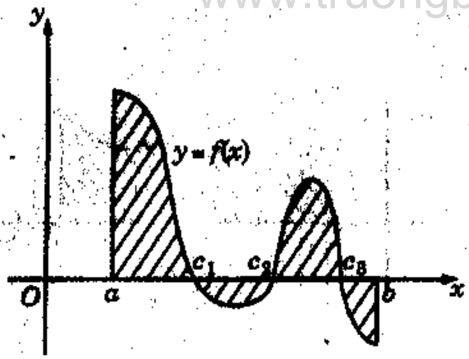
§3. Ứng dụng hình học của tích phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

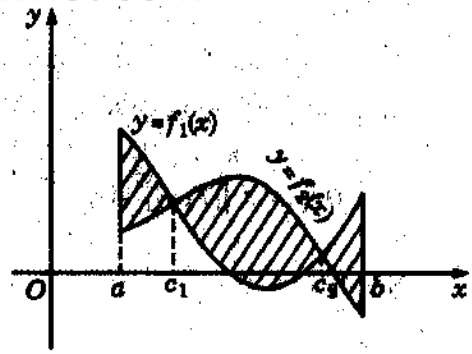
1. Diện tích hình phẳng

Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.64), thì diện tích S được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$



• *Hình 64*



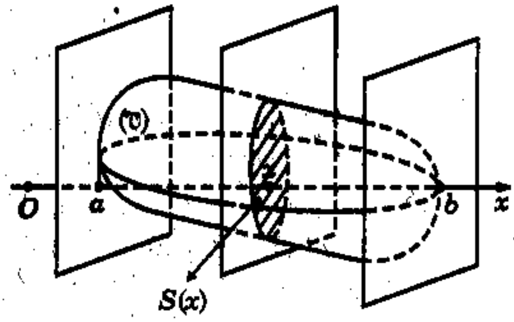
Hình 65

Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.65) thì diện tích S được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\mathrm{d}x.$$

2. Thể tích của vật thể

Một vật thể $\mathcal{V}$ được giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = a$; $x = b$ $(a \le b)$. $S(x)$ là diện tích thiết diện của $\mathcal{V}$, vuông góc với trục Ox tại $x \in [a\,;\,b]$ (H.66). Thể tích V của vật thể $\mathcal{V}$ được cho bởi công thức



Hình 66

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x,$$

(với $S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$).

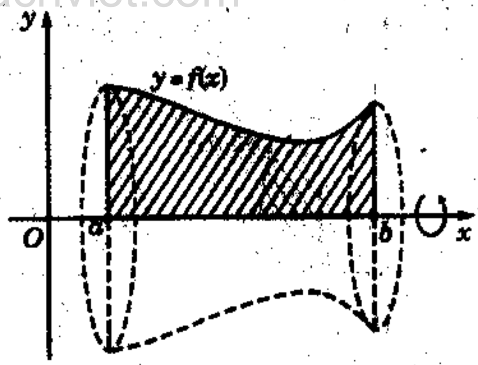
3. Thể tích khối tròn xoay

Cho hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay (H.67). Thể tích V_x của hình tròn xoay này được cho bởi công thức

$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Nếu đổi vai trò của x cho y, ta được

$$V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy.$$



Hình 67

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường

$$y = x^2 - 2x \text{ và } y = x.$$

Giải

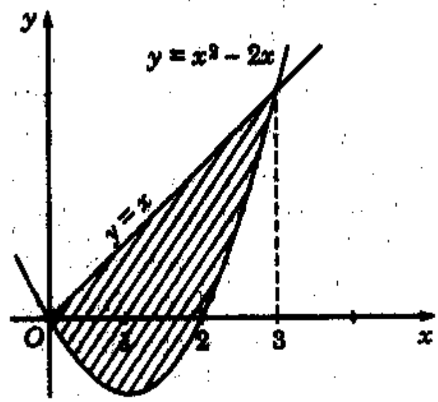
Tìm hoành độ các giao điểm của hai đường, ta có

$x^2 - 2x = x \Rightarrow x = 0$ và $x = 3$, (H.68).

Vậy diện tích S của hình phẳng bằng

$$S = \int_0^3 (x - x^2 + 2x)dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$



Hình 68

• ***Ví dụ 2***

Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường

$$y = \frac{10}{3}x - x^2 \text{ và } y = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \le 1 \\ x - 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Giải

(H.69) Tìm hoành độ các giao điểm.

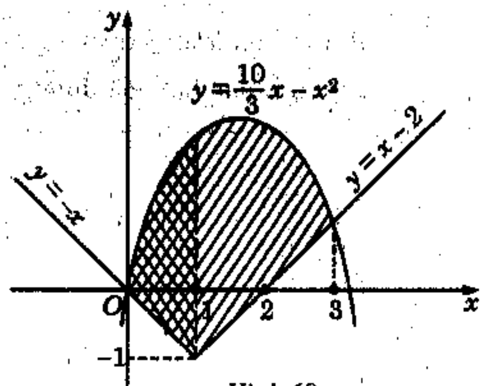
Từ $\frac{10}{3}x - x^2 = -x$, ta có $x = 0$.

Từ $\frac{10}{3}x - x^2 = x - 2$, ta có $x = 3$.

Vậy diện tích S của hình phẳng là

$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right)dx$$

$$+ \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right)dx = \frac{13}{2}.$$



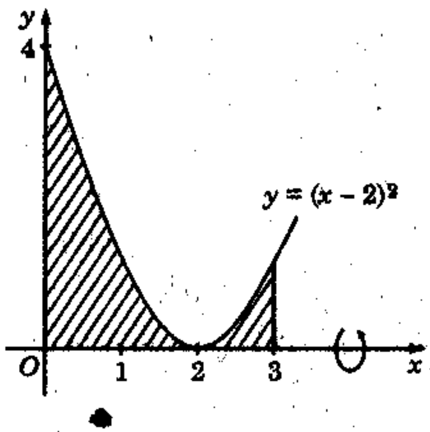
Hình 69

• ***Ví dụ 3***

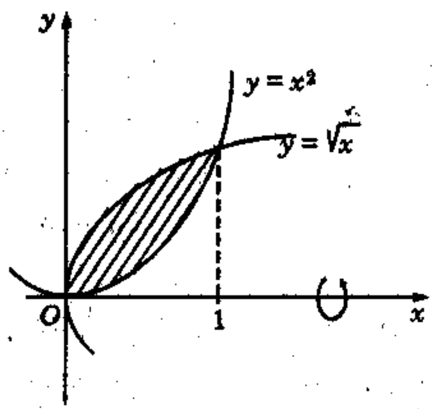
Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$. (H.70)

Giải

Ta có $V_x = \pi \int_0^3 (x-2)^4\, dx = \pi \left.\frac{(x-2)^5}{5}\right|_0^3 = \frac{33\pi}{5}.$



Hình 70



Hình 71

• ***Ví dụ 4***

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $x = y^2$ (H.71).

Giải

Ta có

$$V_x = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2 \,dx - \pi\int_0^1 x^4 dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{3\pi}{10}.$$

C. BÀI TẬP

3.19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y = 2x - x^2$, $x + y = 2$;

b) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$;

c) $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$;

d) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{1}{2}$;

e) $y = x^3 - 1$ và tiếp tuyến với $y = x^3 - 1$ tại điểm $(-1 ; -2)$.

3.20. Tính thể tích vật thể :

a) Có đáy là một tam giác cho bởi $y = x$, $y = 0$ và $x = 1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

b) Có đáy là một hình tròn giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

3.21. Tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi

a) $y = 2 - x^2$, $y = 1$, quanh trục Ox.

b) $y = 2x - x^2$, $y = x$, quanh trục Ox.

c) $y = (2x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x = 0$, $y = 3$, quanh trục Oy.

d) $y = x^2 + 1$, $x = 0$ và tiếp tuyến với $y = x^2 + 1$ tại điểm $(1\ ;\ 2)$, quanh trục Ox.

e) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$, quanh trục Oy.

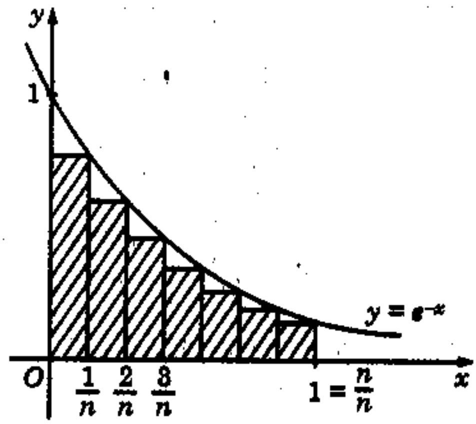
3.22. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = a$ $(a > 1)$.

Gọi thể tích đó là $V(a)$. Xác định thể tích của vật thể khi $a \to +\infty$ (tức là $\lim\limits_{a\to+\infty} V(a)$).

3.23. Một hình phẳng được giới hạn bởi $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Ta chia đoạn $[0\ ;\ 1]$ thành n phần bằng nhau tạo thành một hình bậc thang (bởi n hình chữ nhật con như Hình 72).

a) Tính diện tích S_n của hình bậc thang (tổng diện tích của n hình chữ nhật con).

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ và so sánh với cách tính diện tích hình phẳng này bằng công thức tích phân.



Hình 72

3.24. Trong các cặp hình phẳng giới hạn bởi các đường sau, cặp nào có diện tích bằng nhau ?

a) $\{y = x + \sin x,\ y = x,$ với $0 \le x \le \pi\}$ và $\{y = x + \sin x,\ y = x$ với $\pi \le x \le 2\pi\}$;

b) $\{y = \sin x,\ y = 0$ với $0 \le x \le \pi\}$ và $\{y = \cos x,\ y = 0$ với $0 \le x \le \pi\}$;

c) $\{y = 2x - x^2,\ y = x\}$ và $\{y = 2x - x^2,\ y = 2 - x\}$;

d) $\{y = \log x, y = 0, x = 10\}$ và $\{y = 10^x,\ x = 0,\ y = 10\}$;

e) $\{y = \sqrt{x},\ y = x^2\}$ và $\{y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 1 - x\}$.

Bài tập ôn chương III

3.25. Tính các nguyên hàm sau :

a) $\int (2x-3)\sqrt{x-3}\,dx$, đặt $u=\sqrt{x-3}$; b) $\int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, đặt $u=\sqrt{x^2+1}$;

c) $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$, đặt $u=e^{2x}+1$; d) $\int \frac{1}{\sin x-\sin\alpha}dx$;

e) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$, đặt $t=\sqrt{x}$; g) $\int x\ln\frac{x}{1+x}dx$.

3.26. Tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_0^1 (y-1)^2\sqrt{y}\,dy$, đặt $t=\sqrt{y}$; b) $\int\limits_1^2 (z^2+1)(z-1)^{\frac{2}{3}}dz$, đặt $u=\sqrt[3]{z-1}$;

c) $\int\limits_0^1 \sqrt{t}\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}dt$, đặt $u=\sqrt{t}$; d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5\varphi-\sin^5\varphi\right)d\varphi$;

e) $\int\limits_0^{\pi} \cos^3\alpha\cos 3\alpha\,d\alpha$.

3.27. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y=x-1+\frac{\ln x}{x}$, $y=x-1$ và $x=e$;

b) $y=x^3-x^2$ và $y=\frac{1}{9}(x-1)$;

c) $y=1-\sqrt{1-x^2}$ và $y=x^2$.

3.28. Tính thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng xác định bởi

a) $y=x^{\frac{2}{3}}$, $x=0$ và tiếp tuyến với đường $y=x^{\frac{2}{3}}$ tại điểm có hoành độ $x=1$, quanh trục Oy.

b) $y=\frac{1}{x}-1$, $y=0$, $y=2x$, quanh trục Ox.

c) $y=|2x-x^2|$, $y=0$ và $x=3$, quanh :

- Trục Ox ;
- Trục Oy.

3.29. Hãy chỉ ra các kết quả đúng trong các kết quả sau :

a) $\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int\limits_0^1 x^m(1-x)^n dx$; $m, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{t^2}{e^t+1}dt = \int\limits_0^1 t^2 dt$;

c) $\int\limits_0^1 \sin^3 x \cos x dx = \int\limits_0^1 t^3 dt$.

Bài tập trắc nghiệm

1. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

(A) $\frac{x^2+x-1}{x+1}$; (B) $\frac{x^2-x-1}{x+1}$; (C) $\frac{x^2+x+1}{x+1}$; (D) $\frac{x^2}{x+1}$.

2. Nếu $\int\limits_a^d f(x)dx = 5$, $\int\limits_b^d f(x)dx = 2$ với $a < d < b$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ bằng :

(A) -2 ; (B) 8 ; (C) 0 ; (D) 3.

3. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau :

(A) $\int\limits_0^1 \sin(1-x)dx = \int\limits_0^1 \sin x dx$;

(B) $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

(C) $\int\limits_0^1 (1+x)^x dx = 0$;

(D) $\int\limits_{-1}^1 x^{2007}(1+x)dx = \frac{2}{2009}$.

4. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

(A) $\int\limits_0^{\pi} \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$;

(B) $\int\limits_0^{\pi} \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| dx = \int\limits_0^{\pi} \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx$;

(C) $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

(D) $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

5. $\int_0^1 xe^{1-x}dx$ bằng :

(A) $1-e$; (B) $e-2$; (C) 1; (D) -1.

6. Nhờ ý nghĩa hình học của tích phân, hãy tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau :

(A) $\int_0^1 \ln(1+x)dx > \int_0^1 \frac{x-1}{e-1}dx$; (B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x dx$;

(C) $\int_0^1 e^{-x}dx > \int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$; (D) $\int_0^1 e^{-x^2}dx > \int_0^1 e^{-x^3}dx$.

7. Thể tích của khối tròn xoay tạo nên do quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=2$ bằng :

(A) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$; (B) $\frac{2\pi}{5}$; (C) $\frac{5\pi}{2}$; (D) 2π.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG III

§1

3.1. a) Hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ là một nguyên hàm của $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Hàm số $g(x)=e^{\sin x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sin x}\cos x$.

c) Hàm số $f(x) = \sin^2\frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$.

d) Hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

e) Hàm số $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$.

3.2. a) Vì $F(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{2x - 3} = \frac{x^2 + 10}{2x - 3} + 3 = G(x) + 3$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^2 - 6x - 20}{(2x - 3)^2}$.

b) Vì $G(x) = 10 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 9 = F(x) + 9$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của $f(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

c) Vì $F'(x) = \left(5 + 2\sin^2 x\right)' = 2\sin 2x$ và $G'(x) = (1 - \cos 2x)' = 2\sin 2x$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của cùng hàm số $f(x) = 2\sin 2x$.

3.3. a) $F(x) = \frac{(x - 9)^5}{5} + C$; b) $F(x) = \frac{1}{2 - x} + C$;

c) $F(x) = -\sqrt{1 - x^2} + C$; d) $F(x) = \sqrt{2x + 1} + C$;

e) $F(x) = 2(\tan x - x) + C$. *HD* : Vì $f(x) = 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$;

g) $F(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right) + C$. *HD* : Đặt $u = x^2 + x + 1$, ta có $u' = 2x + 1$.

3.4. a) $\frac{1}{4}\left(1 + x^3\right)^{\frac{4}{3}} + C$; b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$;

c) $-\frac{1}{2(1 + x^2)} + C$; d) $\ln\left|\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right| + C$;

e) $\cos\frac{1}{x} + C$; g) $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$;

h) $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$; i) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$;

k) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$; l) $2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$.

3.5. a) $(3-2x)e^x + C$; b) $-(1+x)e^{-x} + C$;

c) $\frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{4}(1+x)^2 + C$;

d) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$. *HD* : Đặt $u = x$, $dv = \sin^2 x dx$.

e) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$. *HD* : Đặt $u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ và $dv = dx$.

g) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left((\ln x)^2 - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C$. *HD* : Đặt $u = \ln^2 x$, $dv = \sqrt{x}dx$.

h) $x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$. *HD* : Đặt $u = \ln\frac{1+x}{1-x}$, $dv = xdx$.

3.6. a) $(3-x)^6\left(\frac{3-x}{7} - \frac{1}{2}\right) + C$. *HD* : Đặt $t = 3 - x$;

b) $\frac{4^x}{\ln 4} - 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$;

c) $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C$. *HD* : Dựa vào $x = -\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}$;

d) $\tan x.\ln(\sin x) - x + C$. *HD* : Đặt $u = \ln(\sin x)$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$;

e) $-x\cot x + \ln|\sin x| + C$. *HD* : Đặt $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$.

g) $\frac{1}{5}\ln\left[|x-2|^3(x+3)^2\right] + C$.

HD : Ta có $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{3}{5(x-2)} + \frac{2}{5(x+3)}$;

h) $-2\left(\sqrt{x} + \ln|1-\sqrt{x}|\right) + C$. *HD* : Đặt $t = \sqrt{x}$;

i) $-\frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{5}\cos 5x\right) + C$. *HD* : $\sin 3x.\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x)$;

k) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$. *HD* : Đặt $u = \cos x$.

l) $\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + C$.

3.7. a) $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

HD : $\sin^4 x = \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right).$

b) $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C.$

HD : Đặt $u = \cot x.$

c) $\cos^5 x\left(\frac{\cos^2 x}{7} - \frac{1}{5}\right) + C.$ *HD* : Đặt $u = \cos x.$

d) $\frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C.$

HD : $\sin^4 x\cos^4 x = \frac{1}{2^4}(\sin^2 2x)^2 = \frac{1}{2^6}(1-\cos 4x)^2.$

e) $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C.$ *HD* : $\frac{1}{\cos x\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x}.$

g) $\tan\frac{x}{2} - 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C.$ *HD* : $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$

3.8. a) $F(x) = 1 - \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $K(x) = 2\left(1 - \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right).$

§2

3.9. a) $-\frac{3}{4}$; b) $\frac{35}{4}$; c) 1 ;

d) $\frac{4}{\ln 3} - \frac{10}{\ln 6} + \frac{3}{2\ln 2}$; e) $-\frac{1}{3}$;

g) $\frac{31}{6}$. *HD* : $\int_0^3 |x^2 - x - 2|dx = \int_0^2 -(x^2 - x - 2)dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx.$

h) $\frac{1}{2}\ln 2$. *HD* : $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{|\sin x+\cos x|}dx=\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$.

3.10. a) $-\frac{13}{42}$; b) $2-\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{468}{7}$;

d) $2(\sqrt{3}-1)$; e) $-\frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8}-2\sqrt{2}\right)$;

g) $\frac{\pi^2}{4}$. *HD* : Đặt $x=\pi-t$, ta suy ra

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{-d(\cos x)}{1+\cos^2 x}.$$

Vậy $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$. Đặt tiếp $t=\tan u$.

3.11. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right)$; c) $\frac{3}{2}\ln 3-1$; d) $3\ln 3-6\ln 2$;

e) $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. *HD* : $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Tính tích phân từng phần $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

g) $\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$. *HD* : Đặt $u=x$, $dv=\cos x\sin^2 x\,dx$.

h) $\frac{e}{2}-1$. *HD* : $\int\limits_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=\int\limits_0^1\frac{e^x}{1+x}dx-\int\limits_0^1\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$ và tính tích phân

từng phần $\int\limits_0^1\frac{e^x}{(1+x)^2}dx=\frac{-e^x}{1+x}\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{e^x}{1+x}dx$;

i) e^e. *HD* : Tương tự câu g).

3.12. *HD* : Với $x \in [0\,;1]$, ta có $0 \le x^n \sin \pi x \le x^n$. Do đó

$$0 \le \int_0^1 x^n \sin \pi x \mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Áp dụng quy tắc chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức, ta được điều phải chứng minh.

3.13. *HD* : Đặt $t = -s$ trong tích phân

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t,$$

ta được $$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{s}{\sqrt{1+s^4}} \mathrm{d}s = f(x).$$ □

3.14. *HD* : Giả sử hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a\,;a]$, ta có

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Đổi biến $x = -t$ đối với tích phân $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, ta được

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Trường hợp sau chứng minh tương tự. *Áp dụng* :

Vì $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$ nên $\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 0.$

3.15. *HD* : Đổi biến số $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t$$

hay $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

3.16. Xét với $n > 2$, ta có $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x.\sin x\mathrm{d}x.$$

Dùng tích phân từng phần với $u = \sin^{n-1} x$ và $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$, ta được

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin x\mathrm{d}x = -\cos x\sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Vậy $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. $\square$

3.17. *HD* : Dùng tích phân từng phần với $u = (1-x)^n$, $\mathrm{d}v = x^m\mathrm{d}x$, ta được

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

Vậy $I_{m,n} = \dfrac{n}{m+1}\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \dfrac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$, $n > 1, m > 0$. $\square$

3.18. a) Đúng (vì vế trái bằng $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$) ; b) Đúng (nhờ bài 3.15) ;

c) Đúng (nhờ bài 3.14) ;

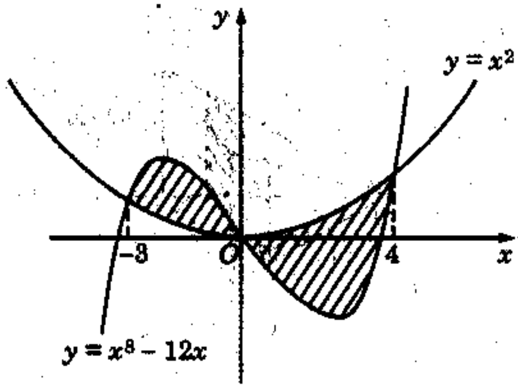
d) Sai : Vì $1 + \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3} > 1$, $x \in [0;2]$.

§3

3.19. a) $\frac{1}{6}$; b) $78\frac{1}{12}$. *HD* :

$$S = \int_{-3}^{0}\left(x^3 - 12x - x^2\right)dx +$$

$$+\int_{0}^{4}\left(x^2 - x^3 + 12x\right)dx \text{ (H.73).}$$



Hình 73

c) 2 ; *HD* : $S = 4\int_0^1 (1 - x)dx$.

d) $\frac{\pi}{2} - 1$.

HD : $S = 2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - 1.$

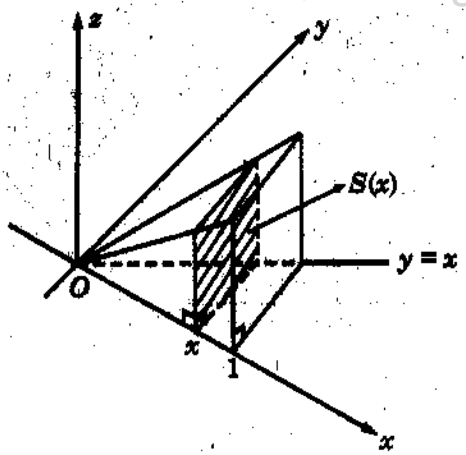
Đặt $x = \tan t$ để tính $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

e) $\frac{27}{4}$. *HD* : Phương trình tiếp tuyến tại $(-1\ ;-2)$ là $y = 3x + 1$. Do đó, diện tích

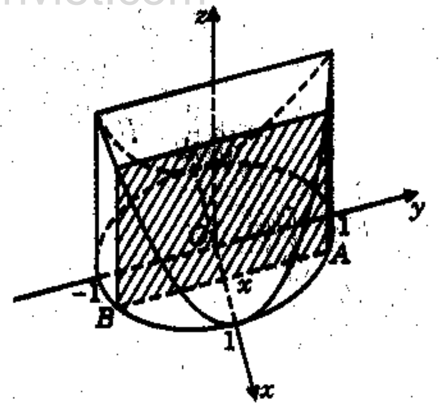
$$S = \int_{-1}^{2}(3x + 1 - x^3 + 1)dx = \int_{-1}^{2}(3x + 2 - x^3)dx.$$

3.20. a) $\frac{1}{3}$. *HD* : Hình chóp (H.74). Thiết diện tại $x \in [0;1]$ là hình vuông cạnh bằng x, $S(x) = x^2$. Vậy $V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

b) $\frac{16}{3}$. *HD* : (H75) Thiết diện tại $x \in [-1;1]$ là hình vuông cạnh AB, trong đó $A(x\ ;y)$ với $y = \sqrt{1-x^2}$. Khi đó, $AB = 2\sqrt{1-x^2}$. Diện tích thiết diện là $S(x) = 4(1 - x^2)$. Vậy $V = 4\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = 8\int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{16}{3}$.



Hình 74

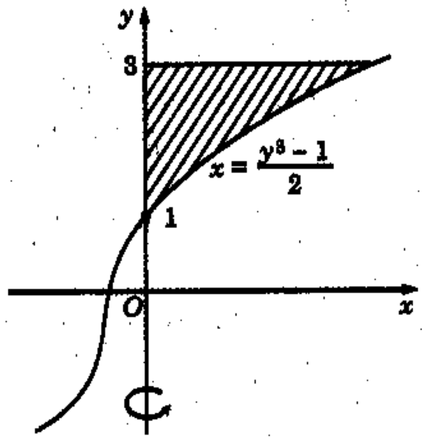


Hình 75

3.21. a) $\frac{56}{15}\pi$;   b) $\frac{\pi}{5}$;

c) $\frac{480}{7}\pi$. *HD* : Xem Hình 76 ;

d) $\frac{8}{15}\pi$;   e) $\frac{e^2+1}{2}\pi$.



Hình 76

3.22. $V(a) = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ và $\lim\limits_{a \to +\infty} V(a) = \pi$.

3.23. a) $S_n = \dfrac{\frac{1}{n}(1 - e^{-1})}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$;

HD : Theo Hình 72, ta có

$$S_n = \frac{1}{n}\left[e^{-\frac{1}{n}} + e^{-2\frac{1}{n}} + \ldots + e^{-\frac{n}{n}}\right] = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}\,\frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}(1 - e^{-1})}{e^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 - e^{-1}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}$.

3.24. a), b), c), d) : Đúng ; e) : Sai.

Bài tập ôn chương III

3.25. a) $\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{3}{2}}(2x-1)+C$.

b) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$; c) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$;

d) $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}\right|+C$. *HD* : Ta có $\cos a=\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$.

e) $-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$.

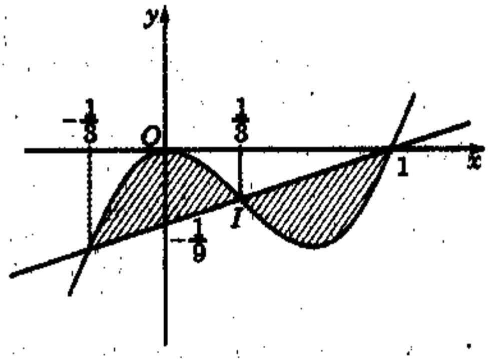
g) $\frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}x+C$.

3.26. a) $\frac{16}{105}$; b) $2\frac{49}{220}$; c) $\frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)$; d) 0 ;

e) $\frac{\pi}{8}$. *HD* : Dùng công thức hạ bậc đối với $\cos^3 x$.

3.27. a) $\frac{1}{2}$;

b) $\frac{8}{81}$; *HD* : Đường thẳng $y=\frac{1}{9}(x-1)$ đi qua tâm đối xứng $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{27}\right)$ của hàm số $y=x^3-x^2$. Do đó, hình phẳng giới hạn bởi hai đường đã cho gồm hai hình đối xứng nhau qua điểm I (H.77). Vậy



Hình 77

$$S=2\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left[x^3-x^2)-\frac{1}{9}(x-1)\right]dx=4\int_{0}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}-x^2\right)dx=\frac{8}{81}$$

(theo bài 3.14, $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left(x^3-\frac{1}{9}x\right)dx=0$).

c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$.

3.28. a) $\frac{\pi}{36}$. *HD* : Phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$;

$$V=\pi\int_0^1 y^3dy-\pi\int_{\frac{1}{3}}^1\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)^2dy=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{9}\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)^3\Bigg|_{\frac{1}{3}}^1=\frac{\pi}{36}.$$

b) $\pi\left(\frac{5}{3}-2\ln 2\right)$;

c) $V_x=\frac{18}{5}\pi$ và $V_y=\frac{59}{6}\pi$;

HD :

$$V_y=\pi\left\{\int_0^1\left[(1+\sqrt{1-y})^2-(1-\sqrt{1-y})^2\right]dy+\int_0^3\left[9-(1+\sqrt{1+y})^2\right]dy\right\}$$

$$=\pi\left[\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy+\int_0^3(7-y-2\sqrt{1+y})dy\right]=\frac{59\pi}{6}.$$

3.29. a) và b) đúng ; c) sai.

HD : b) Ta có : $\int_{-1}^1\frac{t^2dt}{e^t+1}=\int_{-1}^0\frac{t^2dt}{e^t+1}+\int_0^1\frac{t^2dt}{e^t+1}$; (*)

Dùng phương pháp đổi biến $t=-x$ đối với tích phân $\int_{-1}^0\frac{t^2dt}{e^t+1}$, ta được

$$\int_{-1}^0\frac{t^2dt}{e^t+1}=\int_0^1\frac{x^2dx}{e^{-x}+1}=\int_0^1\frac{t^2dt}{e^{-t}+1}.$$

Thay vào (*), ta có $\int_{-1}^1\frac{t^2dt}{e^t+1}=\int_0^1 t^2dt$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (A). ((B), (C) và (D) đúng. Chỉ kiểm tra (D) đúng còn (B) và (C) sai khác với (D) hằng số ∓ 1).

2. (D). (Nhờ tính chất của tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx$).

3. (C). (Do $(1+x)^x > 1,\ \forall x \in [0\,;1]$ nên nhờ ý nghĩa hình học của tích phân, ta có $\int\limits_0^1 (1+x)^x dx > 0$).

4. (C). (Vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ với $x \in \left[0\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ và $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ với $x \in \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

5. (B). ((A) và (D) sai vì $\int\limits_0^1 xe^{1-x}dx \geq 0$. Nhờ tính tích phân từng phần, ta được (B) đúng và (C) sai).

6. (D).

7. (B).

Chương IV. SỐ PHỨC

§1. Số phức. Biểu diễn hình học số phức

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a, phần ảo là b ($a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$).
- $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c\,;\, b = d$.
- Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a\,;\,b)$ trên mặt phẳng toạ độ.
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ là môđun của số phức z, tức là

$$|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$.

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Tìm các số thực x và y, biết

$$(2x + 3y + 1) + (-x + 2y)i = (3x - 2y + 2) + (4x - y - 3)i.$$

Giải

• Ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 3x - 2y + 2 \\ -x + 2y = 4x - y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 1 \\ -5x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{11},\ y = \frac{4}{11}.$$

• *Ví dụ 2*

Tính $|z|$, biết $z = 1 - 3i$.

Giải

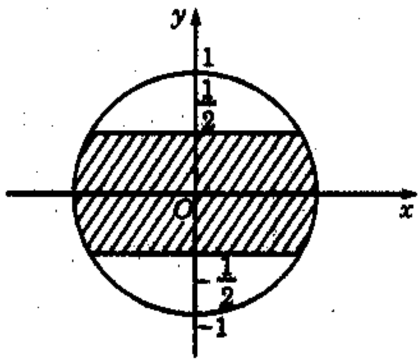
$$|1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

• *Ví dụ 3*

Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện : $|z| \le 1$ và phần ảo của z thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Giải

Điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện của đề bài nằm trong hình tròn tâm O bán kính 1 và nằm giữa hai đường thẳng song song với trục Ox, cắt trục Oy tại các điểm $-\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}$ (phần gạch sọc trong Hình 78).



Hình 78

C. BÀI TẬP

4.1. Tìm các số thực x, y thoả mãn :

a) $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2 - x + (3y - 2)i$;

b) $4x + 3 + (3y - 2)i = y + 1 + (x - 3)i$;

c) $x + 2y + (2x - y)i = 2x + y + (x + 2y)i$.

4.2. Cho hai số phức $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$. Hãy tìm điều kiện của a, b, c, d để các điểm biểu diễn α và β trên mặt phẳng toạ độ :

a) Đối xứng với nhau qua trục Ox ;

b) Đối xứng với nhau qua trục Oy ;

c) Đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và góc phần tư thứ ba ;

d) Đối xứng với nhau qua gốc toạ độ.

4.3. Trên mặt phẳng toạ độ tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

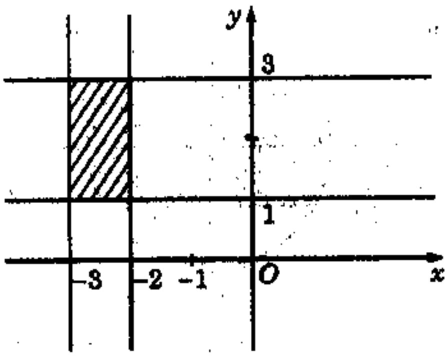
a) Phần thực của z bằng phần ảo của nó ;

b) Phần thực của z là số đối của phần ảo của nó ;

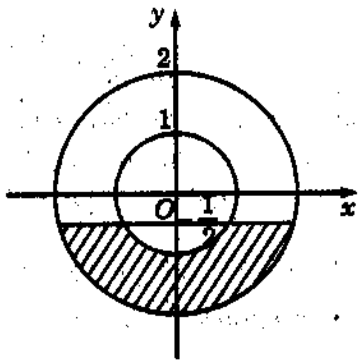
c) Phần ảo của z bằng hai lần phần thực của nó cộng với 1 ;

d) Tổng bình phương của phần thực và phần ảo của z bằng 1, phần thực của z không âm.

4.4. Số phức thoả mãn điều kiện nào thì có điểm biểu diễn ở phần gạch chéo trong các hình 79 và 80 ?



Hình 79



Hình 80

4.5. Hãy biểu diễn các số phức z trên mặt phẳng toạ độ, biết $|z| \le 2$ và

a) Phần thực của z không vượt quá phần ảo của nó ;

b) Phần ảo của z lớn hơn 1 ;

c) Phần ảo của z nhỏ hơn 1, phần thực của z lớn hơn 1.

4.6. Tìm số phức z, biết :

a) $|z| = 2$ và z là số thuần ảo ;

b) $|z| = 5$ và phần thực của z bằng hai lần phần ảo của nó.

4.7. Có thể nói gì về các điểm biểu diễn hai số phức z_1 và z_2, biết :

a) $|z_1| = |z_2|$?

b) $z_1 = \overline{z_2}$?

§2. Phép cộng và phép nhân số phức

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải phương trình sau trên tập số phức

$$3x + (2 + 3i)(1 - 2i) = 5 + 4i.$$

Giải

Ta có $\quad 3x + (2 + 3i)(1 - 2i) = 5 + 4i$

$$\Leftrightarrow 3x + 8 - i = 5 + 4i \Leftrightarrow 3x = (5 + 4i) - (8 - i)$$

$$\Leftrightarrow 3x = -3 + 5i \Leftrightarrow x = -1 + \frac{5}{3}i.$$

• ***Ví dụ 2***

Chứng minh rằng

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 ; \quad \overline{z_1 . z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2 .$$

Giải

Giả sử $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$.

Khi đó, $\overline{z}_1 = a - bi, \ \overline{z}_2 = c - di$.

Ta có $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$;

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i.$$

Vậy $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

Tương tự

$\overline{z_1.z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$;

$\overline{z}_1.\overline{z}_2 = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)+(-ad-bc)i = (ac-bd)-(ad+bc)i.$

Vậy $\overline{z_1.z_2} = \overline{z}_1.\overline{z}_2$.

• ***Ví dụ 3***

Tính $(1+i)^{10}$.

Giải

Ta có $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i.$

Vậy $(1+i)^{10} = \left((1+i)^2\right)^5 = (2i)^5 = 2^5.i^5 = 32i.$

C. BÀI TẬP

4.8. Thực hiện các phép tính :

a) $(2+4i)(3-5i)+7(4-3i)$; b) $(1-2i)^2-(2-3i)(3+2i)$.

4.9. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(5-7i)+\sqrt{3}x = (2-5i)(1+3i)$; b) $5-2ix = (3+4i)(1-3i)$.

4.10. Tính các luỹ thừa sau :

a) $(3-4i)^2$; b) $(2+3i)^3$;

c) $[(4+5i)-(4+3i)]^5$; d) $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$.

4.11. Tính :

a) $(1+i)^{2006}$; b) $(1-i)^{2006}$.

4.12. Cho x, y là những số phức. Chứng minh rằng mỗi cặp số sau là hai số phức liên hợp của nhau :

a) $x+\overline{y}$ và $\overline{x}+y$; b) $x\overline{y}$ và $\overline{x}y$; c) $x-\overline{y}$ và $\overline{x}-y$.

4.13. Tính :

a) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

4.14. Cho $z = a + bi$. Chứng minh rằng :

a) $z^2 + (\bar{z})^2 = 2(a^2 - b^2)$; b) $z^2 - (\bar{z})^2 = 4abi$;

c) $z^2(\bar{z})^2 = (a^2 + b^2)^2$.

4.15. Chứng minh rằng với mọi số phức u và v, ta có

a) $|u| - |v| \leq |u + v| \leq |u| + |v|$;

b) $|u| - |v| \leq |u - v| \leq |u| + |v|$;

c) $|uv| = |u| . |v|$.

4.16. Phân tích thành nhân tử trên tập số phức :

a) $u^2 + v^2$; b) $u^4 - v^4$.

§3. Phép chia số phức

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Tính $$\frac{(3 + 2i)(1 - 3i)}{1 + i\sqrt{3}} + (2 - i).$$

Giải

$$\begin{aligned}\frac{(3 + 2i)(1 - 3i)}{1 + i\sqrt{3}} + (2 - i) &= \frac{(9 - 7i)(1 - i\sqrt{3})}{4} + (2 - i)\\ &= \frac{(9 - 7\sqrt{3}) - (7 + 9\sqrt{3})i + 4(2 - i)}{4}\\ &= \frac{17 - 7\sqrt{3}}{4} - \frac{11 + 9\sqrt{3}}{4}i.\end{aligned}$$

• ***Ví dụ 2***

Giải phương trình sau trên tập số phức

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{3})x + i\sqrt{2} = \sqrt{3} + 2i\sqrt{2}.$$

Giải

Ta có $(\sqrt{2} - i\sqrt{3})x + i\sqrt{2} = \sqrt{3} + 2i\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - i\sqrt{3})x = \sqrt{3} + i\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{3})}{5} \Leftrightarrow x = \frac{5i}{5} = i.$$

C. BÀI TẬP

4.17. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\dfrac{(2+i) + (1+i)(4-3i)}{3+2i}$;

b) $\dfrac{(3-4i)(1+2i)}{1-2i} + 4 - 3i.$

4.18. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(3+4i)x = (1+2i)(4+i)$;

b) $2ix + 3 = 5x + 4i$;

c) $3x(2-i) + 1 = 2ix(1+i) + 3i.$

4.19. Chứng minh rằng :

a) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}.$

4.20. a) Cho số phức z. Chứng minh rằng z là số thực khi và chỉ khi $z = \overline{z}$.

b) Chứng tỏ rằng số phức sau là một số thực

$$z = -\frac{3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i} + \frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}.$$

4.21. Tìm nghịch đảo của số phức sau :

a) $\sqrt{2} - i\sqrt{3}$;

b) i ;

c) $\dfrac{1+i\sqrt{5}}{3-2i}$;

d) $(3+i\sqrt{2})^2.$

§4. Phương trình bậc hai với hệ số thực

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Các căn bậc hai của số thực $a < 0$ là $\pm i\sqrt{|a|}$.

• Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép (thực) $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải phương trình $x^2 + x + 7 = 0$.

Giải

Ta có $\Delta = 1 - 4.7 = -27$. Phương trình có hai nghiệm phức

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{27}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{27}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Chứng minh rằng $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Giải

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Xét các trường hợp của Δ :

Trường hợp $\Delta = 0$ hay $b^2 = 4ac$, ta có $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ nên

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$z_1 . z_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Trường hợp $\Delta > 0$, ta có $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

nên $$z_1 + z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$z_1 . z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Trường hợp $\Delta < 0$, ta có $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

nên $$z_1 + z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} + \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$z_1 . z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} . \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{b^2-i^2|\Delta|}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2+|\Delta|}{4a^2} = \frac{b^2+(4ac-b^2)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

C. BÀI TẬP

4.22. Chứng minh rằng số thực $a < 0$ chỉ có hai căn bậc hai phức là $\pm i\sqrt{|a|}$.

4.23. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $2x^2 + 3x + 4 = 0$; b) $3x^2 + 2x + 7 = 0$; c) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$.

4.24. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + \sqrt{3}x + 3 = 0$. Hãy tính :

a) $z_1^2 + z_2^2$; b) $z_1^3 + z_2^3$; c) $z_1^4 + z_2^4$; d) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

4.25. Chứng minh rằng hai số phức liên hợp z và $\overline{z}$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.

4.26. Lập phương trình bậc hai có nghiệm là :

a) $1 + i\sqrt{2}$ và $1 - i\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} + 2i$ và $\sqrt{3} - 2i$;

c) $-\sqrt{3} + i\sqrt{2}$ và $-\sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

4.27. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $x^3 - 8 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$.

Bài tập ôn chương IV

4.28. Thực hiện các phép tính :

a) $(2+3i)(3-i)+(2-3i)(3+i)$; b) $\dfrac{2+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}+\dfrac{1+i\sqrt{2}}{2-i\sqrt{2}}$;

c) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}+\dfrac{(1+i)(2-i)}{2+i}$.

4.29. Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để tính :

a) $(2+i\sqrt{3})^2$; b) $(1+2i)^3$; c) $(3-i\sqrt{2})^2$; d) $(2-i)^3$.

4.30. Thực hiện các phép tính :

a) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; b) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

4.31. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(1+2i)x-(4-5i)=-7+3i$; b) $(3+2i)x-6ix=(1-2i)[x-(1+5i)]$.

4.32. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $3x^2+(3+2i\sqrt{2})x-\dfrac{(1+i)^3}{1-i}=i\sqrt{8}x$;

b) $(1-ix)^2+(3+2i)x-5=0$.

4.33. Tìm số phức z, biết :

a) $\overline{z}=z^3$; b) $|z|+z=3+4i$.

4.34. Tìm số phức z thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} |z-2i|=|z| \\ |z-i|=|z-1|. \end{cases}$$

4.35. Chứng tỏ rằng $\dfrac{z-1}{z+1}$ là số thực khi và chỉ khi z là một số thực khác -1.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG IV

§1

4.1. *Đáp số :* a) $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{3}{5}$; b) $x = -\frac{7}{11}, y = -\frac{6}{11}$;

c) $x = y = 0$.

4.2. *Đáp số :* a) $a = c$, $b = -d$; b) $a = -c$, $b = d$;

c) $a = d$, $b = c$; d) $a = -c$, $b = -d$.

4.3. *Đáp số :*

a) Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và góc phần tư thứ ba.

b) Đường phân giác của góc phần tư thứ hai và góc phần tư thứ tư.

c) Đường thẳng $y = 2x + 1$.

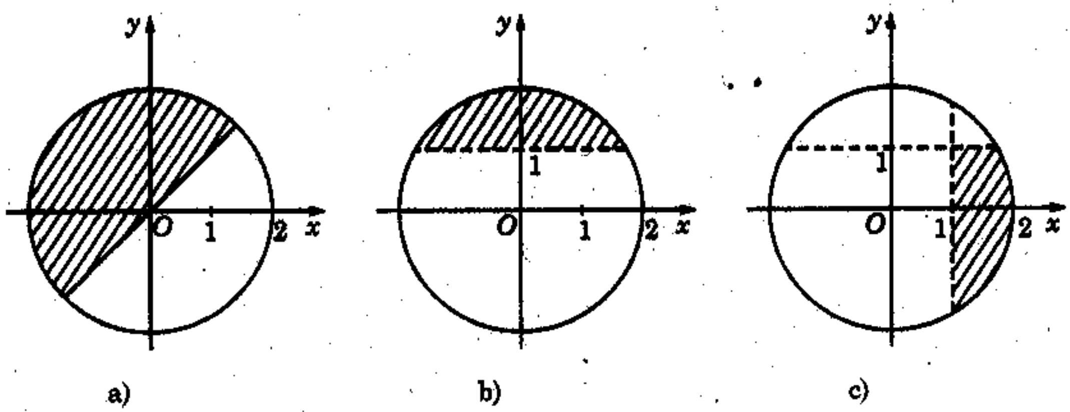
d) Nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1, nằm bên phải trục Oy.

4.4. *Đáp số :*

a) Phần thực của z thuộc đoạn $[-3 ; -2]$ trên trục Ox ; phần ảo của z thuộc đoạn $[1 ; 3]$ trên trục Oy.

b) Phần ảo của z nhỏ hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2}$, $1 \le |z| \le 2$.

4.5. *Đáp số :* (H.81).



Hình 81

4.6. *Đáp số :* a) $z = \pm 2i$; b) $z = \pm\left(2\sqrt{5} + i\sqrt{5}\right)$.

4.7. *Đáp số :*

a) Các điểm biểu diễn z_1 và z_2 cùng nằm trên đường tròn có tâm là gốc toạ độ O.

b) Các điểm biểu diễn z_1 và z_2 đối xứng với nhau qua trục Ox.

§2

4.8. *Đáp số :* a) $54 - 19i$; b) $-15 + i$.

4.9. a) $x = \dfrac{12}{\sqrt{3}} + \dfrac{8}{\sqrt{3}}i$; b) $x = \dfrac{5}{2} + 5i$.

4.10. a) $(3 - 4i)^2 = 3^2 - 2.3.4i + (4i)^2 = -7 - 24i$;

b) $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 3.2^2.3i + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 = -46 + 9i$;

c) $[(4 + 5i) - (4 + 3i)]^5 = (2i)^5 = 32i$;

d) $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right)^2 = -1 - 2i\sqrt{6}$.

4.11. a) $(1 + i)^{2006} = \left((1 + i)^2\right)^{1003} = (2i)^{1003} = 2^{1003}.i^{1003} = -2^{1003}.i$;

b) $(1 - i)^{2006} = 2^{1003}.i$.

4.12. a) $\overline{x + \overline{y}} = \overline{x} + \overline{\overline{y}} = \overline{x} + y$; b) $\overline{x\overline{y}} = \overline{x}.\overline{\overline{y}} = \overline{x}.y$;

c) $\overline{x - \overline{y}} = \overline{x} - \overline{\overline{y}} = \overline{x} - y$.

4.13. *Đáp số :* a) 1 ; b) -1.

4.14. *HD :* $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$;

$(\overline{z})^2 = (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$;

$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Từ đó suy ra các kết quả.

4.15. Đặt $u = a + bi$, $v = c + di$. Khi đó $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|v| = \sqrt{c^2 + d^2}$;

$$|u + v| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

a) • Ta có $|u+v| \le |u| + |v| \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2+(b+d)^2 \le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$\Leftrightarrow ac+bd \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}. \qquad (*)$$

Nếu $ac+bd<0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Nếu $ac+bd \ge 0$ thì (*) $\Leftrightarrow (ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+b^2d^2+2abcd \le a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2.$$

$$\Leftrightarrow 2abcd \le a^2d^2+b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2+b^2c^2-2abcd = (ad-bc)^2, \text{ đúng.}$$

• Ta có $|u|-|v| \le |u+v| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} \le \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

Nếu $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} < 0$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng.

Nếu $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} \ge 0$ thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \le (a+c)^2+(b+d)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \le a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \le ac+bd. \qquad (**)$$

Nếu $ac+bd \ge 0$ thì (**) luôn đúng.

Nếu $ac+bd<0$ thì (**) tương đương với

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+b^2d^2+2acbd \le a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2+b^2c^2-2acbd = (ad-bc)^2 \text{ (đúng).}$$

b) Đặt $-v = -c-di$ thì $u-v = u+(-v)$ và $|-v| = |v|$.

Từ đó áp dụng câu a), ta được kết luận câu b).

c) $uv = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\Rightarrow |uv| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}.$$

Mặt khác $|u||v| = \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$.

Từ đó suy ra $|uv| = |u||v|$.

4.16. a) $u^2+v^2 = u^2-(iv)^2 = (u-iv)(u+iv)$.

b) $u^4-v^4 = (u^2-v^2)(u^2+v^2) = (u-v)(u+v)(u-iv)(u+iv)$.

§3

4.17. *Đáp số :* a) $\frac{31}{13}-\frac{12}{13}i$; b) $\frac{27}{5}+\frac{9}{5}i$.

4.18. a) $x=\frac{(1+2i)(4+i)}{3+4i}=\frac{42}{25}+\frac{19}{25}i$; b) $x=\frac{-3+4i}{-5+2i}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$;

c) $x=\frac{-1+3i}{8-5i}=\frac{-23}{89}+\frac{19}{89}i$.

4.19. a) Giả sử $\frac{z_1}{z_2}=z$. Ta có $z_1=z.z_2$, suy ra $\overline{z}_1=\overline{z}.\overline{z}_2$ hay $\overline{z}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Vậy $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

b) Tương tự, $|z_1|=|z.z_2|=|z|.|z_2|$ hay $|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$. Vậy $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

4.20. a) Hiển nhiên $z\in\mathbb{R}$ thì $\overline{z}=z$. Ngược lại, giả sử $z=a+bi$ và $z=\overline{z}$. Từ đó suy ra $a+bi=a-bi$ và do đó $b=-b$ hay $b=0$.

Vậy $z\in\mathbb{R}$.

b) Ta có $z=\frac{-3-2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i}+\frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}$,

suy ra $\overline{z}=\overline{\left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i}+\frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{-3-2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i}\right)}+\overline{\left(\frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}\right)}$

$$=\frac{\overline{-3-2i\sqrt{3}}}{\overline{\sqrt{2}+3i}}+\frac{\overline{-3+2i\sqrt{3}}}{\overline{\sqrt{2}-3i}}=\frac{-3+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3i}+\frac{-3-2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3i}=z.$$

Vậy $z\in\mathbb{R}$.

4.21. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{5}i$; b) $\frac{1}{i}=-i$;

c) $\frac{3-2i}{1+i\sqrt{5}}=\frac{(3-2i)(1-i\sqrt{5})}{6}=\frac{3-2\sqrt{5}}{6}-\frac{3\sqrt{5}+2}{6}i$

d) $\frac{1}{(3+i\sqrt{2})^2}=\frac{(3-i\sqrt{2})^2}{121}=\frac{7}{121}-\frac{6\sqrt{2}}{121}i$.

§4

4.22. Giả sử z là một căn bậc hai của a, ta có $z^2 = a$. Vì $a < 0$ nên

$$a = -|a| = -\left(\sqrt{|a|}\right)^2.$$

Từ đó suy ra $z^2 = -\left(\sqrt{|a|}\right)^2 \Rightarrow z^2 + \left(\sqrt{|a|}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(z + i\sqrt{|a|}\right)\left(z - i\sqrt{|a|}\right) = 0.$

Vậy $\qquad z = i\sqrt{|a|}$ hay $z = -i\sqrt{|a|}$. □

4.23. a) $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{23}}{4}$; b) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 2i\sqrt{5}}{3}$;

c) $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm i\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

4.24. Theo Ví dụ 2, ta có $z_1 + z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1.z_2 = \dfrac{3}{2}$. Từ đó suy ra :

a) $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \dfrac{3}{4} - 3 = -\dfrac{9}{4}$.

b) $z_1^3 + z_2^3 = \left(z_1 + z_2\right)\left(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$.

c) $z_1^4 + z_2^4 = \left(z_1^2 + z_2^2\right)^2 - 2z_1^2.z_2^2 = \left(-\dfrac{9}{4}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

d) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_1z_2} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{2}$.

4.25. Nếu $z = a + bi$ thì $z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$; $z.\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

z và $\overline{z}$ là hai nghiệm của phương trình $(x - z)(x - \overline{z}) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - (z + \overline{z})x + z.\overline{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$$

4.26. a) $x^2 - 2x + 3 = 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 7 = 0$; c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 5 = 0$.

4.27. a) $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$;

b) $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; $x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Bài tập ôn chương IV

4.28. *Đáp số :*

a) 18 ; b) $\frac{3}{2}i\sqrt{2}$; c) $\frac{6}{5}(1+i)$.

4.29. *Đáp số :*

a) $1+4i\sqrt{3}$; b) $-11-2i$; c) $7-6i\sqrt{2}$; d) $2-11i$.

4.30. *Đáp số :*

a) $24i$; b) 2.

4.31. a) $(1+2i)x=-3-2i \Rightarrow x=-\dfrac{3+2i}{1+2i}=-\dfrac{7-4i}{5}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{4}{5}i.$

b) $(2-2i)x=-(11+3i) \Rightarrow x=-\dfrac{11+3i}{2(1-i)}=-2-\dfrac{7}{2}i.$

4.32. a) $3x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{15}}{6}$;

b) $-x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{7}}{2}.$

4.33. a) Ta có $z\overline{z}=|z|^2$ nên từ $\overline{z}=z^3$ suy ra $|z|^2=z^4$.

Đặt $z=a+bi$, suy ra

$$a^4+b^4-6a^2b^2+4ab(a^2-b^2)i=a^2+b^2. \qquad (*)$$

Do đó, ta có
$$4ab(a^2-b^2)=0 \qquad (**)$$

Từ (**) suy ra các trường hợp sau :

- $a=b=0 \Rightarrow z=0$.
- $a=0, b\neq 0$: Thay vào (*), ta có $b^4=b^2 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow z=\pm i$.
- $b=0, a\neq 0$: Tương tự, ta có $a=\pm 1 \Rightarrow z=\pm 1$.
- $a\neq 0, b\neq 0 \Rightarrow a^2-b^2=0 \Rightarrow a^2=b^2$, thay vào (*), ta có

  $2a^2(2a^2+1)=0$, không có a nào thỏa mãn (vì $a\neq 0$).

b) Đặt $z = a + bi$. Từ $|z| + z = 3 + 4i$ suy ra

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 + 4i \Rightarrow b = 4 \text{ và } \sqrt{a^2 + 16} + a = 3.$$

$$\Rightarrow a^2 + 16 = (3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2 \Rightarrow 6a = -7 \Rightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

Vậy $z = -\frac{7}{6} + 4i.$

4.34. Đặt $z = x + yi$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Vậy $z = 1 + i$.

4.35. Hiển nhiên nếu $z \in \mathbb{R}$, $z \neq -1$ thì $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$.

Ngược lại, nếu $\frac{z-1}{z+1} = a \in \mathbb{R}$ thì $z - 1 = az + a$ và $a \neq 1$,

suy ra $(1-a)z = a + 1 \Rightarrow z = \frac{a+1}{1-a} \in \mathbb{R}$ và hiển nhiên $z \neq -1$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

5.1. a) Xác định a, b, c, d để đồ thị của các hàm số

$$y = x^2 + ax + b \quad \text{và} \quad y = cx + d$$

cùng đi qua hai điểm $M(1 ; 1)$ và $B(3 ; 3)$.

b) Vẽ đồ thị của các hàm số ứng với các giá trị a, b, c và d tìm được trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong trên.

c) Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên quay quanh trục hoành.

5.2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{-x+2}{x+2}.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết nó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 42$.

5.3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{4x-5}{x-1}.$$

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), tiếp tuyến của (C) tại $A(2;3)$ và đường thẳng $x = 4$.

5.4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{5x+3}{-x+2}$; b) $y = \dfrac{-6x+2}{x-1}$;

c) $y = \dfrac{2x^2+8x-9}{3x^2+x-4}$; d) $y = \dfrac{x+2}{-2x+5}$.

5.5. Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 1$; b) $y = x^2\sqrt{x^2+2}$;

c) $y = x + \ln(x+1)$; d) $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

5.6. Tìm $a \in (0 ; 2\pi)$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1+2\cos a)x^2 + 2x\cos a + 1$ đồng biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

5.7. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $e^x + \cos x \geq 2 + x - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $e^x - e^{-x} \geq 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $\forall x \geq 0$;

c) $8\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin 2x > 2x$, $\forall x \in (0 ; \pi]$.

5.8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau trên các khoảng, đoạn tương ứng :

a) $g(x) = \left|x^3 + 3x^2 - 72x + 90\right|$ trên đoạn $[-5 ; 5]$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ trên đoạn $[-1 ; 2]$;

c) $f(x) = x - \ln x + 3$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

5.9. Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 4\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

(m là tham số).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Viết phương trình của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $A(0 ; 4\frac{1}{2})$.

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và các đường thẳng $x = 0$ và $x = 2$.

d) Xác định m để đồ thị của (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 4\frac{1}{2}$ tại ba điểm phân biệt.

5.10. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{4x+4}{2x+1}$.

b) Từ (C) suy ra đồ thị của hàm số $y = \left|\dfrac{4x+4}{2x+1}\right|$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{4}x - 3$.

5.11. Cho hàm số $y = \dfrac{(2+m)x+m-1}{x+1}$. (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

b) Xác định các điểm có toạ độ nguyên trên đồ thị của (1) khi $m \in \mathbb{Z}$.

5.12. Cho a, b, x là những số dương. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left[\dfrac{2a+(ab)^{\frac{1}{2}}}{3a}\right]^{-1}\left[\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-(ab)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]$;

b) $B = \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$;

c) $C = \sqrt{16^{\frac{1}{\log_7 4}} + 81^{\frac{1}{\log_6 9}} + 15}$;

d) $D = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

5.13. Với số a dương và khác 1, giả sử có ba hàm số :

$$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}; \quad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}; \quad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

Hãy chứng minh rằng :

a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$; b) $s(2x) = 2s(x)c(x)$;

c) $c(2x) = 2c(x) - 1 = 2s^2(x) + 1 = c^2(x) + s^2(x)$; d) $t(2x) = \dfrac{2t(x)}{1+t^2(x)}$.

5.14. Hãy biểu diễn :

a) $\log_{30} 8$ qua $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$;

b) $\log_9 20$ qua $a = \log 2$ và $b = \log 3$.

5.15. Giải các phương trình sau :

a) $\left(\dfrac{13}{24}\right)^{3x+7} = \left(\dfrac{24}{13}\right)^{2x+3}$; b) $\left(4-\sqrt{15}\right)^{\tan x} + \left(4+\sqrt{15}\right)^{\tan x} = 8$;

c) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7-\sqrt{15}}\right)^x = 13$.

5.16. Giải các phương trình sau :

a) $5^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)} = 1$; b) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$;

c) $7^{x^2}.5^{2x} = 7$;

d) $\log_4(x+2)\log_x 2 = 1$;

e) $\dfrac{\log_3 x}{\log_9 3x} = \dfrac{\log_{27} 9x}{\log_{81} 27x}$;

g) $\log_3 x + \log_4(2x-2) = 2$.

5.17. Giải các bất phương trình sau :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} < 1$;

b) $4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} < 2x^2.3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$;

c) $\log_x 4.\log_2 \dfrac{5-12x}{12x-8} \geq 2$.

5.18. Giải các bất phương trình sau :

a) $(0,5)^{\frac{1}{x}} \geq 0,0625$;

b) $\log_{0,2}(x^2-4) \geq -1$;

c) $\log_2 \log_{0,5}\left(2^x - \dfrac{15}{16}\right) \leq 2$;

d) $\log_3\left(16^x - 2.12^x\right) \leq 2x+1$.

5.19. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \mathrm{d}x$ (đặt $t = x+3$) ;

b) $\displaystyle\int_{-4}^{6}(|x+3| - |x-4|)\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{-3}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+7}+3}$ (đặt $t = \sqrt{x+7}$) ;

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+4\sin x}\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x^9}{x^{10}+4x^5+4}\mathrm{d}x$ (đặt $t = x^5$) ;

g) $\displaystyle\int_{0}^{3}(x+2)e^{2x}\mathrm{d}x$;

h) $\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{4+x}}{x}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sqrt{4+x}$).

5.20. Tính :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(5x^2 - x + e^{0,5x}\right)\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{0,5}^{2}\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^3} + \cos x\right)\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}}$ (đặt $t = \sqrt{2x+3}$) ;

d) $\int_1^2 \sqrt[3]{3x^3+4}\,x^2dx$ (đặt $t=\sqrt[3]{3x^3+4}$) ;   e) $\int_{-2}^{2}(x-2)|x|dx$;

g) $\int_1^0 x\cos x\,dx$;   h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$;

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$;   k) $\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx$.

5.21. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y=|x^2-1|$ và $y=5+|x|$;

b) $2y=x^2+x-6$ và $2y=-x^2+3x+6$;

c) $y=\frac{1}{x}+1$, $x=1$ và tiếp tuyến với đường $y=\frac{1}{x}+1$ tại điểm $\left(2\,;\frac{3}{2}\right)$.

5.22. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục *Ox* :

a) $y=x^3$; $y=1$ và $x=3$;   b) $y=\frac{2}{\pi}x$; $y=\sin x$; $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;

c) $y=x^{\alpha}$, $\alpha>0, x\in[0\,;1]$.

5.23. Chứng minh rằng :

a) $i+i^2+i^3+...+i^{99}+i^{100}=0$;   b) $\frac{(\sqrt{2}+i)(1-i)(1+i)}{i}=2-2\sqrt{2}i$.

5.24. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng toạ độ thoả mãn các điều kiện :

a) $|z-i|=1$;   b) $|2+z|<|2-z|$;   c) $2\le|z-1+2i|<3$.

5.25. Tính :

a) $\frac{5+2i}{7-i}$;   b) $\frac{3-i}{i}+(5-i)^2$.

5.26. Thực hiện các phép tính sau :

a) $z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;   b) $z=\frac{-41+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i}$.

5.27. Giải các phương trình sau :

a) $3x^2 - 4x + 2 = 0$; b) $x^2 - x + 9 = 0$.

5.28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 + i \\ 3x + iy = 2 - 3i. \end{cases}$

5.29. Với những giá trị thực nào của x và y thì các số phức

$$z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5 \text{ và } z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$$

là liên hợp của nhau ?

5.30. Tìm môđun của các số phức sau :

a) $z_1 = -8 + \frac{1}{2}i$; b) $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{7}i$.

Đề tự kiểm tra

Đề 1

Câu I (3 điểm). Cho hàm số $y = 2 - \frac{2}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Từ (C) vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \left|\frac{2(x-3)}{x-2}\right|. \qquad (1)$$

Dựa vào đồ thị của (1), hãy biện luận theo k số nghiệm của phương trình

$$\left|\frac{2(x-3)}{x-2}\right| = \log_2 k. \qquad (2)$$

3) Tìm các điểm thuộc (C) có toạ độ nguyên.

Câu II (2 điểm). Giải các phương trình sau :

1) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$; 2) $\log_2(\cot x + \tan 3x) - 1 = \log_2(\tan 3x)$.

Câu III (2 điểm).

1) Tính tích phân $\int\limits_0^2 \sqrt{1+2x^2}\, x\, dx$ (đặt $t = \sqrt{1+2x^2}$) ;

2) Tìm môđun của số phức $z = \frac{-8-3i}{1-i}$.

Đề 2

Câu I (3,5 điểm). Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + m - 1$.

1) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị. Xác định m để một trong những điểm cực trị đó nằm trên trục Ox.

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = \frac{1}{3}$.

3) Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 2$.

4) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 2$.

Câu II (2 điểm)

1) Giải phương trình $3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84$.

2) Giải bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}(3 - 2x) > 1$.

Câu III (1,5 điểm)

1) Tính tích phân $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+3}dx$ (đặt $t = \sqrt{x+1}$).

2) Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện :

a) $|z+1| = |z-i|$; b) $|z|^2 + 3z + 3\overline{z} = 0$.

Đề 3

Câu I (3 điểm). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1 ; 0)$.

3) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^3 + 3x - 2 = \log_3 m$.

Câu II (2 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

1) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3 ; 6]$;

2) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

Câu III (2 điểm)

1) Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)e^{2x}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x . \cos 4x \, dx$.

2) Tìm môđun của các số phức sau :

a) $z = (-4 + i\sqrt{48})(2 + i)$; b) $z = \dfrac{1+i}{2-i}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ ÔN TẬP CUỐI NĂM

5.1. a) • a và b thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 9 + 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

• c và d thoả mãn hệ phương trình

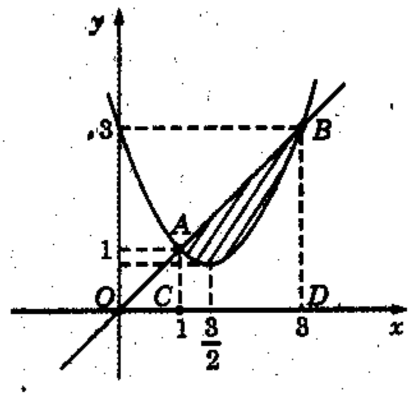
$$\begin{cases} c + d = 1 \\ 3c + d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

b) (H.82) Ta có hai hàm số tương ứng là

$$y = x^2 - 3x + 3 \text{ và } y = x.$$

Vậy $S = \displaystyle\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$

$= \dfrac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).



Hình 82

c) $V = V_1 - V_2$, trong đó V_1 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra do quay hình thang $ACDB$ quanh trục Ox, V_2 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra do quay hình thang cong $ACDB$ quanh trục Ox.

Ta có $V_1 = \pi\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}\pi$;

$$V_2 = \pi\int_1^3 \left(x^2 - 3x + 3\right)^2 dx = \frac{22}{5}\pi.$$

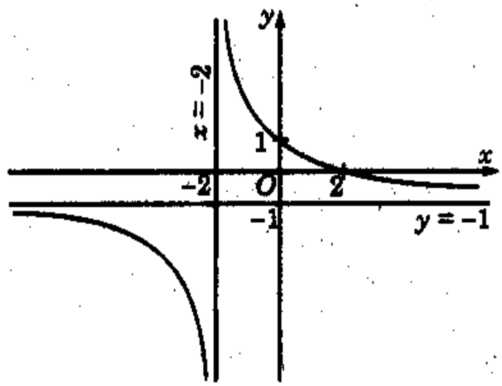
Vậy $V = \frac{26}{3}\pi - \frac{22}{5}\pi = \frac{64}{15}\pi$ (đơn vị thể tích).

5.2. a) $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
- Ta có $y' = -\dfrac{4}{(x+2)^2}$;

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1



Hình 83

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;\,-2)$ và $(-2\,;\,+\infty)$.

- Tiệm cận đứng $x = -2$ vì $\lim\limits_{x\to -2^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} y = -\infty$.

Tiệm cận ngang $y = -1$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -1$.

Giao với các trục toạ độ : $(0\,;\,1)$; $(2\,;\,0)$.

Đồ thị như trên Hình 83.

b) Tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc $k = -2$ (vì vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 42$).

Hoành độ tiếp điểm thoả mãn phương trình

$$\frac{-4}{(x+2)^2} = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2+\sqrt{2} \\ x_2 = -2-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ứng với $x_1 = -2 + \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 + 4\sqrt{2}$;

Ứng với $x_2 = -2 - \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 - 4\sqrt{2}$.

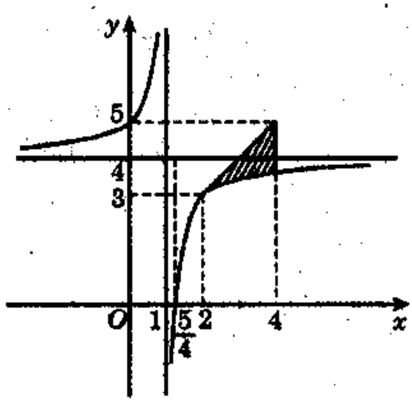
5.3. a) $y = \dfrac{4x-5}{x-1}$.

• Tập xác định : $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

• $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	4 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	4



Hình 84

Các khoảng đồng biến là $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$:

Tiệm cận đứng $x = 1$

vì $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$.

Tiệm cận ngang $y = 4$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 4$.

Giao với các trục toạ độ : $(0 ; 5)$ và $\left(\dfrac{5}{4} ; 0\right)$.

Đồ thị như trên Hình 84.

b) Ta có $y'(2) = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$.

Diện tích của miền cần tìm là

$$S = \int_2^4 \left(x + 1 - 4 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int_2^4 \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln 3.$$

5.4. a) Tiệm cận đứng : $x = 2$; Tiệm cận ngang : $y = -5$.

b) Tiệm cận đứng : $x = 1$; Tiệm cận ngang : $y = -6$.

c) Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 + 8x - 9}{3x^2 + x - 4} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2\left(2 + \dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = \frac{2}{3}$.

Ta có $y = \frac{2x^2 + 8x + 9}{(x-1)(3x+4)}$.

Từ đó đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -\frac{4}{3}$.

d) Tiệm cận đứng : $x = \frac{5}{2}$. Tiệm cận ngang : $y = -\frac{1}{2}$.

5.5. a) $y' = -3x^2 - 12x + 15$; $y'' = -6x - 12$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5. \end{array}\right.$

$y''(1) = -18 < 0$; $y''(-5) = 18 > 0$.

Vậy với $x = -5$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = -99$.

Với $x = 1$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 9$.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Hàm số có cực tiểu khi $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

c) Tập xác định : $x > -1$. $y' = 1 + \frac{1}{x+1}$; $y' > 0, \forall x > -1$.

Hàm số luôn đồng biến nên không có cực trị.

d) Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \; ; \; y''(0) = 2 > 0 \; ; \; y''(-2) = -2 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CĐ} = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 0$.

5.6. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$; $y' = x^2 - (1 + 2\cos\alpha)x + 2\cos\alpha$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2\cos\alpha. \end{array}\right.$

Vì $y' > 0$ ở ngoài khoảng nghiệm nên để hàm số đồng biến với mọi $x > 1$ thì

$$2\cos\alpha \le 1 \Leftrightarrow \cos\alpha \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{5\pi}{3}.$$

5.7. a) Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2}$, có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x \ ; \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta lại có $f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$, $\forall x$ vì $1 - \cos x \geq 0$ và $e^x > 0$.

Như vậy, $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó : $f'(x) < f'(0) = 0, \forall x < 0$; $f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2} \geq f_{CT} = f(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) $\forall x \geq 0$ xét hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, ta có

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}};$$

Từ đó $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$ $\left(\text{vì } e^x + e^{-x} > 2 \text{ và } \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}} < 2\right)$

và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[0 ; +\infty)$, tức là

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - e^0 - 2\ln 1 = 0.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

c) Xét hàm số $f(x) = 8\sin^2\dfrac{x}{2} + \sin 2x - 2x$, $\forall x \in (0 ; \pi]$.

$$f'(x) = 4\sin x + 2\cos 2x - 2 = 4\sin x(1 - \sin x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{array}\right..$$

Với $x \in (0 ; \pi]$ ta có $f'(x) \geq 0$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hai điểm.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $(0 ; \pi]$. Mặt khác, $f(0) = 0$ nên $f(x) > 0$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

5.8. a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên đoạn $[-5 ; 5]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -6 \notin [-5 ; 5]. \end{array}\right.$$

$$f(-5) = 400;\ f(5) = -70 ;\ f(4) = -86.$$

Ngoài ra, $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5 ; 5]$ và $f(-5).f(5) < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-5 ; 5)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Ta có $g(x) = |f(x)| \geq 0$ và $g(x_0) = |f(x_0)| = 0$; $g(-5) = |400| = 400$; $g(5) = |-70| = 70$; $g(4) = |f(4)| = |-86| = 86$.

Vậy $\min\limits_{[-5;5]} g = g(x_0) = 0$; $\max\limits_{[-5;5]} g = g(-5) = 400$.

b) $\min\limits_{[-1;2]} f = f(\sqrt{2}) = -3$; $\max\limits_{[-1;2]} f = f(2) = f(0) = 1$.

c) $\min\limits_{(0;+\infty)} f = f(1) = 4$. Không có giá trị lớn

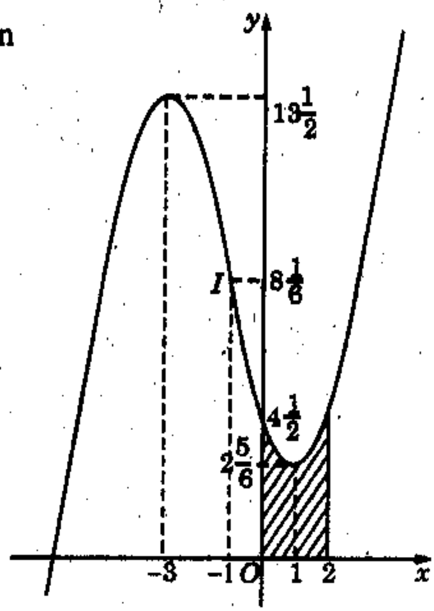
5.9. a) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên : $y' = x^2 + 2x - 3$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$13\frac{1}{2}$	$\searrow$	$2\frac{5}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 85

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -3)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-3 ; 1)$.

• Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$; $y_{CĐ} = 13\frac{1}{2}$ và $y_{CT} = 2\frac{5}{6}$ khi $x = 1$.

• Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0 ; 4\frac{1}{2}\right)$ và có dạng như trên Hình 85.

$y'' = 2x + 2$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $I\left(-1 ; 8\frac{1}{6}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Tiếp tuyến với (C) đi qua $A\left(0 ; 4\frac{1}{2}\right)$ có phương trình là

$$y = f'(0)x + 4\frac{1}{2}, \text{ trong đó } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}.$$

Ta có $f'(0) = -3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 4\frac{1}{2}$.

c) $S = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}\right)dx = 7$ (đơn vị diện tích).

d) Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -3x + 4\frac{1}{2}$ với đồ thị của (1) thoả mãn phương trình

$$\frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 4\frac{1}{2} = -3x + 4\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Ta có (4) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow x\left[x^2 - 3(m-1)x + 3m\right] = 0$.

Để (4) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình

$$f(x) = x^2 - 3(m-1)x + 3m = 0$$

phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} f(0) = 3m \neq 0 \\ \Delta = 9(m-1)^2 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{3} \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{3},\ m \neq 0 \\ m > 3. \end{array}\right.$$

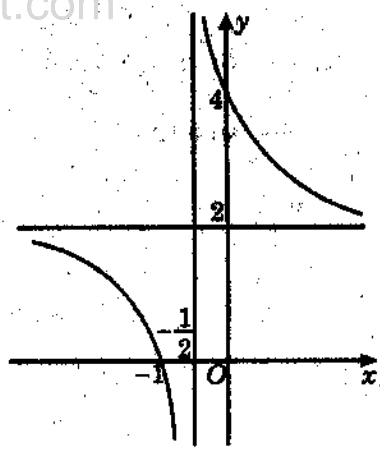
5.10. a) $y = \frac{4x+4}{2x+1}$.

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y' = -\frac{4}{(2x+1)^2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2



Hình 86

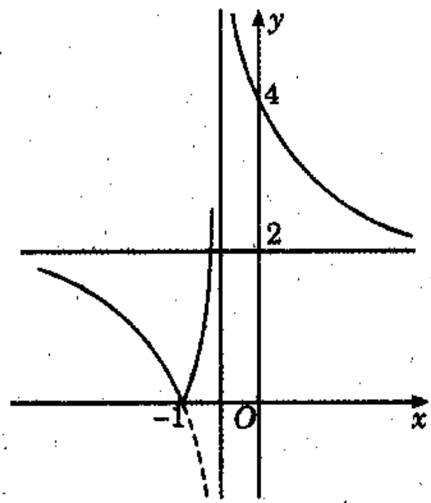
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty ; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

Tiệm cận đứng : $x = -\frac{1}{2}$; Tiệm cận ngang : $y = 2$.

Giao với các trục toạ độ : $(0 ; 4)$ và $(-1 ; 0)$.

Đồ thị như trên Hình 86.

b) Đồ thị của hàm số được suy ra từ (C) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (H.87).



Hình 87

c) Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm phải thoả mãn phương trình $-\frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Hai tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{8}$.

5.11. a) Với $m = 2$, ta có $y = \dfrac{4x+1}{x+1}$.

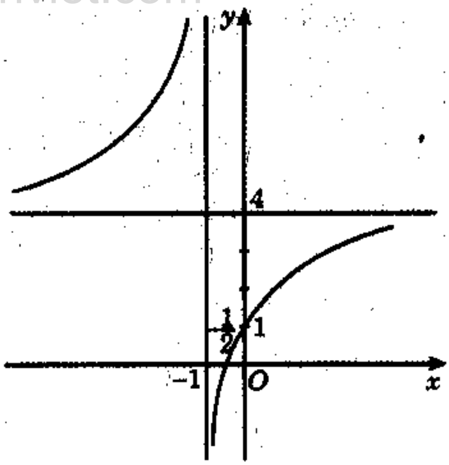
Học sinh tự khảo sát (H.88).

b) Ta có $y = 2 + m - \dfrac{3}{x+1}$.

Vậy để y nguyên với x và m nguyên thì $x + 1$ phải là ước của 3, tức là

$x + 1 = \pm 1$ hoặc $x + 1 = \pm 3$ hay $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$; $x_4 = 2$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị của (1) có toạ độ nguyên là $A(0 ; m - 1)$; $B(-2 ; 5 + m)$; $C(-4 ; 3 + m)$; $D(2 ; m + 1)$.



Hình 88

5.12. Do a, b, x là những số dương nên ta có :

a) $$A_1 = \left[\frac{2a + (ab)^{\frac{1}{2}}}{3a}\right]^{-1} = \frac{3a}{2a + (ab)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$A_2 = \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - (ab)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right] = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + (ab)^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)} - \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{a + (ab)^{\frac{1}{2}} + b - a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Vậy $A = A_1.A_2 = \dfrac{3a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}} = 3\sqrt{b}$.

b) $$B_1 = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}\right)^{-2} = \frac{(a+x)\left(\sqrt{a} + \sqrt{x}\right)^2}{4ax}.$$

$$B_2 = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right)^{-2} = \frac{(a+x)\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2}{4ax}.$$

Vậy $B = B_1 - B_2 = \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

c) Ta có $16^{\frac{1}{\log_7 4}} = 4^{2\log_4 7} = 49$; $81^{\frac{1}{\log_6 9}} = 36$

$\Rightarrow C = \sqrt{49+36+15} = 10.$

d) Ta có $49^{1-\log_7 2} = \dfrac{49}{49^{\log_7 2}} = \dfrac{49}{4}$; $5^{-\log_5 4} = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow D = \dfrac{49}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{2}.$

5.13. Với a dương và khác 1, ta có :

a) $c^2(x) - s^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2 - a^{2x} - a^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad \square$$

d) $t(2x) = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$. Mặt khác, ta có

$$1 + t^2(x) = 1 + \left(\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}\right)^2 = \frac{2\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)}{a^{2x} + a^{-2x} + 2}.$$

Ta biến đổi vế phải $\dfrac{2t(x)}{1+t^2(x)} = 2\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \cdot \dfrac{a^{2x} + a^{-2x} + 2}{2\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)} =$

$$= \frac{2\left(a^x - a^{-x}\right)\left(a^x + a^{-x}\right)^2}{2\left(a^x + a^{-x}\right)\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)} = \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}}. \quad \square$$

Các câu b), c) học sinh tự chứng minh.

5.14. a) Ta có $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3.\log_{30}\dfrac{30}{15}$

$$= 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30}(3.5)\right) = 3\left(1 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3(1 - a - b).$$

b) Chuyển sang cơ số 10. Sau khi biến đổi, ta được $\log_9 20 = \dfrac{1+a}{2b}.$

5.15. a) Phương trình đã cho tương đương với $\left(\dfrac{13}{24}\right)^{3x+7} = \left(\dfrac{13}{24}\right)^{-(2x+3)}$

$$\Leftrightarrow 3x + 7 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -2.$$

b) Vì $\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right) = 1$ nên ta đặt $\left(4-\sqrt{15}\right)^{\tan x} = t \; (t > 0)$,

ta được phương trình $t^2 - 8t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 + \sqrt{15} \\ t = 4 - \sqrt{15}. \end{array}\right.$$

• Ứng với $t = 4 - \sqrt{15}$, ta có $(4-\sqrt{15})^{\tan x} = 4 - \sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

• Ứng với $t = 4 + \sqrt{15}$, ta có $(4-\sqrt{15})^{\tan x} = 4 + \sqrt{15} = (4-\sqrt{15})^{-1}$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta nhận thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình. Mặt khác, hàm số

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7-\sqrt{15}}\right)^x$$

là tổng của hai hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 (hai hàm số đồng biến) nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

5.16. a) Vì $1 = 5^0$ nên ta có $5^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)} = 1 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$. (1)

Vì $4^x, 6^x, 9^x$ đều khác 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên chia cả hai vế của phương trình (1) cho 4^x hoặc 6^x hoặc 9^x, ta được phương trình tương đương.

Chia cả hai vế cho 6^x, ta có (1) $\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6.\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t\ (t > 0)$, ta có

$$6t - 13 + \frac{6}{t} = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

• Với $t = \frac{2}{3}$ ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1.$

• Với $t = \frac{3}{2}$ ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1.$

c) Lôgarit hoá hai vế theo cơ số 7, ta được

$$x^2 + 2x.\log_7 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\log_7 5 - \sqrt{\log_7^2 5 + 1} \\ x = -\log_7 5 + \sqrt{\log_7^2 5 + 1}. \end{array}\right.$$

d) $\log_4(x+2).\log_x 2 = 1$. (1)

Điều kiện : $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+2).\frac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2 x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

e) Điều kiện : $x > 0$.

Đổi sang cơ số 3 và đặt $\log_3 x = t$, ta được phương trình

$$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)}.$$

Giải phương trình ẩn t, ta được $t_1 = 1$, $t_2 = -4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{1}{81}$.

g) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Đặt $\log_3 x + \log_4(2x-2) = f(x)$.

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số đồng biến. Mặt khác $f(3) = 2$ nên ta có

$$f(x) > f(3) = 2 \text{ với } x > 3 \text{ và } f(x) < f(3) = 2 \text{ với } 1 < x < 3.$$

Từ đó suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

5.17. a) Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Vì $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ và $1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ nên ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 1.$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3. \end{array}\right.$$

b) Ta có bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} - 2x^2.3^{\sqrt{x}} - 2x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3 + x - 2x^2)3^{\sqrt{x}} - 2(x - 2x^2 + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + x + 3)(3^{\sqrt{x}} - 2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 < 0 \\ x \geq 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_3^2 2 \\ x \geq 0 \\ -1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \log_3^2 2 \left(\text{vì } \log_3^2 2 < 1 < \dfrac{3}{2}\right).$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3^2 2 \\ x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x < \log_3^2 2$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$.

c) Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{5-12x}{12x-8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{12} < x < \dfrac{2}{3}.$ (*)

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{\log_2 x}.\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \leq \log_2 x$$

$\left(\text{vì khi } x \in \left(\dfrac{5}{12}; \dfrac{2}{3}\right) \text{ thì } \log_2 x < 0\right)$.

$$\Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} - x \le 0 \Leftrightarrow \frac{(6x+5)(1-2x)}{12x-8} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6} \le x \le \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta có $\frac{5}{12} < x \le \frac{1}{2}$.

5.18. a) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{1}{4} \\ x < 0. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{0,2}(x^2-4) \ge \log_{0,2} 0,2^{-1} = \log_{0,2} 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \le 5 \text{ (vì } 0,2 < 1) \Leftrightarrow x^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l} 2 < x \le 3 \\ -3 \le x < -2. \end{array}\right.$

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$0 < \log_{0,5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \le 4$$

$$\Leftrightarrow 1 > 2^x - \frac{15}{16} \ge 0,5^4 \Leftrightarrow \frac{31}{16} > 2^x \ge 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{31}{16} > x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x < \log_2 31 - 4.$$

Ở đây, chúng ta đã áp dụng tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số lôgarit và hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 1.

d) Bất phương trình đã cho tương đương với $0 < 16^x - 2.12^x \le 3^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 0 < 4^x.4^x - 2.4^x.3^x \le 3^x.3^x.3$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3. \qquad (1)$$

(Ta đã chia cả hai vế cho 9^x ($9^x > 0$)).

Đặt $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$, ta có hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} t^2 - 2t \le 3 \\ t^2 - 2t > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2t - 3 \le 0 \\ t^2 - 2t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ -1 \le t \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < t \le 3$$

Từ đó, ta có $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}} 2 < x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$.

5.19. a) Đổi biến $t = x + 3 \Rightarrow x - 2 = t - 5$. Khi $x = -2$ thì $t = 1$, khi $x = 4$ thì $t = 7$, ta có

$$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 dx = \int_1^7\left(1 - \frac{10}{t} + \frac{25}{t^2}\right)dt = \left(t - 10\ln t - \frac{25}{t}\right)\Bigg|_1^7 = 27\frac{3}{7} - 10\ln 7.$$

b) $\displaystyle\int_{-4}^{6}(|x+3| - |x-4|)dx = -7\int_{-4}^{-3}dx + \int_{-3}^{4}(2x-1)dx + \int_4^6 7dx = 7$.

c) Đổi biến $t = \sqrt{x+7}$, ta có $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{2t\,dt}{t+3} = 2 - 6\ln 1{,}2$.

d) Đổi biến $t = 1 + 4\sin x$, ta có $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln 5$.

e) Đổi biến $t = x^5$.

$$I = \frac{1}{5}\int_1^{32}\frac{t\,dt}{t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{5}\int_1^{32}\frac{(t+2-2)dt}{(t+2)^2} = \frac{1}{5}\int_1^{32}\left[\frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln(t+2) + \frac{2}{t+2}\right]\Bigg|_1^{32} = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{34}{3} - \frac{31}{51}\right).$$

g) Đặt $u = x + 2$, $dv = e^{2x}dx \Rightarrow du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Ta có $I = \dfrac{1}{2}(x+2)e^{2x}\Big|_0^3 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}(5e^6 - 2) - \frac{1}{4}(e^6 - 1) = \frac{3}{4}(3e^6 - 1)$.

h) Đổi biến $t = \sqrt{4+x}$.

$$I = 2\int_{\sqrt{6}}^{3}\left(1+\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$= 2\left(t+\ln\frac{t-2}{t+2}\right)\Bigg|_{\sqrt{6}}^{3} = 2\left[3-\sqrt{6}-\ln\left(25-10\sqrt{6}\right)\right].$$

5.20. a) *Đáp số :* $13\frac{1}{2}+2\left(e-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; b) *Đáp số :* $\frac{7\sqrt{2}}{3}-5\frac{5}{8}+\sin 2-\sin\frac{1}{2}$;

c) *Đáp số :* $\sqrt{7}-\sqrt{5}$;

d) *HD :* Đổi biến $t=\sqrt[3]{3x^3+4}$

$\Rightarrow t^3 = 3x^3+4 \Rightarrow 3t^2dt = 9x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}t^2dt$.

Ta có $\int_1^2 (3x^3+4)^{\frac{1}{3}}x^2dx = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{28}} t^3dt = \frac{1}{12}t^4\Big|_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{28}} = \frac{7\sqrt[3]{7}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right)}{12}.$

e) $\int_{-2}^{2}(x-2)\,|\,x\,|\,dx = \int_{-2}^{0}(2x-x^2)dx + \int_{0}^{2}(x^2-2x)dx = -\frac{20}{3}-\frac{4}{3} = -8.$

g) $\int_1^0 x\cos x dx = x\sin x\Big|_1^0 - \int_1^0 \sin x dx = -\sin 1 + \cos x\Big|_1^0 = 1-(\sin 1+\cos 1).$

h) Ta có $1+\sin 2x+\cos 2x = 1+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$= 2\cos x(\sin x+\cos x).$

Từ đó, ta có đáp số là 1.

i) Áp dụng phương pháp tính tích phân từng phần hai lần, cả hai lần đều đặt $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx = e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx\right] = e^{\frac{\pi}{2}}+1-I \Rightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}.$$

k) Lấy tích phân theo phương pháp tính tích phân từng phần hai lần : lần thứ nhất đặt $u = \ln^2 x$, lần thứ hai đặt $u = \ln x$ và có đáp số là $\frac{1}{27}(5e^3 - 2)$.

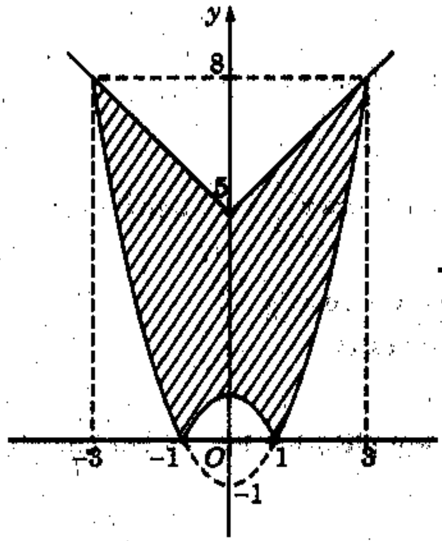
5.21. a) Hai hàm số $y = |x^2 - 1|$ và $y = 5 + |x|$ đều là hàm số chẵn. Miền cần tính diện tích được thể hiện ở Hình 89. Do tính đối xứng qua trục tung, ta có

$$S = 2\int_0^3 \left(5 + |x| - |x^2 - 1|\right) dx$$

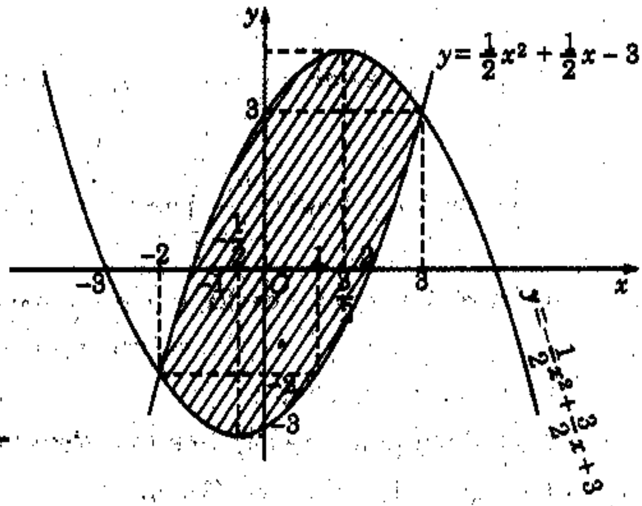
$$= 2\left[\int_0^1 \left(5 + x - 1 + x^2\right) dx + \int_1^3 \left(5 + x - x^2 + 1\right) dx\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_1^3\right]$$

$$= 24\frac{1}{3} \text{ (đơn vị diện tích).}$$



Hình 89



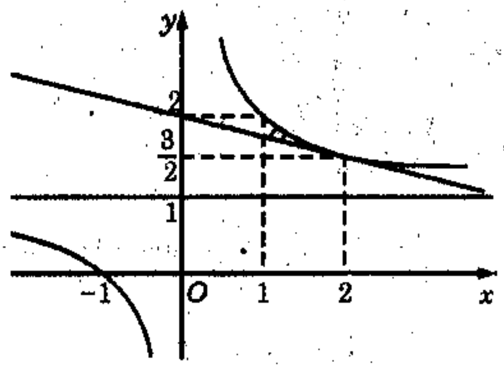
Hình 90

b) Miền cần tính diện tích được thể hiện bởi Hình 90 (học sinh tự làm). Như vậy, với mọi $x \in (-2\ ;\ 3)$ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ nằm phía trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$.

Vậy ta có $S = \int_{-2}^{3}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right)\right]dx$

$$= \int_{-2}^{3}\left(-x^2 + x + 6\right)dx = 20\frac{5}{6} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

c) Trên Hình 91 thể hiện miền cần tính diện tích (học sinh tự vẽ).



Hình 91

$$S = \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{x} + 1 - \left(-\frac{1}{4}x + 2\right)\right]dx$$

$$= \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - 1\right)dx$$

$$= \ln 2 - \frac{5}{8} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

(vì tiếp tuyến với đồ thị của $y = \frac{1}{x} + 1$ tại điểm $\left(2\,;\,\frac{3}{2}\right)$

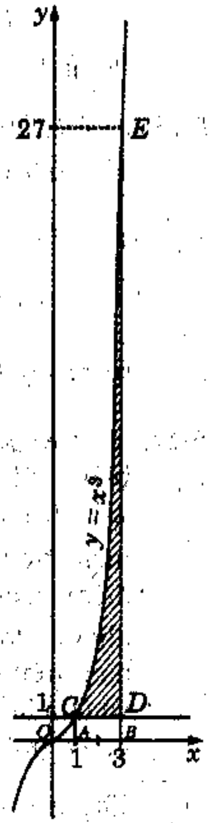
có phương trình là $y = f'(2)(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + 2$).

5.22. a) (H.92) Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi miền CED quay quanh trục Ox là hiệu của hai thể tích (V_1 và V_2) của hai vật thể tròn xoay tương ứng sinh ra khi miền $ACEB$ và miền $ACDB$ quay quanh trục Ox. Như vậy $V = V_1 - V_2$, trong đó

$$V_1 = \pi\int_{1}^{3}x^6dx = \frac{1}{7}\pi x^7\Big|_1^3 = \frac{\pi}{7}\left(3^7 - 1\right);$$

$$V_2 = \pi\int_{1}^{3}dx = 2\pi. \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{7}\left(3^7 - 15\right)$$

$$= 310\frac{2}{7}\pi \text{ (đơn vị thể tích).}$$



Hình 92

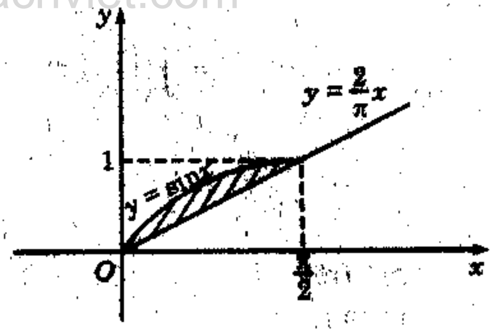
b) (H.93) Ta có $V = V_1 - V_2$,

trong đó

$$V_1 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4};$$

$$V_2 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6};$$

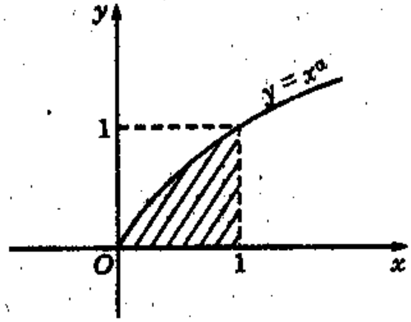
$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{12} \text{ (đơn vị thể tích).}$$



Hình 93

c) $V = \pi\int_0^1 x^{2\alpha}dx = \frac{\pi}{2\alpha+1}$.

(Hình 94 ứng với trường hợp $0 < \alpha < 1$).



Hình 94

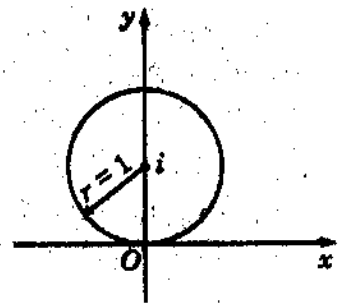
5.23. a) Biến đổi vế trái bằng cách nhóm từng bốn số hạng và đặt thừa số chung, ta được

$$i(1+i+i^2+i^3)+...+i^{97}(1+i+i^2+i^3) = (1+i+i^2+i^3)(i+...+i^{97}) = 0,$$

vì $1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$. □

b) Ta có $\frac{(\sqrt{2}+i)(1-i)(1+i)}{i} = \frac{2(\sqrt{2}+i)i}{-1} = -(2\sqrt{2}i + 2i^2) = 2 - 2\sqrt{2}i$. □

5.24. a) Vế trái là khoảng cách từ điểm biểu diễn z đến điểm biểu diễn $z_0 = 0 + i$. Vậy tập hợp các điểm thoả mãn điều kiện đã cho là tất cả các điểm cách điểm $(0\,;1)$ một khoảng không đổi bằng 1. Đó là các điểm nằm trên đường tròn bán kính bằng 1 và tâm là điểm $(0\,;1)$ (H.95).



Hình 95

Ta có thể tiến hành như sau :

Cho $z = x + iy$, ta có $|z-i|^2 = |x+(y-1)i|^2 = x^2+(y-1)^2$ và như vậy, ta có $x^2+(y-1)^2 = 1$.

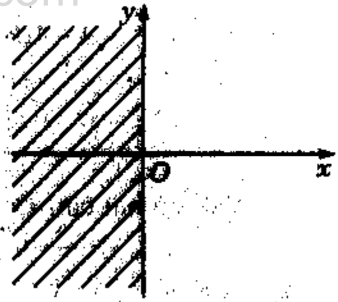
Đây là phương trình đường tròn bán kính bằng 1 và tâm là $(0\,;1)$.

b) (H.96) Ta có : $|2+z|^2 < |2-z|^2$

$\Leftrightarrow |(2+x)+iy|^2 < |(2-x)-iy|^2$

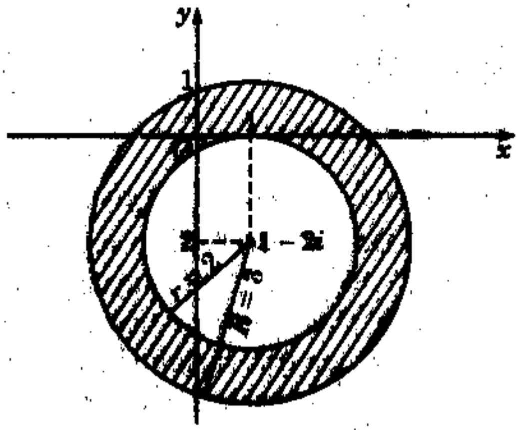
$\Leftrightarrow (2+x)^2 + y^2 < (2-x)^2 + (-y)^2$

$\Leftrightarrow x < 0.$



Hình 96

Đó là tập hợp các số phức có phần thực nhỏ hơn 0, tức là nửa trái của mặt phẳng toạ độ không kể trục Oy.



Hình 97

c) Đó là những điểm nằm phía trong hình tròn bán kính bằng 3 và phía ngoài (kể cả biên) hình tròn bán kính bằng 2 có cùng tâm là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1-2i$, tức là những điểm nằm trong hình vành khăn kể cả biên trong (H.97). Đó là những điểm $(x\,;y)$ trên mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện $4 \le (x-1)^2 + (y+2)^2 < 9$.

5.25. a) $\dfrac{5+2i}{7-i} = \dfrac{(5+2i)(7+i)}{50} = \dfrac{33}{50} + \dfrac{19}{50}i.$

b) $\dfrac{3-i}{i} + (5-i)^2 = -1-3i + (25-10i-1) = 23-13i.$

5.26. a) $z = \dfrac{-1+6i}{-6(2-7i)} = \dfrac{1-6i}{6(2-7i)} = \dfrac{(1-6i)(2+7i)}{6.53} = \dfrac{44-5i}{318}.$

b) $z = i$.

5.27. a) $x_1 = \dfrac{2+i\sqrt{2}}{3}$; $\quad x_2 = \dfrac{2-i\sqrt{2}}{3}$. $\qquad$ b) $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{35}i}{2}$; $\quad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{35}i}{2}$.

5.28. Hệ phương trình tương ứng với

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 + 3i \\ 3x + iy = 2 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 + i \\ (6-i)y = 1 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - i \\ y = i. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1-i\,;i)$.

5.29. $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$; $z_2 = 8y^2 - 20i$. Để $z_1 = \overline{z_2}$, ta có

$$\begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2 \\ -10x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

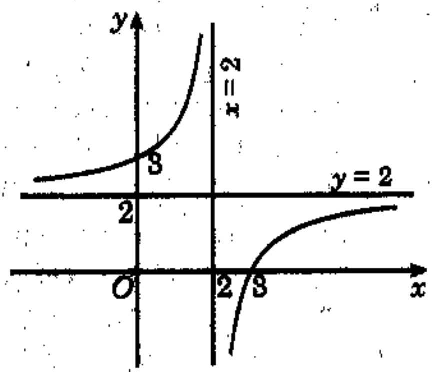
Vậy có hai cặp $(x ; y)$ là $(-2 ; 2)$ và $(-2 ; -2)$.

5.30. a) $|z_1| = \sqrt{(-8)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{257}}{2}$; b) $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{10}$.

Đề tự kiểm tra

Đề 1

Câu I. 1) Học sinh tự giải (H. 98).



Hình 98

2) Đồ thị của (1) được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (H.99).

Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị của (1) với đường thẳng $y = \log_2 k$.

Dựa trên đồ thị, ta suy ra :

* Phương trình (2) vô nghiệm nếu

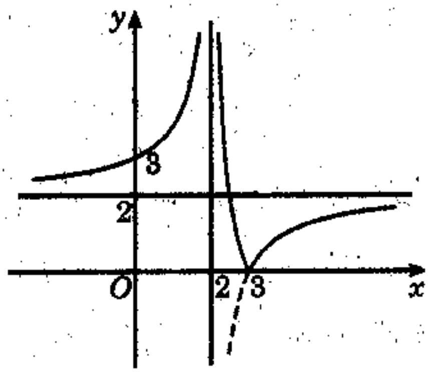
$-\infty < \log_2 k < 0 \Leftrightarrow 0 < k < 1$.

* Phương trình (2) có một nghiệm nếu $\log_2 k = 0$ hoặc $\log_2 k = 2$, tức là khi

$k = 1$ hoặc $k = 4$.

* Phương trình (2) có hai nghiệm nếu $0 < \log_2 k < 2$ hoặc $\log_2 k > 2$, tức là

khi $1 < k < 4$ hoặc $k > 4$.



Hình 99

Kết luận : Phương trình vô nghiệm khi $0 < k < 1$;

Phương trình có một nghiệm khi $k = 0$ hoặc $k = 4$;

Phương trình có hai nghiệm khi $1 < k < 4$ hoặc $k > 4$.

3) Ta có $y = 2 - \frac{2}{x-2}$ nên y nguyên khi và chỉ khi $x - 2$ là ước của 2, tức là $x - 2 = \pm 1$ hoặc $x - 2 = \pm 2$. Từ đó, ta có các điểm có toạ độ nguyên là (3 ; 0) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1) và (0 ; 3).

Câu II. 1) Vì $32 = 2^5$; $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$; $128 = 2^7$, nên phương trình đã cho tương đương với :

$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}-2} \Leftrightarrow \frac{5x+25}{x-7} = \frac{5x+125}{x-3} \Leftrightarrow x = 10$ (thoả mãn điều kiện $x \neq 7, x \neq 3$).

2) Điều kiện $\begin{cases} \cot x + \tan 3x > 0 \\ \tan 3x > 0. \end{cases}$

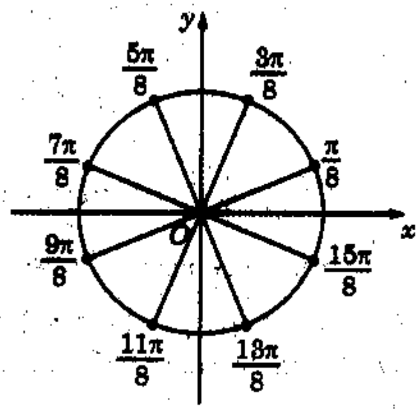
Phương trình đã cho tương đương với $\cot x + \tan 3x = 2\tan 3x$

$$\Leftrightarrow \cot x = \tan 3x \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Để chọn những góc thoả mãn điều kiện, trước hết từ (*) suy ra $\cot x$ và $\tan 3x$ phải cùng dấu với nhau.

Lần lượt cho $k = 0, 1, 2, ..., 7$ (H.100), ta sẽ chọn được những góc không thoả mãn điều kiện. Khi đó, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ và $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Hình 100

Câu III. a) Đổi biến :

$t = \sqrt{1 + 2x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x^2$

$\Rightarrow 2tdt = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{tdt}{2}$ và $x = 0$

$\Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 3$.

Vậy $\int_0^2 \sqrt{1+2x^2}\, x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 t^2 dt = \frac{1}{6}t^3\Big|_1^3 = 4\frac{1}{3}$.

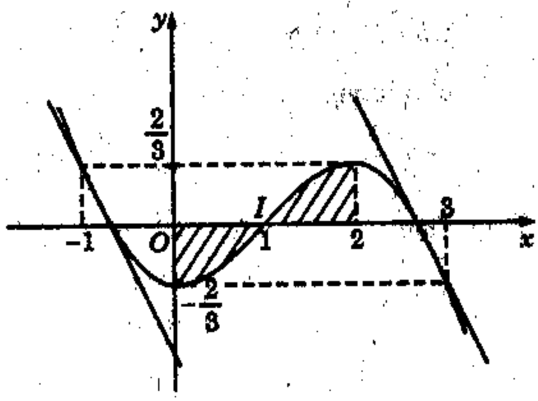
b) Áp dụng công thức $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. *Đáp số* : $|z| = \frac{\sqrt{146}}{2}$.

Đề 2

Câu I. 1) $y' = -x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $y' > 0$ với $x \in (0 ; 2)$ và $y' < 0$ khi x thuộc các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$. Vậy với mọi m, đồ thị của hàm số luôn có điểm cực tiểu $(0 ; m-1)$ và điểm cực đại $\left(2 ; m + \frac{1}{3}\right)$. Một trong các điểm cực trị nằm trên trục Ox khi và chỉ khi hoặc $m + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$

hoặc $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.



Hình 101

2) Với $m = \frac{1}{3}$, ta có $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$.

Học sinh tự giải (H.101).

3) Hệ số góc của tiếp tuyến là -3. Hoành độ tiếp điểm thoả mãn phương trình $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3. \end{array}\right.$$

Các tung độ của tiếp điểm tương ứng là $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Vậy ta có hai tiếp tuyến $y = -3x - \frac{7}{3}$ và $y = -3x + \frac{25}{3}$.

4) Vì $I(1 ; 0)$ là tâm đối xứng của (C) nên hình phẳng đã cho gồm hai hình đối xứng với nhau qua điểm I (H.101). Vậy

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)dx = \frac{5}{6} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Câu II. 1) Đặt $3^{\frac{x}{10}} = t$ $(t > 0)$, ta có

$$t^2 + \frac{t}{3} = 84 \Leftrightarrow 3t^2 + t - 252 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -9\frac{1}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Như vậy $3^{\frac{x}{10}} = 3^2 \Leftrightarrow x = 20$.

2) Điều kiện : $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3 - 2x > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{2}}{2} \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Câu III. 1) Đặt $t = \sqrt{x+1}$, suy ra $t^2 = x + 1$. Do đó, $dx = 2tdt$.
Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 3$ thì $t = 2$.

Vậy $I = \int_1^2 \frac{(t+2).2t\,dt}{t+3} = \int_1^2 \left(2t - 2 + \frac{6}{t+3}\right)dt = 1 + 6\ln\frac{5}{4}$.

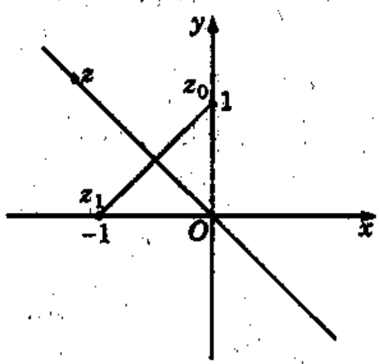
2) a) Giả sử $z = x + yi$. Ta có $|x + 1 + yi| = |x + (y-1)i|$

$\Leftrightarrow |(x+1) + yi|^2 = |x + (y-1)i|^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2y$

$\Leftrightarrow 2x = -2y \Leftrightarrow y = -x.$



Hình 102

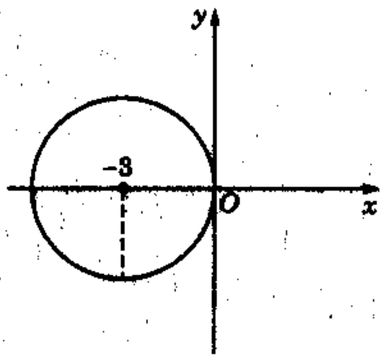
Trên mặt phẳng tọa độ, đó là đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư (H.102).
Cách 2 : Vế phải là khoảng cách từ điểm biểu diễn z tới điểm biểu diễn $z_0 = 0 + i$, vế trái là khoảng cách từ điểm biểu diễn z tới điểm biểu diễn $z_1 = -1 + 0i$. Vậy cần phải tìm các điểm cách đều hai điểm biểu diễn z_0 và z_1.

b) Ta có :

$|x + yi|^2 + 3(x + yi) + 3(x - yi) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9.$

Trên mặt phẳng toạ độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 3 và tâm là điểm $(-3 ; 0)$ (H.103).

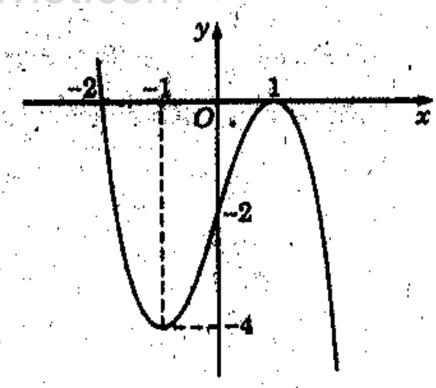


Hình 103

Đề 3

Câu I. 1) Học sinh tự giải (H.104).
2) Ta có $y'(1) = 0$. Vậy phương trình của tiếp tuyến là $y = 0$.
3) Dựa vào đồ thị (C) và đường thẳng $y = \log_3 m$, ta có :
* Khi $\log_3 m < -4$

$\Leftrightarrow m < \frac{1}{81}$, phương trình có một nghiệm



Hình 104

* Khi $\log_3 m = -4$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{81}$, phương trình có hai nghiệm

* Khi $0 > \log_3 m > -4$

$\Leftrightarrow 1 > m > \frac{1}{81}$, phương trình có ba nghiệm.

* Khi $\log_3 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$, phương trình có hai nghiệm

* Khi $\log_3 m > 0 \Leftrightarrow m > 1$, phương trình có một nghiệm.

Kết luận :

* Phương trình có một nghiệm khi $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{81}$.

* Phương trình có hai nghiệm khi $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{81}$.

* Phương trình có ba nghiệm khi $\frac{1}{81} < m < 1$.

Câu II. 1) $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus [-2\,;1]$ nên xác định trên đoạn $[3\,;6]$.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

Ta thấy $f'(x) > 0,\ \forall x \in [3\,;6]$ nên trên đoạn $[3\,;6]$ hàm số $f(x)$ đồng biến.

Vậy $\min\limits_{[3;6]} f(x) = f(3) = \ln 10\ ;\ \max\limits_{[3;6]} f(x) = f(6) = \ln 40$.

2) Vì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π, nên ta chỉ cần xét $f(x)$ trên đoạn $[0\,;2\pi]$.

$$f'(x) = -2\sin x\cos x - \sin x;\ f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = \left\{0\,;\frac{2\pi}{3}\,;\pi\,;\frac{4\pi}{3}\,;2\pi\right\}.$$

$$f(0) = f(2\pi) = 5\,;\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{3}{4}\ ;\ f(\pi) = 3\,;\ f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\frac{3}{4}.$$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{[0;2\pi]} f(x) = 2\frac{3}{4}$, $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{[0;2\pi]} f(x) = 5$.

Câu III. 1) a) *Đáp số* : $\frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}$.

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 7x + \cos x)dx = \frac{3}{7}$.

2) a) $z = (-4 + i\sqrt{48})(2+i)$ nên

$$|z| = \left|-4 + i\sqrt{48}\right||2+i| = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{48})^2}\sqrt{2^2+1^2} = 8\sqrt{5}.$$

b) $z = \frac{1+i}{2-i}$ nên $|z| = \frac{|1+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.