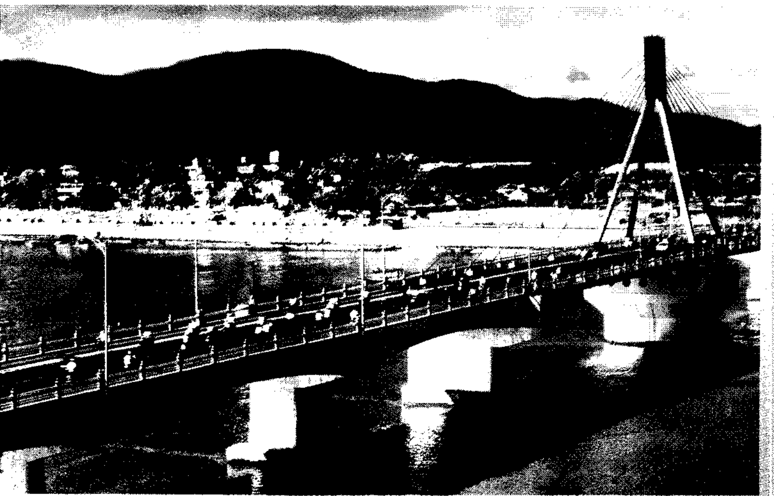
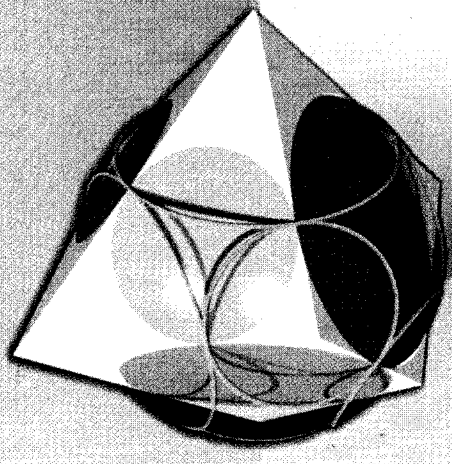
NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYÊN

BÀI TẬP
HÌNH HỌC
12





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYÊN

BÀI TẬP
HÌNH HỌC
12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm phục vụ cho việc giảng dạy và học tập môn Hình học 12 theo chương trình Giáo dục Trung học phổ thông của Bộ Giáo dục và Đào tạo vừa mới ban hành và đồng thời chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, nhóm tác giả SGK chúng tôi biên soạn cuốn "BÀI TẬP HÌNH HỌC 12" theo chương trình Chuẩn. Sách được viết theo nội dung của từng chương trong SGK với hệ thống các bài tập đa dạng, phong phú. Nội dung sách gồm ba chương sau đây :

Chương I : **Khối đa diện**

Chương II : **Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu**

Chương III : **Phương pháp toạ độ trong không gian.**

Trong mỗi chương, nội dung các bài tập được sắp xếp theo từng xoắn (§) với cấu trúc như sau :

A. Các kiến thức cần nhớ : *Phần này nêu tóm tắt những kiến thức cơ bản mà mỗi học sinh cần phải nắm được trước khi làm toán, tạo điều kiện thuận lợi cho học sinh tra cứu, củng cố, hệ thống lại những nội dung đã học trong SGK.*

B. Các dạng toán cơ bản : *Phần này nêu các dạng toán cơ bản và thường gặp, giúp cho học sinh tập làm quen với việc sắp xếp hệ thống lại các bài toán đã làm, nắm được các phương pháp chủ yếu, quan trọng thường được dùng để giải các bài toán thuộc dạng đã nêu. Sau khi nêu phương pháp giải của mỗi dạng toán, sách bài tập có nêu một số ví dụ minh hoạ, nhằm củng cố và rèn luyện kĩ năng giải toán, củng cố các khái niệm, tập vận dụng các định lí, tập lập luận một cách rõ ràng và chính xác. Thông qua các ví dụ này, học sinh sẽ tự rút ra những kinh nghiệm bổ ích trong việc làm toán, rèn* *luyện được phương pháp tự học, tránh được những nhầm lẫn không đáng có, tạo được niềm tin và dễ dàng tiếp cận với các bài toán mới tương tự.*

C. Câu hỏi và bài tập : *Gồm đề bài tập theo từng chương và có hướng dẫn, đáp số và lời giải. Học sinh có thể thử sức của mình khi tự giải các đề bài tập đó và nếu không giải được, hoặc muốn đánh giá lại kết quả đã làm, thì có thể xem thêm phần lời giải hoặc đáp án.*

Cuối mỗi chương có các bài tập ôn tập của chương đó, kèm theo hướng dẫn giải và đáp số, đồng thời có một số câu hỏi trắc nghiệm cùng với đáp án, nhằm giúp cho học sinh tập làm quen với dạng bài tập này.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến góp ý của đông đảo bạn đọc để nội dung cuốn sách "BÀI TẬP HÌNH HỌC 12" được hoàn thiện hơn trong những lần tái bản sắp tới.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG I KHỐI ĐA DIỆN

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn hai tính chất :

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như thế gọi là một *mặt* của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các *đỉnh, cạnh* của hình đa diện.

II- KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

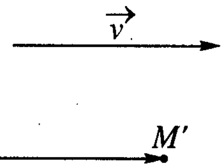
III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Phép biến hình trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý.

2. Một số phép dời hình thường gặp

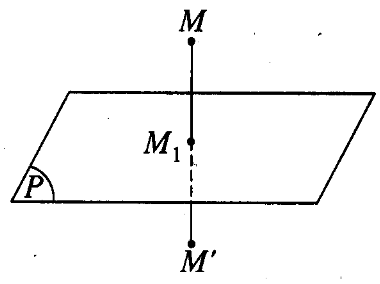
a) ***Phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ (h.1.1).



Hình 1.1

b) ***Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)*** là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' (h.1.2).

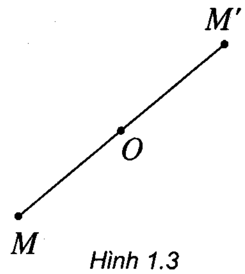
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là *mặt phẳng đối xứng* của (H).



Hình 1.2

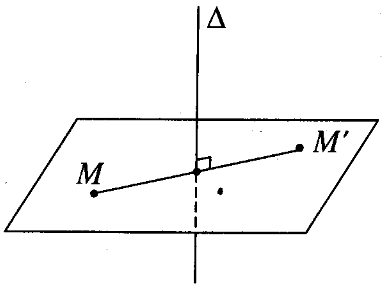
c) ***Phép đối xứng tâm O*** là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' (h.1.3).

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là *tâm đối xứng* của (H).



Hình 1.3

d) ***Phép đối xứng qua đường thẳng*** Δ (hay phép đối xứng qua trục Δ) là phép biến hình biến mọi điểm thuộc Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' (h.1.4). Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là *trục đối xứng* của (H).



Hình 1.4

3. Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') và biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

IV- PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh một số tính chất liên quan đến các đỉnh, các cạnh, các mặt của một khối đa diện

1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất a) và b) trong định nghĩa hình đa diện.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng một khối đa diện bất kì có ít nhất bốn mặt.

Giải

Gọi M_1 là một mặt của khối đa diện (H). Vì M_1 là một đa giác nên nó có ít nhất ba cạnh c_1, c_2, c_3. Từ đó có một mặt M_2 có chung cạnh c_1 với M_1 và $M_2 \neq M_1$. Gọi M_3 là mặt có chung cạnh c_2 với M_1và $M_3 \neq M_1$.Vì c_1 thuộc M_2 và không thuộc M_3 nên M_3 khác M_2. Gọi $M_4 \neq M_1$ là mặt có chung cạnh c_3 với M_1. Lí luận tương tự như trên ta thấy M_4 không chứa c_1 và c_2 nên nó khác với hai mặt phẳng M_2, M_3. Vậy khối đa diện (H) có ít nhất bốn mặt.

Ví dụ 2. Cho (H) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Chứng minh rằng nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.

Giải

Gọi m là số các mặt của một khối đa diện (H). Vì mỗi mặt của (H) có p cạnh nên m mặt có pm cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số các cạnh của (H) bằng $c = \dfrac{pm}{2}$. Vì m lẻ nên p phải là số chẵn.

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đa diện bằng nhau

1. Phương pháp giải

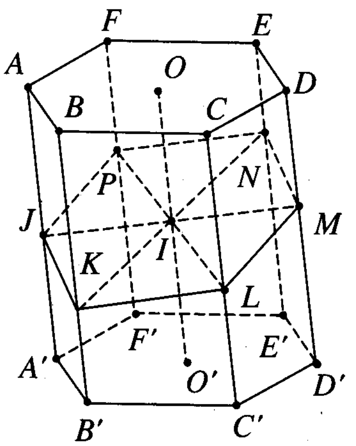
Chỉ ra một phép dời hình cụ thể đã được xác định biến đa diện này thành đa diện kia.

2.Ví dụ

Cho lăng trụ $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có đáy là những lục giác đều. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua I và cắt tất cả cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng (α) chia lăng trụ thành hai đa diện bằng nhau.

Giải

Giả sử mp (α) cắt AA', BB', CC', DD', EE', FF' lần lượt tại J, K, L, M, N, P (h.1.5). Dễ thấy I cũng là trung điểm của JM, KN và LP. Phép đối xứng tâm I biến các điểm $A, B, C, D, E, F, J, K, L, M, N, P$ lần lượt thành các điểm D', E', F', A', B', C', M, N, P, J, K, L. Do đó hai đa diện $ABCDEF.JKLMNP$ và $D'E'F'A'B'C'.MNPJKL$ bằng nhau vì có phép dời hình là phép đối xứng tâm I biến đa diện này thành đa diện kia.



Hình 1.5

VẤN ĐỀ 3

Phân chia hoặc lắp ghép các khối đa diện

1. Phương pháp giải

Chọn mặt phẳng thích hợp để phân chia khối đa diện. Trong nhiều trường hợp, để chứng minh rằng có thể lắp ghép các khối đa diện (H_1), (H_2),..., (H_n) thành khối đa diện (H) ta chứng minh rằng có thể chia được khối đa diện (H) thành các khối đa diện (H_1), (H_2),..., (H_n).

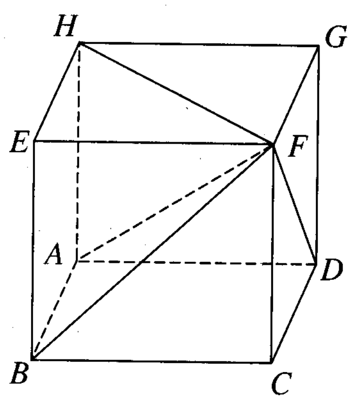
2. Ví dụ

Cho hình chóp tứ giác $F.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên FC vuông góc với đáy và có độ dài bằng AB. Chứng minh rằng có thể dùng ba hình chóp bằng hình chóp trên để ghép lại thành một hình lập phương.

Giải

Từ hình chóp trên ta dựng hình lập phương $HEFG.ABCD$ (h.1.6). Ta thấy hai hình chóp $F.ABCD$ và $F.ABEH$ đối xứng với nhau qua mặt phẳng (ABF), hai hình chóp $F.ABCD$ và $F.AHGD$ đối xứng với nhau qua mặt phẳng (ADF). Do đó ba hình chóp $F.ABCD$, $F.ABEH$ và $F.AHGD$ bằng nhau.

Như vậy có thể chia được hình lập phương $HEFG.ABCD$ thành ba hình chóp bằng hình chóp $F.ABCD$. Từ đó suy ra có thể ghép ba hình chóp bằng hình chóp $F.ABCD$ để thành một hình lập phương.



Hình 1.6

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai tứ diện $A'ABD$ và $CC'D'B'$ bằng nhau.

1.2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các lăng trụ $ABC.EFG$ và $EFG.A'B'C'$ bằng nhau.

1.3. Chia hình chóp tứ giác đều thành tám hình chóp bằng nhau.

1.4. Chia một khối tứ diện đều thành bốn khối tứ diện bằng nhau.

1.5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $k \geq 3$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k$ cạnh.

1.6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $k \geq 4$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k + 1$ cạnh.

1.7. Chứng minh rằng không tồn tại một hình đa diện có

a) Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh ;

b) Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.

1.8. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

§2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Khối đa diện (H) được gọi là *khối đa diện lồi* nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó các đa diện xác định (H) được gọi là *các đa diện lồi*.

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.

II- KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Định nghĩa

Một khối đa diện lồi được gọi là *khối đa diện đều loại $\{p ; q\}$* nếu :

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh ;

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Từ định nghĩa trên ta thấy các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau.

2. Định lí

Có năm loại khối đa diện đều. Đó là các khối đa diện đều loại {3 ; 3}, loại {4 ; 3}, loại {3 ; 4}, loại {5 ; 3}, và loại {3 ; 5}.

Tuỳ theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo thứ tự được gọi là các khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh một số tính chất của khối đa diện đều

1. Phương pháp giải

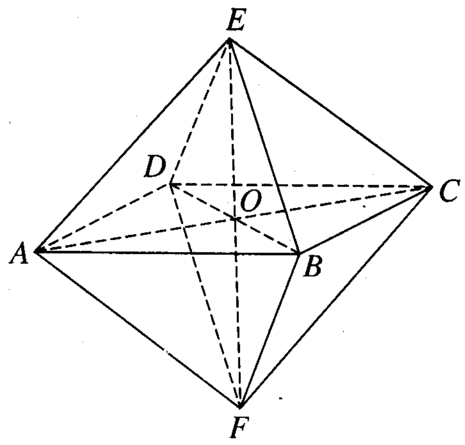
Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

2. Ví dụ

Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.7). Chứng minh rằng :

a) Các điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng ; các điểm E, C, F, A cùng thuộc một mặt phẳng và các điểm E, D, F, B cùng thuộc một mặt phẳng ;

b) Chứng minh rằng ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(ECFA)$ và $(EDFB)$ đôi một vuông góc với nhau.



Hình 1.7

Giải

a) Vì $AE = AF = BE = BF = CE = CF = DE = DF$ nên A, B, C, D thuộc mặt phẳng trung trực của EF. Tương tự các điểm E, C, F, A thuộc mặt phẳng trung trực của BD ; E, D, F, B thuộc mặt phẳng trung trực của AC.

b) Mặt phẳng $(ECFA)$ chứa EF và $EF \perp (ABCD)$ (vì $(ABCD)$ là mặt phẳng trung trực của EF nên $EF \perp (ABCD)$). Do đó $(ECFA) \perp (ABCD)$. Tương tự, ta chứng minh được $(ABCD) \perp (EDFB)$ và $(EDFB) \perp (ECFA)$.

VẤN ĐỀ 2

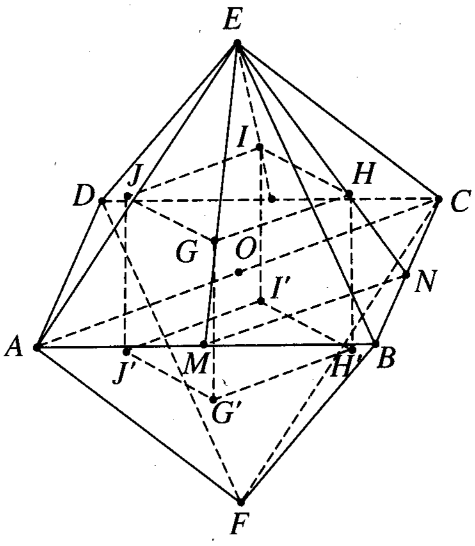
Xác định một khối đa diện đều

1. Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa khối đa diện đều.

2. Ví dụ

Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.



Hình 1.8

Giải

Ta có khối bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.8) cạnh bằng a. Vì A, B, C, D cách đều EF nên các điểm đó thuộc mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của EF. Giả sử EF cắt (P) tại O. Khi đó hình thoi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O trong mặt phẳng (P) nên $ABCD$ là hình vuông. Tương tự ta chứng minh được $ECFA$, $EBFD$ là các hình vuông. Từ đó suy ra ba đường thẳng EF, AC và BD đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại O.

Gọi $G, H, I, J, G', H', I', J'$ lần lượt là tâm của các mặt EAB, EBC, ECD, EDA, FAB, FBC, FCD, FDA. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó vì $GH \parallel MN$ và $MN \parallel AC$ nên $GH \parallel AC$. Ta còn có

$$GH = \frac{2}{3}MN, MN = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Do đó $GH = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$. Tương tự, ta chứng minh được các đoạn thẳng $G'H'$, IJ, $I'J'$ song song với AC và bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$, các đoạn thẳng IH, JG, $J'G'$, $I'H'$ song

song với BD và bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, các đoạn thẳng GG', HH', II', JJ' song song với EF và bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

Vì ba đường thẳng EF, AC và BD đôi một vuông góc với nhau nên các đoạn thẳng GG', GH, GJ đôi một vuông góc với nhau. Từ đó suy ra $GHH'G'$, $HII'H'$, $IJJ'I'$, $JGG'J'$, $GHIJ$, $G'H'I'J'$ là các hình vuông có cạnh bằng nhau. Do đó $GHIJ.G'H'I'J'$ là hình lập phương.

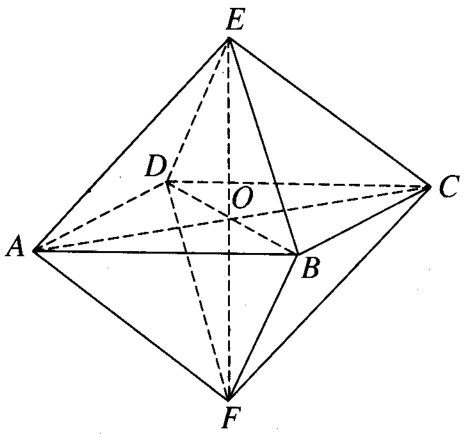
C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.9. Tính số cạnh của hình mười hai mặt đều (loại $\{5\,;3\}$).

1.10. Tính số cạnh của hình hai mươi mặt đều (loại $\{3\,;5\}$).

1.11. Cho một khối bát diện đều. Hãy chỉ ra một mặt phẳng đối xứng, một tâm đối xứng và một trục đối xứng của nó.

1.12. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.9). Gọi O là giao điểm của AC và BD, M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AE. Tính diện tích thiết diện tạo bởi khối bát diện đó với mặt phẳng (OMN).



Hình 1.9

1.13. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh bằng a, trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh (h.1.9). Gọi A', B', C', D', A'', B'', C'', D'' lần lượt là trung điểm của các cạnh EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD. Chứng minh rằng $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó theo a.

§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- *Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là* $V = \frac{1}{3}Bh$.
- *Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là* $V = Bh$.
- *Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích đáy và chiều cao của nó.*
- *Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.*

☞ ***Chú ý.*** i) Tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng.

ii) Trong một số bài toán ta thường sử dụng kết quả sau :

Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Tính thể tích của một khối đa diện

1. *Phương pháp giải*

a) Chia khối đa diện đã cho thành các khối lăng trụ hoặc các khối chóp đơn giản hơn.

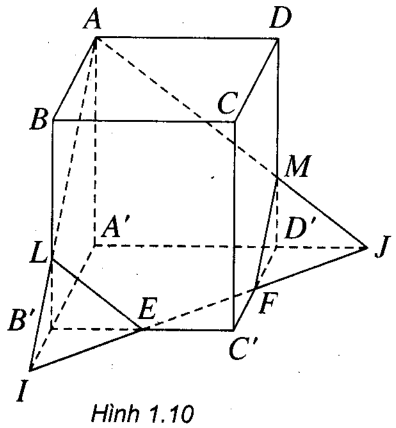
b) Ghép thêm vào khối đa diện đã cho các khối đa diện quen biết để được một khối đa diện đơn giản hơn.

c) Tìm tỉ số thể tích giữa khối đa diện đã cho với một khối đa diện đã biết thể tích.

2. *Ví dụ*

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối hộp đó thành hai khối đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A'. Tìm thể tích của (H) và (H').

Giải



Hình 1.10

Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng $A'B'$ tại I và cắt đường thẳng $A'D'$ tại J: AI cắt BB' tại L, AJ cắt DD' tại M (h.1.10).

Gọi (K) là tứ diện $AA'IJ$.

Khi đó $V_{(H)} = V_{(K)} - V_{L.B'IE} - V_{M.D'JF}$.

Vì $EB' = EC'$ và $B'I \,//\, C'F$

nên $B'I = C'F = \dfrac{A'B'}{2}$. Tương tự, $D'J = \dfrac{A'D'}{2}$.

Từ đó theo định lí Ta-lét ta có $\dfrac{LB'}{AA'} = \dfrac{IB'}{IA'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{MD'}{AA'} = \dfrac{JD'}{JA'} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $V_{L.B'EI} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\right)\cdot\dfrac{c}{3} = \dfrac{abc}{72}$. Tương tự, $V_{M.D'FJ} = \dfrac{abc}{72}$.

Vì $V_{(K)} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{3b}{2}\right)\cdot c = \dfrac{3abc}{8}$, nên $V_{(H)} = \dfrac{3abc}{8} - \dfrac{2abc}{72} = \dfrac{25abc}{72}$

và $V_{(H')} = \dfrac{47abc}{72}$.

VẤN ĐỀ 2

Dùng cách tính thể tích để giải một số bài toán hình học

1. Phương pháp giải

a) Tính các đại lượng hình học của khối đa diện theo thể tích của khối đa diện ấy.

b) Dùng hai cách để tính thể tích của cùng một khối đa diện rồi so sánh chúng với nhau để rút ra đại lượng hình học cần tìm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a$, $SA = b$.

Hãy tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Giải

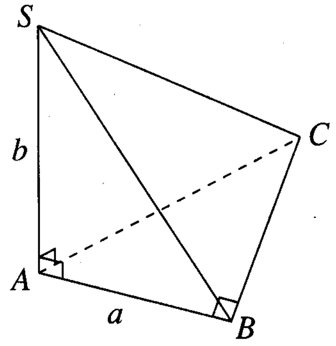
Theo định lí ba đường vuông góc, BC vuông góc với hình chiếu AB của đường xiên SB nên BC vuông góc với SB.

Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC), V là thể tích hình chóp $S.ABC$ thì

$$V = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{1}{6}h.SB.BC.$$

Từ đó suy ra $h = \dfrac{SA.AB.BC}{SB.BC} = \dfrac{SA.AB}{SB}$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ (h.1.11).}$$



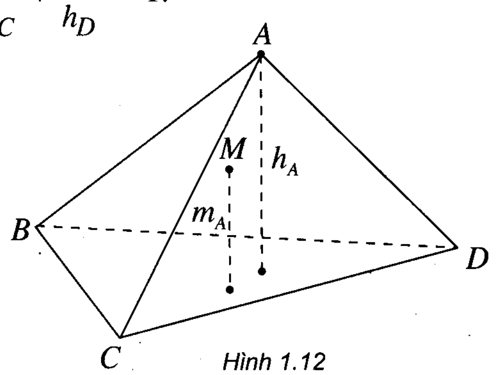
Hình 1.11

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm trong của tứ diện đó. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt đối diện và m_A, m_B, m_C, m_D lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Chứng minh rằng $\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D} = 1$.

Giải

Gọi thể tích các khối tứ diện $ABCD$, $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ theo thứ tự là V, V_A, V_B, V_C, V_D (h.1.12), ta có :

$$\frac{V_A}{V} = \frac{m_A}{h_A} \Rightarrow V_A = \frac{m_A}{h_A}V.$$



Hình 1.12

Tương tự, $V_B = \dfrac{m_B}{h_B}V$, $V_C = \dfrac{m_C}{h_C}V$, $V_D = \dfrac{m_D}{h_D}V$.

Do đó $V = V_A + V_B + V_C + V_D = \left(\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D}\right)V$.

Từ đó suy ra $\dfrac{m_A}{h_A} + \dfrac{m_B}{h_B} + \dfrac{m_C}{h_C} + \dfrac{m_D}{h_D} = 1$.

VẤN ĐỀ 3

Tìm tỉ số thể tích của hai khối đa diện

1. Phương pháp giải

a) Tính thể tích của từng khối đa diện.

b) Sử dụng chú ý ii) với công thức $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}$.

2. Ví dụ

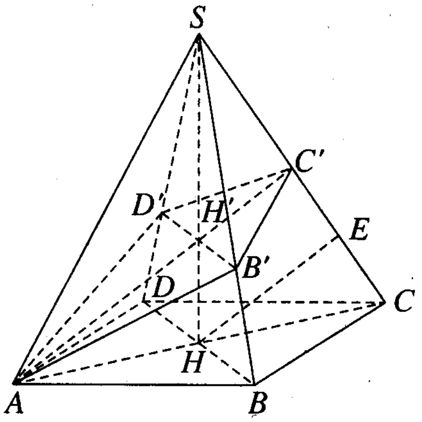
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a$, $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.

Giải

a) Gọi SH là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, SH cắt (P) tại H' (h.1.13). Khi đó H là giao của AC và BD. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Do đó $BD \,//\, (P)$. Từ đó suy ra (P) cắt (SDB) theo giao tuyến $B'D'$ song song với BD. Do đó $\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SH'}{SH} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$, $H'B' = H'D'$ và $D'B' \perp AC'$. Giả sử đường thẳng qua H song song với AC' cắt SC tại E. Khi đó $EC' = EC$, $\dfrac{SC'}{SE} = \dfrac{2}{3}$.



Hình 1.13

Từ đó suy ra $\dfrac{SE - SC'}{SE} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{EC'}{SE}$.

Do đó $SC' = 2EC' = C'C$.

Ta có : $\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$, $\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$.

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right).\frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Vậy $\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}$.

b) Theo chứng minh trên ta có AC' vừa là đường cao vừa là trung tuyến của ΔSAC nên $AS = AC$. Do đó ΔSAC đều. Từ đó suy ra

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{2}a^3 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3.$$

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'D'} = \frac{\sqrt{6}}{18}a^3$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.14. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^o. Hãy tính thể tích của khối chóp đó.

1.15. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60^o. Hãy tính thể tích của khối chóp đó.

1.16. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Từ A kẻ các đoạn thẳng AD vuông góc với SB và AE vuông góc với SC. Biết rằng $AB = a$, $BC = b$, $SA = c$.

a) Hãy tính thể tích khối chóp $S.ADE$.

b) Tính khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAB).

1.17. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm trong bất kì của một tứ diện đều đến các mặt của nó là một số không đổi.

1.18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = a$. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AM = 3\,MD$.

a) Tính thể tích khối chóp $M.AB'C$.

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

1.19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$.

Tính tỉ số giữa thể tích khối chóp $D'.DMN$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

1.20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Gọi E và F lần lượt là những điểm thuộc các cạnh BB' và DD' sao cho $BE = \frac{1}{2}EB'$, $DF = \frac{1}{2}FD'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện (H) và (H'). Gọi (H') là khối đa diện chứa đỉnh A'. Hãy tính thể tích của (H) và tỉ số thể tích của (H) và (H').

1.21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia hình hộp đó thành hai hình đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là hình đa diện chứa đỉnh A'. Tính tỉ số giữa thể tích hình đa diện (H) và thể tích hình đa diện (H'),

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.22. Hình được tạo thành từ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi ta bỏ đi các điểm trong của mặt $(ABCD)$ có phải là một hình đa diện không ?

1.23. Chứng minh rằng mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

1.24. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

1.25. Chứng minh rằng không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

1.26. Cho hai đoạn thẳng AB và CD chéo nhau, AC là đường vuông góc chung của chúng. Biết rằng $AC = h$, $AB = a$, $CD = b$ và góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60°. Hãy tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

1.27. Tính thể tích khối lăng trụ có chiều cao bằng h, đáy là ngũ giác đều nội tiếp trong một đường tròn bán kính r.

1.28. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi (H) là hình bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện đều đó. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{ABCD}}$.

1.29. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi M, N và E theo thứ tự là trung điểm của BC, CC' và $C'A'$. Đường thẳng EN cắt đường thẳng AC tại F, đường thẳng MN cắt đường thẳng $B'C'$ tại L. Đường thẳng FM kéo dài cắt AB tại I, đường thẳng LE kéo dài cắt $A'B'$ tại J.

a) Chứng minh rằng các hình đa diện $IBM.JB'L$ và $A'EJ.AFI$ là những hình chóp cụt.

b) Tính thể tích hình chóp $F.AIJA'$.

c) Chứng minh rằng mặt phẳng (MNE) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.30. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng :

"Số cạnh của một hình đa diện luôn .... số mặt của hình đa diện ấy."

(A) bằng ; (C) nhỏ hơn ;

(B) nhỏ hơn hoặc bằng ; (D) lớn hơn.

1.31. Hãy chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng :

"Số cạnh của một hình đa diện luôn .... số đỉnh của hình đa diện ấy."

(A) bằng ; (C) nhỏ hơn ;

(B) lớn hơn ; (D) nhỏ hơn hoặc bằng.

1.32. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai* ?

(A) Hình lập phương là đa diện lồi.

(B) Tứ diện là đa diện lồi.

(C) Hình hộp là đa diện lồi.

(D) Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một hình đa diện lồi.

1.33. Cho một hình đa diện. Tìm khẳng định *sai* trong các khẳng định sau :

(A) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh ;

(B) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt ;

(C) Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt ;

(D) Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

1.34. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu tứ diện bằng nhau ?

(A) Hai ; (B) Vô số ; (C) Bốn ; (D) Sáu.

1.35. Số cạnh của một hình bát diện đều là :

(A) tám ; (C) mười hai ;

(B) mười ; (D) mười sáu.

1.36. Số đỉnh của một hình bát diện đều là :

(A) sáu ; (C) mười ;

(B) tám ; (D) mười hai.

1.37. Số đỉnh của hình mười hai mặt đều là :

(A) mười hai ; (C) hai mươi ;

(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

1.38. Số cạnh của hình mười hai mặt đều là :

(A) mười hai ; (C) hai mươi ;

(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

1.39. Số đỉnh của hình hai mươi mặt đều là :

(A) mười hai ; (C) hai mươi ;

(B) mười sáu ; (D) ba mươi.

1.40. Cho (H) là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích của (H) bằng :

(A) $\dfrac{a^3}{2}$; (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$; (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$; (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

1.41. Cho (H) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích của (H) bằng :

(A) $\dfrac{a^3}{3}$; (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$; (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$; (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

1.42. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{4}$; (C) $\dfrac{1}{6}$; (D) $\dfrac{1}{8}$.

1.43. Cho hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$. Gọi A'', B'', C'', D'', E'' lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC', DD', EE'. Tỉ số thể tích giữa khối lăng trụ $ABCDE.A''B''C''D''E''$ và khối lăng trụ $ABCDE.A'B'C'D'E'$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{4}$; (C) $\dfrac{1}{8}$; (D) $\dfrac{1}{10}$.

1.44. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại $B', C' D'$. Khi đó thể tích hình chóp $S.A'B'C'D'$ bằng :

(A) $\frac{V}{3}$; (B) $\frac{V}{9}$; (C) $\frac{V}{27}$; (D) $\frac{V}{81}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

1.1. Dùng phép đối xứng qua tâm của hình hộp.

1.2. Dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AE}$ biến lăng trụ $ABC.EFG$ thành lăng trụ $EFG.A'B'C'$.

1.3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Hai đường chéo AC, BD và hai đường thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện của hình vuông $ABCD$ chia hình vuông $ABCD$ thành tám tam giác bằng nhau. Xem mỗi tam giác đó là đáy của một hình chóp đỉnh S ta sẽ được tám hình chóp bằng nhau.

1.4. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi G là giao điểm của các đường thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện. Khi đó dễ thấy các tứ diện $GABC, GBCD, GCDA, GDAB$ bằng nhau.

1.5. Hình chóp có đáy là đa giác k cạnh.

1.6. Lấy một hình chóp $S.A_1...A_{k-1}$ có đáy là đa giác $k-1$ cạnh. Ghép thêm vào mặt $SA_{k-1}A_1$ và về phía ngoài của hình chóp đó hình chóp $B.SA_{k-1}A_1$ ta sẽ được một hình đa diện có $2k+1$ cạnh.

1.7. a) Gọi số mặt và số cạnh của một hình đa diện theo thứ tự là m và c. Do mỗi mặt có ít nhất ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $2c \geq 3m$. Từ đó suy ra $c > m$.

b) Gọi số đỉnh và số cạnh của một hình đa diện theo thứ tự là $đ$ và c. Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và qua hai đỉnh có đúng một cạnh nên $2c \geq 3đ$. Từ đó suy ra $c > đ$.

1.8. Gọi M_1 là một mặt của hình đa diện (H). Gọi A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của M_1. Khi đó AB, BC là hai cạnh của (H). Gọi M_2 là mặt khác với M_1 và có chung cạnh AB với M_1. Khi đó M_2 còn có ít nhất một đỉnh D khác với A và B. Nếu $D \equiv C$ thì M_1 và M_2 có hai cạnh chung AB và BC, điều này vô lí. Vậy D phải khác C. Do đó (H) có ít nhất bốn đỉnh A, B, C, D.

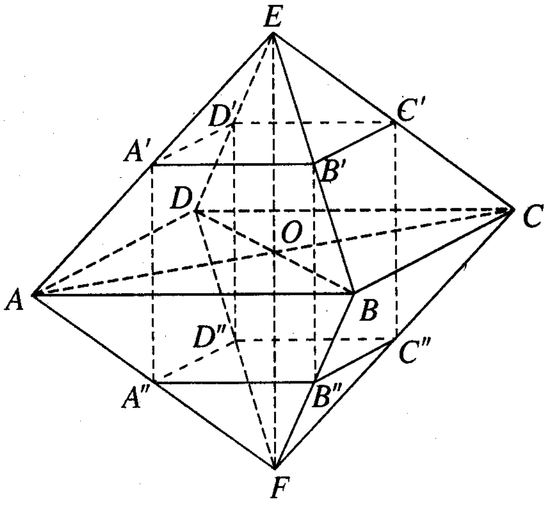
1.13. Ta có tứ giác $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a (h.1.16).

Do đó tứ giác $A'B'C'D'$ là hình vuông có cạnh bằng $\frac{a}{2}$ và $(A'B'C'D') // (A''B''C''D'')$. Ngoài ra ta có $A'A'' // EF$ nên $A'A'' \perp (A''B''C''D'')$. Tương tự $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ cũng song song với EF. Từ đó suy ra $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật.

Vì $EF = \sqrt{2}\,a$ nên $A'A'' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vậy hình hộp đó có ba kích thước là :

$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Hình 1.16

§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1.14. Kẻ $SH \perp (ABC)$. Đường thẳng AH cắt BC tại I.

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên H là trọng tâm của ΔABC.

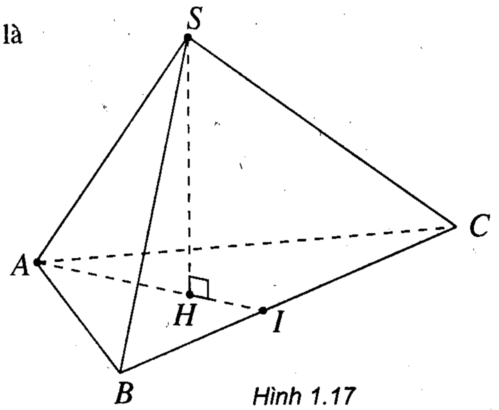
Do đó $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

$\widehat{SAH} = 60^o$ (h.1.17).

$SH = AH.\tan 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}a.\sqrt{3} = a.$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là :

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a.a.a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3.$



Hình 1.17

1.15. Kẻ $SH \perp (ABC)$ và HA', HB', HC' lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SA' \perp BC$, $SB' \perp CA$, $SC' \perp AB$ (h.1.18).

Từ đó suy ra $\widehat{SA'H} = \widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^o$. Do đó các tam giác vuông SHA', SHB', SHC' bằng nhau. Từ đó suy ra $HA' = HB' = HC'$. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC cân ở A nên AH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Từ đó suy ra A, H, A' thẳng hàng và A' là trung điểm của BC.

Do đó $AA'^2 = AB^2 - BA'^2 = 25a^2 - 9a^2 = 16a^2$.

Vậy $AA' = 4a$.

Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC,
r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

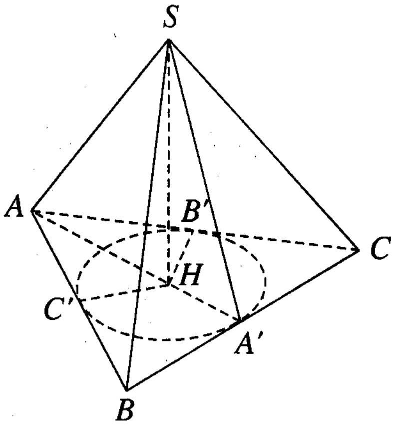
Khi đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar.$$

Từ đó suy ra $r = \frac{3}{2}a$.

Do đó $SH = HA'.\tan 60^\circ = \frac{3a}{2}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}\cdot 12a^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a = 6\sqrt{3}a^3$.



Hình 1.18

1.16. a) Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Vì $AD \subset (SAB)$ nên $AD \perp BC$.

Mặt khác $AD \perp SB$ nên $AD \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $AD \perp SC$.

$\left.\begin{matrix} SC \perp AE \\ SC \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (ADE) \Rightarrow SC \perp DE$

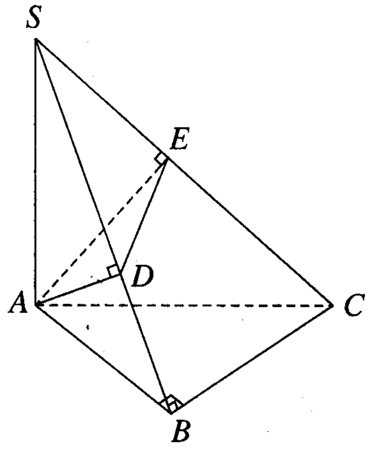
hay $SE \perp (ADE)$ (h.1.19).

Trong tam giác vuông SAB ta có :

$$SA.AB = AD.SB \Rightarrow AD = \frac{AB.SA}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Tương tự, trong tam giác vuông SAC ta có :

$$AE = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



Hình 1.19

Do $AD \perp (SBC)$ nên $AD \perp DE$. Từ đó suy ra

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}$$

$$SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Vậy $V_{S.ADE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD.DE.SE$

$$= \frac{1}{6}\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\frac{c^2b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}}\cdot\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{abc^5}{6(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2)}.$$

b) Gọi d là khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAB).

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{c^2 - \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

$$V_{S.ADE} = V_{E.SAD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SD.AD.d = \frac{1}{6}\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}d = \frac{1}{6}\frac{ac^3}{a^2+c^2}d.$$

Kết hợp với kết quả trong câu a) ta suy ra $d = \frac{bc^2}{a^2+b^2+c^2}$.

1.17. Ta có tứ diện đều $ABCD$, M là một điểm trong của nó. Gọi V là thể tích, S là diện tích mỗi mặt của tứ diện đều $ABCD$, h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC).

Khi đó ta có $V = V_{MBCD} + V_{MCDA} + V_{MDAB} + V_{MABC} = \frac{1}{3}S\left(h_A + h_B + h_C + h_D\right)$.

Từ đó suy ra $h_A + h_B + h_C + h_D = \frac{3V}{S}$.

1.18. a) Thể tích khối chóp $M.AB'C$ bằng thể tích khối chóp $B'.AMC$ (h.1.20). Ta có

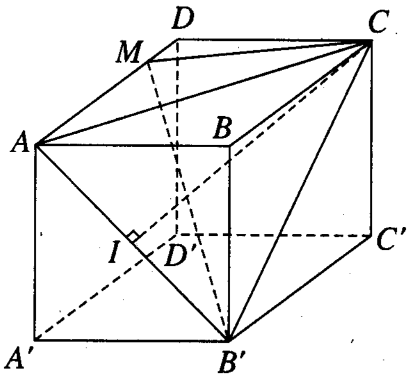
$$S_{AMC} = \frac{3}{4}S_{ADC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Do đó $V_{M.AB'C} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot a = \frac{a^3}{4}$.

b) Gọi h là khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

Khi đó $V_{M.AB'C} = \frac{1}{3}S_{AB'C}.h = \frac{a^3}{4}$.

Vì $AC^2 = B'C^2 = 5a^2$ nên tam giác ACB' cân tại C. Do đó đường trung tuyến CI của tam giác ACB' cũng là đường cao.



Hình 1.20

Ta có : $CI^2 = CA^2 - AI^2 = 5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{9a^2}{2}$.

Do đó $CI = \frac{3a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{AB'C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{\sqrt{2}}\cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}$. Từ đó suy ra $h = 3\frac{a^3}{4} : \frac{3a^2}{2} = \frac{a}{2}$.

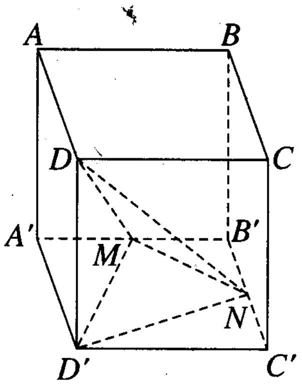
1.19. Thể tích khối chóp $D'.DMN$ bằng thể tích khối chóp $D.D'MN$.

Ta có $S_{D'MN} = S_{A'B'C'D'} - (S_{D'A'M} + S_{D'C'N} + S_{B'MN})$

$$= ab - \left(\frac{ab}{4} + \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4}\right) = \frac{3ab}{8}.$$

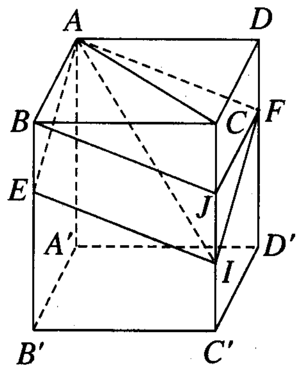
Thể tích khối chóp $D'.DMN = \frac{1}{3}\cdot\frac{3ab}{8}\cdot c = \frac{abc}{8}$.

Từ đó suy ra tỉ số giữa thể tích khối chóp $D'.DMN$ và thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{1}{8}$ (h.1.21).



Hình 1.21

1.20. Giả sử (AEF) cắt CC' tại I (h.1.22). Khi đó ta có $AE \parallel FI$, $AF \parallel EI$ nên tứ giác $AEIF$ là hình bình hành. Trên cạnh CC' lấy điểm J sao cho $CJ = DF$. Vì CJ song song và bằng DF nên JF song song và bằng CD. Do đó tứ giác $CDFJ$ là hình chữ nhật. Từ đó suy ra FJ song song và bằng AB. Do đó AF song song và bằng BJ. Vì AF cũng song song và bằng EI nên BJ song song và bằng EI. Từ đó suy ra $IJ = EB = DF = JC = \frac{c}{3}$.



Hình 1.22

Ta có $S_{BCIE} = \frac{1}{2}\left(\frac{c+2c}{3}\right)b = \frac{bc}{2}$,

$S_{DCIF} = \frac{1}{2}\left(\frac{c+2c}{3}\right)a = \frac{ac}{2}$

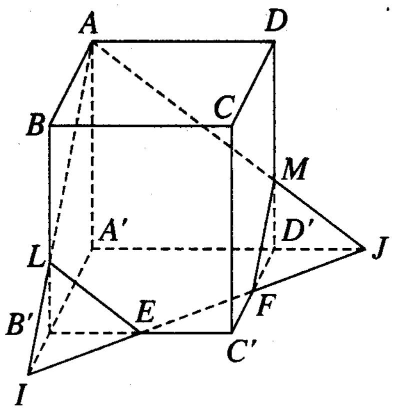
nên $V_{(H)} = V_{A.BCIE} + V_{A.DCIF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{2}\cdot a + \frac{1}{3}\cdot\frac{ac}{2}\cdot b = \frac{abc}{3}$.

Vì thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng abc nên $V_{(H')} = \frac{2}{3}abc$.

Từ đó suy ra $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{1}{2}$.

1.21. Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng $A'B'$ tại I và cắt đường thẳng $A'D'$ tại J. AI cắt BB' tại L, AJ cắt DD' tại M. Gọi V_0 là thể tích khối tứ diện $AA'IJ$. V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (h.1.23).

Vì $EB' = EC'$ và $B'I \parallel C'F$ nên $IB' = FC' = \dfrac{A'B'}{2}$.



Hình 1.23

Do đó $\dfrac{IB'}{IA'} = \dfrac{1}{3}$.

Để ý rằng $B'E \parallel A'J$, $B'L \parallel A'A$.

Ta có $\dfrac{IL}{IA} = \dfrac{IE}{IJ} = \dfrac{IB'}{IA'} = \dfrac{1}{3}$.

Từ đó suy ra : $\dfrac{V_{I.ELB'}}{V_{I.JAA'}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$.

Do đó $V_{I.ELB'} = \dfrac{1}{27}V_0$.

Tương tự $V_{J.MFD'} = \dfrac{1}{27}V_0$.

Gọi $AB = a$, $BC = b$, đường cao hạ từ A xuống $(A'B'C'D')$ là h thì

$$V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = hab.\sin\widehat{BAD},\ V_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3b}{2}\cdot\sin\widehat{BAD}\right)h = \frac{3V}{8}.$$

Vậy $V_{(H)} = V_0 - \dfrac{2}{27}V_0 = \dfrac{25}{27}V_0 = \dfrac{25}{27}\cdot\dfrac{3V}{8} = \dfrac{25}{72}V$, $V_{(H')} = \dfrac{47}{72}V$, $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \dfrac{25}{47}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.22. Không phải. Vì trong hình đó có cạnh (chẳng hạn AB) không phải là cạnh chung của đúng hai đa giác.

1.23. Lấy một đỉnh B tuỳ ý của hình đa diện (H). Gọi M_1 là một mặt của hình đa diện (H) chứa B. Gọi A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của M_1. Khi đó AB, BC là hai cạnh của (H). Gọi M_2 là mặt khác với M_1 và có chung cạnh AB với M_1. Khi đó M_2 còn có ít nhất một đỉnh D sao cho A, B, D là ba đỉnh khác nhau liên tiếp của M_2. Nếu $D \equiv C$ thì M_1 và M_2 có hai cạnh chung AB và BC, điều này vô lí. Vậy D phải khác C. Do đó qua đỉnh B có ít nhất ba cạnh BA, BC và BD.

1.24. Gọi M_1 là một mặt của hình đa diện (H). Khi đó M_1 có ít nhất ba cạnh liên tiếp c_1, c_2, c_3. Gọi M_2 là mặt khác M_1 và có chung cạnh c_1 với M_1. Như thế M_2 còn có ít nhất hai cạnh c_4, c_5 khác c_1 nữa. Vì M_1 và M_2 đã có một cạnh chung c_1 thì cạnh chung đó phải duy nhất nên c_4, c_5 phải khác c_2, c_3. Như vậy c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 khác nhau. Gọi M_3 là mặt khác M_1 và có chung cạnh c_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh c_6 và c_7 (khác c_2) nữa. Do c_2 là cạnh chung duy nhất của M_1 và M_3 nên c_6 khác với c_1 và c_3. Tương tự, c_7 cũng khác với c_1 và c_3.

Nếu c_6 khác với c_4 và c_5 thì (H) có ít nhất 6 cạnh là $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.

Nếu $c_6 \equiv c_4$ thì vì M_2 và M_3 chỉ có thể có nhiều nhất một cạnh chung nên c_7 phải khác c_4 và c_5. Khi đó (H) có ít nhất 6 cạnh là $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7$.

Nếu $c_6 \equiv c_5$ thì lí luận tương tự như trên (H) cũng có ít nhất 6 cạnh.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

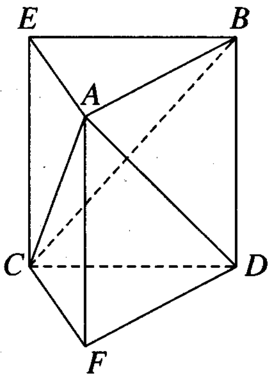
1.25. Giả sử tồn tại hình đa diện (H) có 7 cạnh. Khi đó (H) không có mặt nào có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Thật vậy, giả sử (H) có mặt S có số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Do mỗi đỉnh của S là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh nên tại mỗi đỉnh của nó có thêm ít nhất một cạnh đi qua. Vậy số cạnh của (H) lớn hơn hoặc bằng 8. Điều này trái với giả thiết. Vậy các mặt của (H) là những tam giác. Gọi c, m lần lượt là số cạnh, số mặt của (H). Do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có $3m = 2c = 14$. Điều này vô lí vì m là số nguyên dương.

1.26. Dựng BE song song và bằng DC, DF song song và bằng BA. Khi đó $ABE.FDC$ là một lăng trụ đứng (h.1.24).

Ta có : $S_{ABE} = \dfrac{1}{2}ab.\sin 60^\circ = ab\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

$$V_{C.ABE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ab.h = \frac{\sqrt{3}}{12}abh.$$

Từ đó suy ra $V_{A.BCD} = V_{A.BCE} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}abh$.



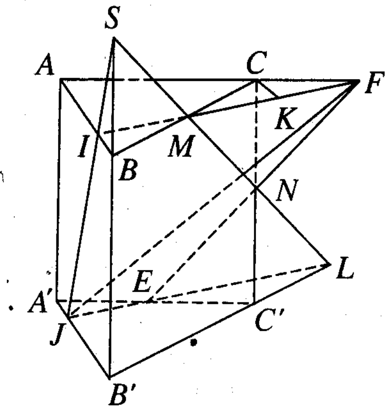
Hình 1.24

1.27. Chia đáy của lăng trụ đã cho thành năm tam giác cân có chung đỉnh O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Khi đó diện tích đáy bằng $\dfrac{5}{2}r^2\sin 72^\circ$. Do đó thể tích lăng trụ đó bằng $\dfrac{5}{2}hr^2\sin 72^\circ$.

1.28. Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a thì cạnh của hình bát diện đều (H) là $\dfrac{a}{2}$. Khi đó

$$V_{ABCD} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12},\ V_{(H)} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\sqrt{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{24}.\ \text{Từ đó suy ra } \frac{V_{(H)}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

1.29. a) Gọi S là giao của hai đường thẳng MN và BB'. Khi đó S, I, J là điểm chung của cả hai mặt phẳng (MNE) và $(ABB'A')$ nên chúng thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng BB', MN và IJ đồng quy. Đa diện $IBM.JB'L$ có hai mặt (IBM) và $(JB'L)$ song song, các cạnh BB', MN và IJ đồng quy nên nó là một hình chóp cụt. Tương tự, đa diện $A'EJ.AFI$ cũng là một hình chóp cụt (h.1.25).



Hình 1.25

b) Hai tam giác NCF và $NC'E$ có $\widehat{C} = \widehat{C'} = 90^\circ$, $NC = NC'$, $\widehat{CNF} = \widehat{C'NE}$ nên chúng bằng nhau.

Do đó $CF = C'E = \dfrac{a}{2}$.

Tương tự, $C'L = CM = \dfrac{a}{2}$. Từ đó suy ra tam giác MCF cân ở C. Ngoài ra ta còn có $\widehat{CMF} = \widehat{BMI} = 30^\circ$ và $\widehat{IBM} = 60^\circ$ nên $\widehat{MIB} = 90^\circ$, $IB = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{a}{4}$ và $IM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BM = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

Vì $FI \perp AB$, $FI \perp AA'$ nên $FI \perp (AIJA')$. Ta có diện tích hình thang vuông $AA'JI$ bằng $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3a}{4} + \dfrac{a}{4}\right)b = \dfrac{ab}{2}$.

Gọi K là trung điểm của MF thì do tam giác MCF cân ở C nên $CK \perp MF$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông CMK và BMI bằng nhau.

Do đó $MF = MK = MI$. Từ đó suy ra $FI = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$. Vậy $V_{F.AIJA'} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{ab}{2}\right)\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2b$.

c) Lí luận như ở câu b) ta có $C'L = CM = \dfrac{a}{2}$, $LJ \perp A'B'$ và $LJ = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Giả sử mặt phẳng (MNE) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện chứa đỉnh B'.

Ta thấy $V_{(H')} = V_{IBM.JB'L} - V_{N.EC'L}$, $V_{(H)} = V_{JA'E.IAF} - V_{N.FCM}$.

Vì $\Delta IBM = \Delta JA'E$, $\Delta JB'L = \Delta IAF$, $BB' = A'A$ nên $V_{IBM.JB'L} = V_{JA'E.IAF}$.

Ngoài ra hai hình chóp $N.EC'L$ và $N.FCM$ có đường cao bằng nhau và có đáy là những tam giác bằng nhau nên chúng có thể tích bằng nhau.

Từ đó suy ra $V_{(H)} = V_{(H')}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.30 (D) **1.32** (D) **1.34** (B) **1.36** (A) **1.38** (D) **1.40** (C) **1.42** (B) **1.44** (C).
1.31 (B) **1.33** (C) **1.35** (C) **1.37** (C) **1.39** (A) **1.41** (B) **1.43** (A)

CHƯƠNG II MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và chứa đường $\mathscr{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ một góc 360° thì đường $\mathscr{C}$ tạo nên một mặt tròn xoay. Mặt tròn xoay đó nhận Δ làm *trục*, đường $\mathscr{C}$ được gọi là *đường sinh*.

II- TÍNH CHẤT CỦA MẶT TRÒN XOAY

– Nếu cắt mặt tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Δ ta được giao tuyến là một đường tròn có tâm trên Δ.

– Mỗi điểm M trên mặt tròn xoay đều nằm trên một đường tròn thuộc mặt tròn xoay và đường tròn này có tâm thuộc trục tròn xoay Δ.

III- MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và d cắt nhau tại O tạo thành góc α với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng d khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ sao cho góc α không đổi gọi là *mặt nón tròn xoay đỉnh O*. Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng d gọi là *đường sinh*, góc 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón tròn xoay.

2. Tính chất

a) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng đi qua đỉnh O ta có các trường hợp sau đây :

– Mặt phẳng cắt mặt nón theo hai đường sinh ;

– Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này người ta gọi mặt phẳng đó là *tiếp diện* của mặt nón ;

– Mặt phẳng chỉ có một điểm O chung duy nhất với mặt nón, ngoài ra không có một điểm chung nào khác.

b) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh O ta có các trường hợp sau đây :

– Nếu mặt phẳng (P) cắt mọi đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường elip hoặc là một đường tròn (khi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Δ của mặt nón) ;

– Nếu mặt phẳng (P) song song với chỉ một đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường parabol ;

– Nếu mặt phẳng (P) song song với hai đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là hai nhánh của một đường hypebol.

3. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

Cho tam giác OIM vuông tại I. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay* (hay *hình nón*). Hình tròn tâm I bán kính IM gọi là *mặt đáy*, điểm O gọi là *đỉnh*, độ dài OI gọi là *chiều cao* và độ dài OM gọi là *đường sinh* của hình nón đó.

Khối nón tròn xoay (hay *khối nón*) là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó.

4. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng r và có độ dài đường sinh bằng l.

Ta có công thức : $S_{xq} = \pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình nón cộng diện tích đáy của hình nón.

5. Thể tích khối nón tròn xoay

Gọi V là thể tích của khối nón tròn xoay có chiều cao h và có diện tích đáy là B.

Ta có công thức $V = \frac{1}{3}Bh$. Nếu bán kính đáy bằng r ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

IV- MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh trục Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay gọi là *mặt trụ tròn xoay* và được gọi tắt là *mặt trụ*. Đường thẳng Δ gọi là *trục* của mặt trụ, đường thẳng l gọi là *đường sinh* của mặt trụ và r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Tính chất

a) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính đáy bằng r) bởi một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Δ thì ta được một đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r, r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.

b) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính đáy bằng r) bởi một mặt phẳng (α) không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh ta được giao tuyến là đường elip có trục nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin\varphi}$ trong đó φ là góc giữa trục Δ và mặt phẳng (α) ($0^o < \varphi < 90^o$).

c) Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Δ và có bán kính r thì đường thẳng l' đi qua M và song song với Δ sẽ nằm trên mặt trụ đó và như vậy l' là một đường sinh của mặt trụ đã cho.

d) Cho mặt phẳng (α) song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng bằng h. Nếu $h < r$ thì mặt phẳng (α) cắt mặt trụ theo hai đường sinh, nếu $h = r$ thì mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh, còn nếu $h > r$ thì mặt phẳng (α) không cắt mặt trụ.

3. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, ví dụ cạnh AB, thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình gọi là *hình trụ tròn xoay* (hay *hình trụ*).

Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ tạo ra hai hình tròn bằng nhau gọi là *hai đáy* của hình trụ, còn cạnh CD là *đường sinh* tạo ra *mặt xung quanh* của hình trụ. Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là *chiều cao* của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn được gọi tắt là *khối trụ*. Ta gọi *mặt đáy, chiều cao, đường sinh* của một khối trụ theo thứ tự là mặt đáy, chiều cao, đường sinh của hình trụ tương ứng làm giới hạn cho khối trụ đó.

4. Diện tích xung quanh của hình trụ

Nếu gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng r và có đường sinh bằng l ta có công thức :

$$S_{xq} = 2\pi rl$$

Diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình trụ đó cộng với diện tích hai đáy của hình trụ.

5. Thể tích khối trụ

Gọi V là thể tích khối trụ tròn xoay có chiều cao h và có diện tích đáy là B. Ta có công thức $V = Bh$. Nếu bán kính đáy bằng r ta có

$$V = \pi r^2 h.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh đường thẳng d luôn luôn thuộc một mặt nón hay mặt trụ tròn xoay xác định

1. Phương pháp giải

Cần khai thác các tính chất của đường thẳng d qua các giả thiết của bài toán để đưa về kết luận d có thể thuộc mặt nón tròn xoay hoặc thuộc mặt trụ tròn xoay.

2. Ví dụ

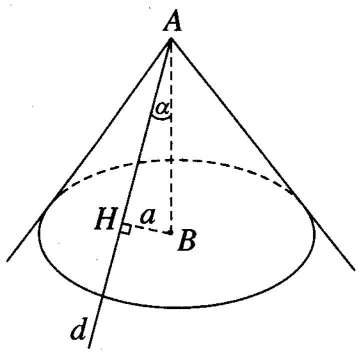
Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng d di động luôn luôn đi qua A và cách B một đoạn không đổi $a = \frac{AB}{2}$. Chứng minh rằng d luôn luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay.

Giải

Ta hãy xét một vị trí tuỳ ý của đường thẳng d đi qua điểm A. Trong mặt phẳng (d, AB) kẻ $BH \perp d$ tại H và gọi $\alpha = \widehat{HAB}$.

Ta có $\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$.

Vậy α không đổi, suy ra d nằm trên mặt nón đỉnh A, nhận AB làm trục và có góc ở đỉnh bằng $2\alpha = 60^{\circ}$ (h.2.1).

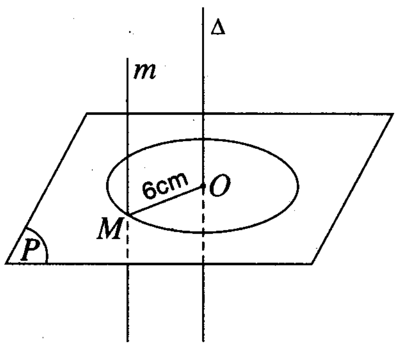


Hình 2.1

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, bán kính $r = 6$ cm. Qua điểm M bất kì nằm trên đường tròn, ta kẻ đường thẳng m vuông góc với (P). Chứng minh rằng đường thẳng m nằm trên một mặt trụ tròn xoay xác định.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O. Vì $m \perp (P)$ nên $m \parallel \Delta$. Đường thẳng m luôn luôn cách đường thẳng Δ cố định một khoảng $OM = 6$ cm. Vậy đường thẳng m nằm trên mặt trụ tròn xoay nhận Δ làm trục và có bán kính $r = 6$ cm (h.2.2).



Hình 2.2

VẤN ĐỀ 2

Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối nón. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

1. Phương pháp giải

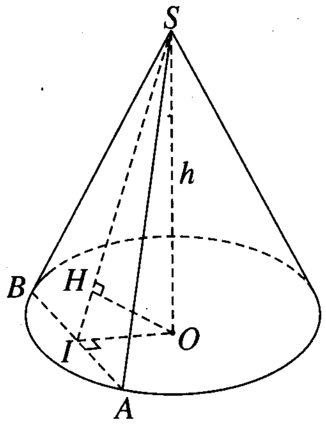
Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình nón (khối nón) để tính diện tích thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối nón.Sau khi xác định được các yếu tố có liên quan đến thiết diện, diện tích xung quanh hoặc thể tích của khối nón, cần khéo léo sử dụng các công thức tính diện tích trong hình học phẳng và tìm độ dài các đoạn thẳng dựa vào các hệ thức lượng trong tam giác.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Hãy xác định thiết diện của (P) với khối nón và tính diện tích thiết diện đó.

Giải

Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB (h.2.3).



Hình 2.3

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$. Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12$ cm. Xét tam giác vuông SOI ta có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$\Rightarrow OI = 15$ (cm).

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có : $OS.OI = SI.OH$.

Do đó $SI = \dfrac{OS.OI}{OH} = \dfrac{20.15}{12} = 25$ (cm).

Gọi S_t là diện tích thiết diện SAB. Ta có : $S_t = \dfrac{1}{2}AB.SI$, trong đó $AB = 2AI$.

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20$ cm và $AB = 40$ cm.

Vậy thiết diện SAB có diện tích là : $S_t = \dfrac{1}{2}\cdot 40.25 = 500$ (cm^2).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

Giải

Khối nón có chiều cao bằng a và có bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$ (h.2.4).

Do đó diện tích xung quanh của khối nón được tính theo công thức :

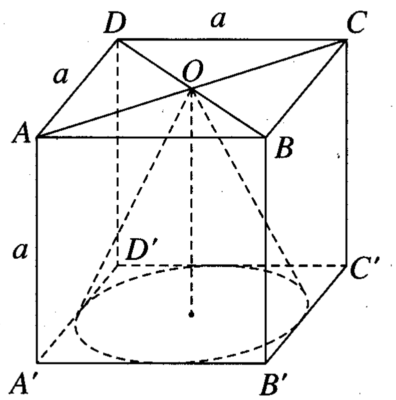
$$S_{xq} = \pi rl \text{ trong đó } l = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $S_{xq} = \pi\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$.

Thể tích của khối nón được tính theo công thức :

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a.$$

Vậy : $V = \dfrac{1}{12}\pi a^3$.



Hình 2.4

VẤN ĐỀ 3

Cho các yếu tố để xác định mặt trụ tròn xoay hoặc khối trụ tròn xoay hoặc hình trụ tròn xoay. Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối trụ, tính diện tích xung quanh của hình trụ và tính thể tích của khối trụ.

1. Phương pháp giải

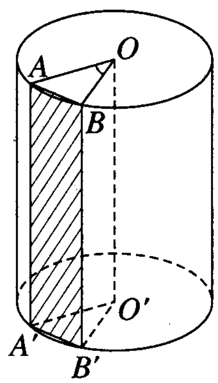
Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình trụ (khối trụ) để tính diện tích của thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối trụ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một khối trụ có chiều cao bằng 20 cm và có bán kính đáy bằng 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc bằng 30°. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

Giải

Từ một đáy của khối trụ ta vẽ hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 30^{\circ}$. Gọi A', O', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, O, B trên mặt đáy còn lại. Ta có OA và $O'B'$ tạo với nhau một góc 30°. Thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có :



Hình 2.5

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 30^{\circ}$$

$$= 2r^2 - 2r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = r^2(2-\sqrt{3}) = 100(2-\sqrt{3}).$$

Vậy $AB = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Mặt khác ta có $AA' = BB' = OO' = 20$ cm (h.2.5).

Do đó thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có diện tích là :

$$S = AB \times BB' = 10\sqrt{2-\sqrt{3}} \times 20 = 200\sqrt{2-\sqrt{3}}\ (\text{cm}^2).$$

Ví dụ 2. Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

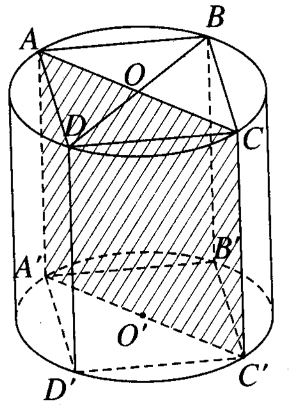
a) Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó.

b) Tính thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho (hình lăng trụ này có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình trụ).

c) Gọi V là thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp trong hình trụ và V' là thể tích khối trụ. Hãy tính tỉ số $\dfrac{V}{V'}$.

Giải

a) Vì thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông nên đường sinh l bằng đường cao h và bằng $2r$. Do đó diện tích xung quanh của khối trụ đó là : $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$ (h.2.6).



Hình 2.6

b) Gọi $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho. Ta có hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đáy. Do đó $AB = r\sqrt{2}$ và ta tính được thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho là : $V = S_{ABCD}.AA' = (r\sqrt{2})^2.2r = 4r^3$.

c) Gọi V' là thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng r và có chiều cao bằng $2r$.

Ta có $V' = Bh = \pi r^2.2r = 2\pi r^3$. Vậy : $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{4r^3}{2\pi r^3} = \dfrac{2}{\pi}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Một hình nón tròn xoay có đỉnh là D, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng l và có góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng α.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo nên.

b) Gọi I là một điểm trên đường cao DO của hình nón sao cho $\dfrac{DI}{DO} = k$ $(0 < k < l)$. Tính diện tích thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

2.2. Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

b) Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Tính diện tích thiết diện được tạo nên.

2.3. Cho $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều có các cạnh bên bằng a và có góc giữa các mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp đã cho. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α.

2.4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $SO = h$ và góc $\widehat{SAB} = \alpha$ $(\alpha > 45^{\circ})$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ của hình chóp.

2.5. Chứng minh rằng trong một khối nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.

2.6. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 12$ cm và có góc ở đỉnh là $\alpha = 120^{\circ}$. Hãy tính diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.

2.7. Cho mặt phẳng (P). Gọi A là một điểm nằm trên (P) và B là một điểm nằm ngoài (P) sao cho hình chiếu H của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (P) sao cho góc $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh rằng điểm M luôn luôn nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

2.8. Cho mặt trụ tròn xoay $(\mathscr{T})$ và một điểm S cố định nằm ngoài $(\mathscr{T})$. Một đường thẳng d thay đổi luôn luôn đi qua S cắt $(\mathscr{T})$ tại A và B. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB luôn luôn nằm trên một mặt trụ xác định.

2.9. Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và chiều cao bằng $r\sqrt{3}$.

Gọi A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc được tạo thành giữa đường thẳng AB và trục của khối trụ bằng 30°.

a) Tính diện tích của thiết diện qua AB và song song với trục của khối trụ.

b) Tính góc giữa hai bán kính đáy qua A và B.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và trục của khối trụ.

2.10. Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' bán kính r và có đường cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với $O'B$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính thể tích của tứ diện này.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ dọc theo một đường sinh.

2.11. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao $h = 50$ cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

2.12. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đáy của hình chóp và có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp. Các mặt bên SAB, SBC, SCA cắt hình trụ theo những giao tuyến như thế nào ?

§2. MẶT CẦU

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM CÓ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

1. Tập hợp tất cả các điểm M trong không gian cách một điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi *là mặt cầu tâm O bán kính r* và thường được kí hiệu là $S(O\,;\,r)$.

Cho mặt cầu tâm O bán kính r và M là một điểm bất kì trong không gian.

– Nếu $OM = r$ thì ta nói điểm M nằm trên mặt cầu $S(O\,;\,r)$.

– Nếu $OM < r$ thì ta nói điểm M nằm trong mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

– Nếu $OM > r$ thì ta nói điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

2. Mặt cầu là một mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính AB của nửa đường tròn đó. Giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là *đường kinh tuyến* của mặt cầu. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục gọi là *vĩ tuyến* của mặt cầu.

II- GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng (P). H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó $OH = h$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới mặt phẳng (P). Ta có các trường hợp :

1. Nếu $h > r$: mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu ;

2. Nếu $h = r$: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H. Ta có $OH \perp (P)$;

3. Nếu $h < r$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính

$$r' = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

Đặc biệt khi $h = 0$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính $r' = r$.

III- GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG, TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và đường thẳng Δ.

1. Trường hợp Δ đi qua tâm O của mặt cầu thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B với $AB = 2r$.

2. Trường hợp Δ không đi qua tâm O của mặt cầu, ta gọi d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ, khi đó :

a) Nếu $d < r$, đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N ;

b) Nếu $d = r$, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm H

(H gọi là tiếp điểm và đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu) ;

c) Nếu $d > r$, đường thẳng Δ không cắt mặt cầu.

☞ ***Chú ý.*** • Qua một điểm A bất kì trên mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu và đều nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tại A. Mặt phẳng tiếp xúc này vuông góc với đường thẳng OA tại A.

• Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đó. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ M đến các tiếp điểm đều bằng nhau. Tất cả các tiếp tuyến này tạo nên một mặt nón tròn xoay có đỉnh là M và có đường tròn đáy nằm trên mặt cầu.

IV- CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Gọi S là diện tích mặt cầu bán kính r, ta có công thức : $S = 4\pi r^2$.

☞ ***Chú ý.*** • Ta có diện tích đường tròn lớn của mặt cầu bán kính r là $s = \pi r^2$. Do đó ta cần lưu ý rằng $S = 4s = 4\pi r^2$.

• Người ta chứng minh được công thức tính thể tích V của khối cầu bán kính r là : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ I

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu thoả mãn một số điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Muốn xác định tâm và bán kính của mặt cầu chúng ta cần dựa vào các mệnh đề sau đây :

a) Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng bằng r cho trước là mặt cầu tâm O bán kính r ;

b) Tập hợp tất cả những điểm M nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB ;

c) Tập hợp tất cả những điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M tới hai điểm A, B cố định bằng một hằng số k^2 là mặt cầu có tâm là trung điểm O của đoạn AB và bán kính $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$;

d) Mặt cầu là mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục là đường kính AB của nửa đường tròn đó.

2. *Ví dụ*

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu trong các trường hợp sau đây :

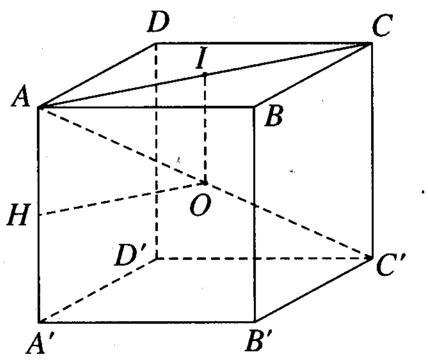
a) Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương ;

b) Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương ;

c) Tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương.

Giải

a) Gọi O là trung điểm của đường chéo AC'. Ta có O cách đều 8 đỉnh của hình lập phương. Vậy mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương cạnh a có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (h.2.7).



Hình 2.7

b) Gọi H là trung điểm của cạnh AA'. Ta có $OH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$ Vậy mặt cầu tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và bán kính $r' = OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

c) Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OI = \dfrac{a}{2}\cdot$ Vậy mặt cầu tiếp xúc với 6 mặt bên của hình lập phương là mặt cầu có tâm O là trung điểm của đường chéo AC' và có bán kính r'' bằng khoảng cách từ O tới 6 mặt bên của hình lập phương. Ta có $r'' = \dfrac{a}{2}\cdot$

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng có vô số mặt cầu đi qua hai điểm cố định A, B cho trước. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đó.

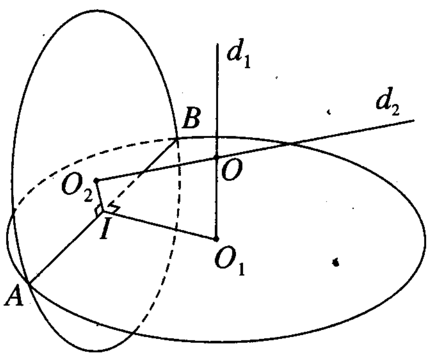
– Nếu $d < r$, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$. Đặc biệt nếu $d = 0$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB. Chứng minh rằng có một mặt cầu đi qua cả hai đường tròn ấy.

Giải

Gọi O_1 và O_2 là các tâm của hai đường tròn có chung dây cung là AB và gọi d_1, d_2 là các đường thẳng lần lượt qua O_1, O_2 và lần lượt vuông góc với các mặt phẳng chứa các đường tròn đó.



Hình 2.10

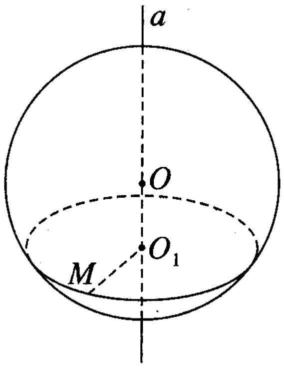
Ta biết rằng d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ nhất, d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn thứ hai. Ta chỉ cần chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm O nào đó để suy ra mặt cầu tâm O bán kính OA là mặt cầu đi qua cả hai đường tròn cho trước (h.2.10).

Thật vậy, gọi I là trung điểm của dây cung AB thì O_1I và O_2I đều vuông góc với AB. Vì hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng khác nhau nên ta có AB vuông góc với mặt phẳng (IO_1O_2). Mặt khác d_1 và d_2 đều vuông góc với AB nên d_1 và d_2 đều nằm trong mặt phẳng (IO_1O_2). Trong mặt phẳng (IO_1O_2), d_1 và d_2 lần lượt vuông góc với hai đường thẳng giao nhau O_1I và O_2I nên d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm O. Ta có mặt cầu tâm O là mặt cầu cần tìm.

Ví dụ 2. Cho một đường thẳng a cố định và một điểm M cố định nằm ngoài đường thẳng a. Chứng minh rằng với mỗi điểm O thay đổi trên đường thẳng a có một mặt cầu tâm O bán kính $r = OM$ luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải

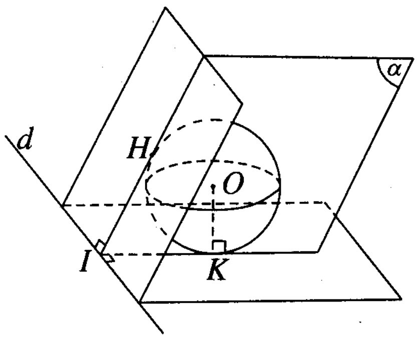
Gọi ($\mathscr{S}$) là mặt cầu có tâm O thuộc đường thẳng cố định a và đi qua điểm M cố định không thuộc a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a tại điểm O_1 thì O_1 cố định và đoạn O_1M không đổi. Khi đó mặt phẳng (α) cắt mặt cầu ($\mathscr{S}$) theo đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M. Đường tròn giao tuyến thu được là cố định vì có tâm O_1 cố định, bán kính $r_1 = O_1M$ không đổi và nằm trong mặt phẳng (α) cố định. Vậy với mỗi điểm O thay đổi trên đường thẳng a cố định, có một mặt cầu tâm O bán kính OM luôn luôn đi qua một đường tròn cố định nằm trong mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với a. Đường tròn này là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt cầu tâm O bán kính OM (h.2.11).



Hình 2.11

Ví dụ 3. Cho đường thẳng d không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng d. Xác định giao tuyến của (α) với mặt cầu cho trước và chứng minh rằng có hai mặt phẳng đi qua d và tiếp xúc với mặt cầu.



Hình 2.12

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của mặt cầu và vuông góc với đường thẳng d tại I. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn tâm O có bán kính r và tất nhiên đường tròn này thuộc (α) (h.2.12).

Trong mặt phẳng (α) gọi IH và IK là hai tiếp tuyến của đường tròn lớn đó cùng đi qua điểm I. Khi đó mặt phẳng (d, H) và mặt phẳng (d, K) là hai mặt phẳng đi qua d và tiếp xúc với mặt cầu. Thật vậy ta có $OK \perp d$ vì OK thuộc (α), mặt khác $OK \perp IK$, do đó OK vuông góc với mặt phẳng (d, K) nên mặt phẳng (d, K) tiếp xúc với mặt cầu. Tương tự ta chứng minh mặt phẳng (d, H) tiếp xúc với mặt cầu. Như vậy ta có hai mặt phẳng đi qua d tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ cho trước.

VẤN ĐỀ 3

Xét vị trí tương đối của một mặt cầu và một đường thẳng

1. Phương pháp giải

* Xét khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng cho trước :

a) Nếu $d < r$, đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm ;

b) Nếu $d = r$, đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu ;

c) Nếu $d > r$ đường thẳng không cắt mặt cầu.

* Có thể sử dụng các kiến thức về hệ thức lượng trong tam giác và hệ thức lượng trong đường tròn trong mặt phẳng để giải toán.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho mặt cầu $S(O\,;\,r)$ và một điểm A biết $OA = 2r$. Qua A kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại B và kẻ một cát tuyến cắt mặt cầu tại C và D. Cho biết $CD = r\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài đoạn AB.

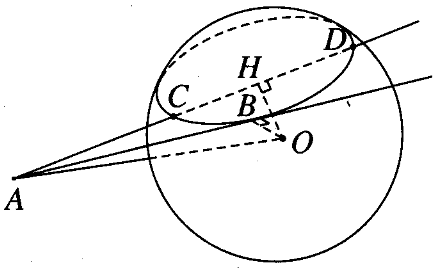
b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

Giải

a) Ta có AB là tiếp tuyến của mặt cầu tại B nên $AB \perp OB$ (h.2.13).

Do đó $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên CD. Ta có : $OC = OD = r$ nên tam giác OCD cân tại O và H là trung điểm của đoạn CD, nghĩa là $HC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. Vậy khoảng cách từ O đến CD là độ dài đoạn OH với



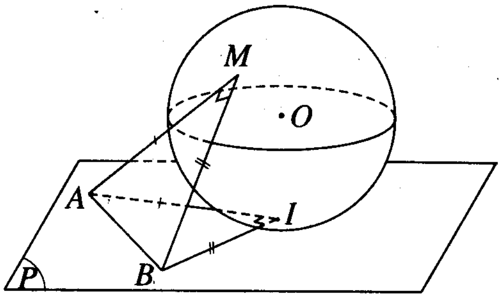
Hình 2.13

$$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại A và B. Chứng minh rằng : $AB^2 = AI^2 + IB^2$.

Giải

Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại I nên AI và BI là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại I. Mặt khác MA và MB là hai tiếp tuyến của mặt cầu tại M. Như vậy từ một điểm A ngoài mặt cầu ta có hai tiếp tuyến AM và AI nên $AM = AI$. Lí luận tương tự ta có $BM = BI$. Ta có hai tam giác ABM và ABI bằng nhau theo trường hợp (c. c. c) nên $\widehat{AMB} = \widehat{AIB} = 90^{\circ}$ (h.2.14).

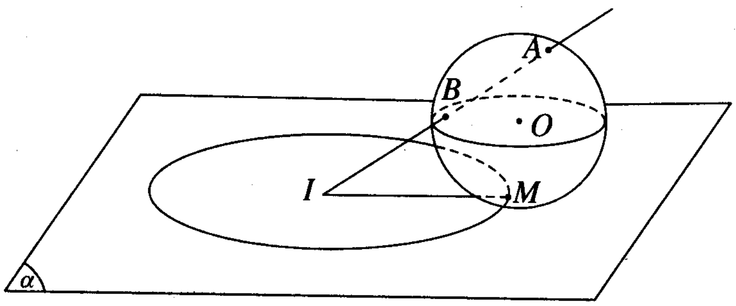


Hình 2.14

Do đó $AB^2 = AI^2 + IB^2$ (định lí Py-ta-go).

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (α) và hai điểm A, B nằm về một phía của (α) sao cho đường thẳng AB cắt (α) tại I. Tìm tập hợp các tiếp điểm của mặt cầu đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

Giải



Hình 2.15

Giả sử mặt cầu tâm O đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại M. Mặt phẳng (ABM) cắt mặt cầu đó theo đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng IM tại M (h.2.15).

Do đó điểm M nằm trên đường tròn tâm I bán kính $r' = \sqrt{IA.IB}$ và đường tròn này nằm trong mặt phẳng (α).

Ngược lại, lấy điểm M bất kì nằm trên đường tròn đó. Ta gọi O là giao điểm của đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) tại M và mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Do đó mặt cầu tâm O bán kính OM đi qua B và tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại M. Vì $IA.IB = IM^2$ nên mặt cầu đó cũng đi qua A.

VẤN ĐỀ 4

Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và hình lăng trụ

1. Phương pháp giải

Muốn chứng minh mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp hoặc một hình lăng trụ ta cần chứng minh mặt cầu đó đi qua tất cả các đỉnh của hình chóp hoặc của hình lăng trụ. Sau đó cần xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp. Chú ý rằng điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp ; điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đó phải là một hình lăng trụ đứng và có đáy là một đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

2. Ví dụ

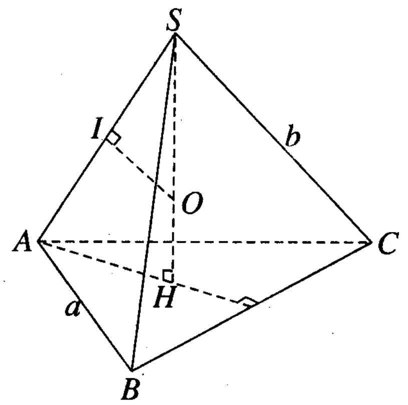
Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên đều bằng b. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó nằm trên đường cao SH trong đó H là trọng tâm của tam giác đều ABC (h.2.16).

Gọi I là trung điểm của cạnh SA. Ta có $OI \perp SA$. Khi đó hai tam giác vuông SIO và SHA đồng dạng. Từ đó ta suy ra :

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH}.$$



Hình 2.16

Do đó $SO = \dfrac{SA^2}{2SH} = r$.

Mà $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2$ nên $SH = \sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Vậy $r = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{b^2}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}} = \dfrac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

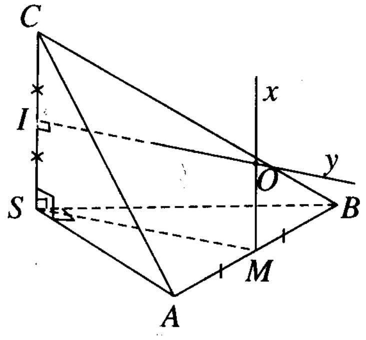
Ví dụ 2. Ba đoạn thẳng *SA, SB, SC* đôi một vuông góc với nhau tạo thành một tứ diện *SABC* với $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

Giải

Cách 1. Gọi *M* là trung điểm của đoạn *AB*. Ta có *M* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông *SAB*. Từ *M* kẻ *Mx // SC*. Mặt phẳng trung trực của đoạn *SC* cắt *Mx* tại *O*.

Ta có $OA = OB = OC = OS$.

Như vậy *O* là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *SABC* (h.2.17).



Hình 2.17

Ta có $r^2 = OS^2 = SM^2 + MO^2 = \dfrac{AB^2}{4} + \dfrac{SC^2}{4} = \dfrac{1}{4}(SA^2 + SB^2 + SC^2)$

(vì $AB^2 = SA^2 + SB^2$).

Vậy $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Cách 2. Từ ba cạnh *SA, SB, SC* ta dựng được hình hộp chữ nhật nhận *SA, SB, SC* là ba cạnh xuất phát từ đỉnh *S*. Khi đó tâm của hình hộp chữ nhật là tâm của mặt cầu phải tìm và bán kính mặt cầu bằng $\dfrac{1}{2}$ đường chéo hình hộp chữ nhật đó. Ta suy ra $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp đó và tính thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu ngoại tiếp đó.

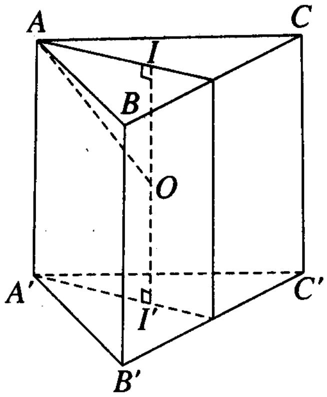
Giải

Gọi I và I' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác đáy lăng trụ (h.2.18). Như vậy I và I' đồng thời cũng là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ấy và nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với đường thẳng II'. Ta suy ra trung điểm O của đoạn II' chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp đi qua 6 đỉnh của lăng trụ đã cho.

Mặt cầu này có bán kính $r = OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$.

Ta có : $OA^2 = AI^2 + IO^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{12}$.

Vậy $r = OA = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.



Hình 2.18

Từ đó ta tính được diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \dfrac{7\pi a^2}{3}.$$

Gọi V là thể tích khối cầu.

Ta có : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3$. Vậy : $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.13. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (α) ta lấy một điểm S tuỳ ý, dựng mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Mặt phẳng (β) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B', C', D' luôn luôn thuộc một mặt cầu cố định.

b) Tính diện tích của mặt cầu đó và tính thể tích khối cầu được tạo thành.

2.14. Hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và có chiều cao bằng h. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu đó.

2.15. Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' có AA' là đoạn vuông góc chung, trong đó $A \in \Delta$ và $A' \in \Delta'$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với Δ' và cho biết $AA' = a$. Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng (α) lần lượt cắt Δ và Δ' tại M và M'. Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) là M_1.

a) Xác định tâm O và bán kính r của mặt cầu đi qua 5 điểm A, A', M, M', M_1.

Tính diện tích của mặt cầu tâm O nói trên theo a, $x = A'M'$ và góc $\varphi = (\Delta, \Delta')$.

b) Chứng minh rằng khi x thay đổi mặt cầu tâm O luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

2.16. Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau :

a) $\widehat{BAC} = 90^\circ$;

b) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $b = c$;

c) $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $b = c$.

2.17. Cho mặt cầu tâm O bán kính r. Gọi (α) là mặt phẳng cách tâm O một khoảng h $(0 < h < r)$ và cắt mặt cầu theo đường tròn $(\mathscr{C})$. Đường thẳng d đi qua một điểm A cố định trên $(\mathscr{C})$ và vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại một điểm B. Gọi CD là một đường kính di động của $(\mathscr{C})$.

a) Chứng minh các tổng $AD^2 + BC^2$ và $AC^2 + BD^2$ có giá trị không đổi.

b) Với vị trí nào của CD thì diện tích tam giác BCD lớn nhất ?

c) Tìm tập hợp các điểm H, hình chiếu vuông góc của B trên CD khi CD chuyển động trên đường tròn $(\mathscr{C})$.

2.18. Hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua đỉnh A và tiếp xúc với hai cạnh SB, SC tại trung điểm của mỗi cạnh.

a) Chứng minh rằng mặt cầu đó đi qua trung điểm của AB và AC.

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D. Tính độ dài của AD và SD.

2.19. Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì hình tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

2.20. Hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và có đường cao AH. Gọi O là trung điểm của AH. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$.

2.21. Hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ là chiều cao của hình chóp và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$ và $AD = 2a$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

2.22. Cho hình cầu tâm O bán kính r. Lấy một điểm A trên mặt cầu và gọi (α) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (α) bằng 30°.

a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu.

b) Đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

2.23 Cho hình cầu đường kính $AA' = 2r$. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{4r}{3}\cdot$ Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn $(\mathscr{C})$.

a) Tính diện tích của hình tròn $(\mathscr{C})$.

b) Gọi BCD là tam giác đều nội tiếp trong $(\mathscr{C})$, hãy tính thể tích hình chóp $A.BCD$ và hình chóp $A'.BCD$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ và $BD \perp BC$. Khi quay tất cả các cạnh của tứ diện đó quanh cạnh AB có những hình nón nào được tạo thành ? Hãy kể tên các hình nón đó.

2.25. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và có đường cao h.

a) Một hình trụ có các đường tròn đáy tiếp xúc với các cạnh của tam giác đáy được gọi là hình trụ nội tiếp trong lăng trụ. Hãy tính diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp đó.

b) Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường thẳng $A'I$ cắt hình trụ nội tiếp nói trên theo một đoạn thẳng. Tính độ dài đoạn thẳng đó.

2.26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn hai đáy ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

b) Tính diện tích mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lập phương.

c) Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay nhận đường thẳng AC' làm trục và sinh ra bởi cạnh AB.

2.27. Cho hình chóp $S.ABC$ và biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh bên của hình chóp đồng thời tiếp xúc với ba cạnh của đáy tại trung điểm của mỗi cạnh đáy. Chứng minh hình chóp đó là hình chóp đều.

2.28. Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng r, có chiều cao bằng $2r$ và có trục là OO'.

a) Chứng minh rằng mặt cầu đường kính OO' tiếp xúc với hai mặt đáy của hình trụ và tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt trụ.

b) Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục OO' và cách trục một khoảng bằng $\frac{r}{2}\cdot$ Tính diện tích thiết diện thu được.

c) Thiết diện nói trên cắt mặt cầu đường kính OO' theo thiết diện là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

2.29. Trong mặt phẳng (α), cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = a$ và có cạnh huyền $BC = 2a$. Cũng trong mặt phẳng (α) đó cho nửa đường tròn đường kính AB cắt cạnh BC tại M.

a) Chứng minh rằng khi quay mặt phẳng (α) xung quanh trục AB có một mặt nón tròn xoay và một mặt cầu được tạo thành. Hãy xác định các mặt tròn xoay đó.

b) Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt tròn xoay đó là một đường tròn. Hãy xác định bán kính của đường tròn đó.

c) So sánh diện tích toàn phần của hình nón và diện tích của mặt cầu nói trên.

2.30. Cho hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau nhận AA' làm đoạn vuông góc chung, trong đó A thuộc Δ và A' thuộc Δ'. Gọi (P) là mặt phẳng qua A vuông góc với Δ' và d là hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (P). Đặt $AA' = a$, góc nhọn giữa Δ và d là α. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) cắt Δ và Δ' lần lượt tại M và M'. Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

a) Chứng minh 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng nằm trên mặt cầu (S). Xác định tâm O của (S). Tính bán kính của (S) theo a, α và khoảng cách x giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Khi x thay đổi, tâm O của mặt cầu (S) di động trên đường nào ? Chứng minh rằng khi (Q) thay đổi mặt cầu (S) luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

2.31. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $AB = 2a$. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S khác A, ta được tứ diện $SABC$.

a) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

b) Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ trong trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 30°.

2.32. Cho đường tròn tâm O bán kính r'. Xét hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, S và A cố định, $SA = h$ cho trước và có đáy $ABCD$ là một tứ giác tuỳ ý nội tiếp đường tròn đã cho, trong đó các đường chéo AC và BD luôn luôn vuông góc với nhau.

a) Tính bán kính r của mặt cầu đi qua năm đỉnh của hình chóp.

b) Hỏi đáy $ABCD$ là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất ?

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.33. Cho hình lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$ và chọn một trong các kết quả sau :

(A) Tỉ số đó bằng $\frac{\pi}{6}$;

(B) Tỉ số đó bằng $\frac{1}{2}$;

(C) Tỉ số đó bằng $\frac{\pi}{2}$;

(D) Tỉ số đó bằng π.

2.34. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón tròn xoay còn ba đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là một trong các kết quả sau :

(A) $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$;

(B) $\pi a^2\sqrt{2}$;

(C) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$;

(D) $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$.

2.35. Tìm khẳng định *sai* trong các khẳng định sau đây :

(A) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình tứ diện bất kì ;

(B) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình lăng trụ có đáy là một tứ giác lồi ;

(C) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình hộp chữ nhật ;

(D) Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình chóp đều.

2.36. Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và biết rằng $\widehat{ACB} = 90^{\circ}$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào *đúng* ?

(A) AB là một đường kính của mặt cầu đã cho ;

(B) Luôn luôn có một đường tròn thuộc mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC ;

(C) ABC là một tam giác vuông cân tại C ;

(D) AB là đường kính của một đường tròn lớn trên mặt cầu đã cho.

2.37. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ và $BD \perp BC$. Khi quay tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành ?

(A) một ; (C) ba ;

(B) hai ; (D) bốn.

2.38. Các hình chóp sau đây luôn có các đỉnh nằm trên một mặt cầu :

(A) hình chóp tam giác ; (C) hình chóp tứ giác ;

(B) hình chóp đều ngũ giác ; (D) hình chóp đều n-giác.

Trong các khẳng định nêu trên khẳng định nào *sai* ?

2.39. Cho tứ diện đều $ABCD$. Khi quay tứ diện đó xung quanh trục là AB có bao nhiêu hình nón khác nhau được tạo thành ?

(A) một ; (C) ba ;

(B) hai ; (D) không có hình nón nào.

2.40. Trong một chiếc hộp hình trụ, người ta bỏ vào đấy ba quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả banh. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả banh, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ là :

(A) 1 (C) 2

(B) 5 (D) Tỉ số đó là một số khác.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

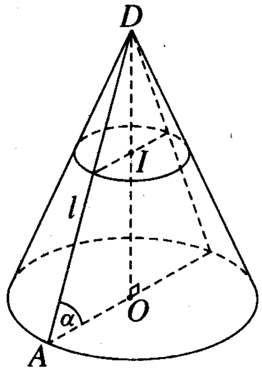
2.1. a) Gọi r là bán kính của đường tròn đáy.

Ta có $OA = r = l\cos\alpha$ (với O là tâm của đường tròn đáy và A là một điểm trên đường tròn đó) (h.2.19).

Ta suy ra : $S_{xq} = \pi rl = \pi l^2 \cos\alpha$.

Khối nón có chiều cao $h = DO = l\sin\alpha$. Do đó thể tích V của khối nón được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2.h$.

Vậy : $V = \frac{1}{3}\pi l^2 \cos^2\alpha . l\sin\alpha = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\alpha \sin\alpha$.

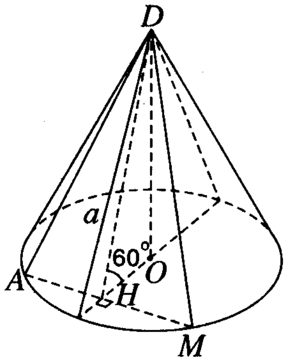


Hình 2.19

b) Thiết diện qua I và vuông góc với trục hình nón là một hình tròn bán kính r' với $\frac{r'}{r} = \frac{DI}{DO} = k$.

Gọi s là diện tích của thiết diện và S là diện tích của đáy hình nón ta có : $\frac{s}{S} = k^2 \Leftrightarrow s = k^2 S$, trong đó $S = \pi r^2 = \pi l^2 \cos^2\alpha$.

Vậy diện tích của thiết diện đi qua điểm I và vuông góc với trục hình nón là : $s = k^2 S = k^2 \pi l^2 \cos^2\alpha$.



Hình 2.20

2.2. a) Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân cạnh a nên hình nón có đường sinh $l = a$, có bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, và có chiều cao $h = r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (h.2.20).

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón, ta có : $S_{xq} = \pi rl = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Gọi S là diện tích đáy của hình nón, ta có $S = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón đã cho là : $S_{xq} + S = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$.

Hình nón có thể tích là : $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 . \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}$.

b) Xét mặt phẳng (DAM) đi qua đỉnh D tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°, cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và M. Từ tâm O của đường tròn đáy ta vẽ $OH \perp AM$, do vậy H là trung điểm của đoạn AM. Ta có $AM \perp (DOH)$ vì $AM \perp OH$ và $AM \perp DO$.

Vậy $\widehat{DHO} = 60^\circ$ và $\sin 60^\circ = \dfrac{DO}{DH}$ hay $DH = \dfrac{DO}{\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

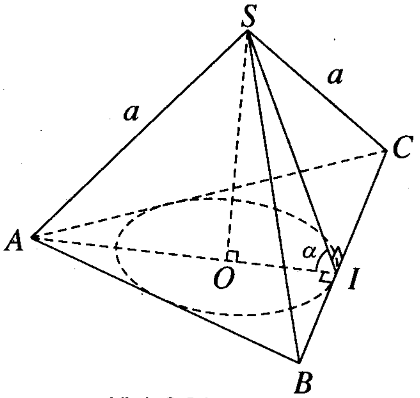
Gọi $S_{\Delta DAM}$ là diện tích thiết diện cần tìm, ta có : $S_{\Delta DAM} = AH.DH$

mà $AH^2 = DA^2 - DH^2 = a^2 - \dfrac{2a^2}{3} = \dfrac{a^2}{3}$, suy ra $AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Vậy $S_{\Delta DAM} = AH.DH = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

2.3. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC (h.2.21). Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{SIO} = \alpha$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và

$$\begin{cases} h = r\tan\alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases} \text{(vì } SA^2 = SO^2 + AO^2\text{)}.$$



Hình 2.21

Do đó $a^2 = r^2\tan^2\alpha + 4r^2 = r^2(\tan^2\alpha + 4)$.

Vậy $r = \dfrac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$.

Hình nón nội tiếp có đường sinh là :

$$l = SI = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}.$$

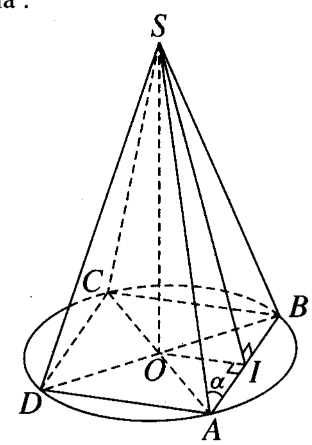
Diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$ là :

$$S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}} \cdot \frac{a}{\cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha + 4}},$$

hay $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{\cos\alpha(\tan^2\alpha + 4)}$.

2.4. Gọi r là bán kính đáy của hình nón ta có $OA = r$, $SO = h$ và $SA = SB = SC = SD = l$ là đường sinh của hình nón (h.2.22). Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có :

$$\begin{cases} SA^2 = SO^2 + OA^2 \\ AI = SA.\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = h^2 + r^2 & (1) \\ \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = l\cos\alpha & (2) \end{cases}$$



Hình 2.22

(2) $\Rightarrow r = \sqrt{2}\,l\cos\alpha$.

(1) $\Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2\cos^2\alpha \Rightarrow h^2 = l^2(1-2\cos^2\alpha) \Rightarrow l^2 = \dfrac{h^2}{1-2\cos^2\alpha}$

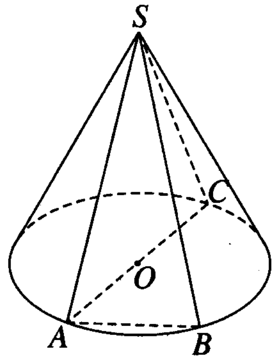
$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}}.$$

Do đó $r = \sqrt{2}\,l\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}}$.

$$S_{xq} = \pi rl = \pi.\frac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}}\cdot\frac{h}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}} = \frac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\alpha}{1-2\cos^2\alpha}.$$

2.5. Xét hai đường sinh SA, SB tuỳ ý của hình nón. Vẽ đường kính AC của đường tròn đáy. Ta có góc ASC là góc ở đỉnh của hình nón. Hai tam giác ASC và ASB có hai cặp cạnh bằng nhau vì chúng cùng là đường sinh của hình nón.

Ta có cạnh $AC \geq AB$ nên $\widehat{ASC} \geq \widehat{ASB}$. Đó là điều cần chứng minh (h.2.23).



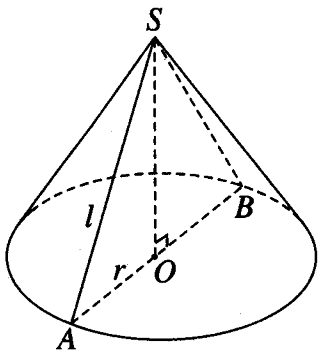
Hình 2.23

2.6. Theo giả thiết ta có góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = \alpha = 120^\circ$. Gọi O là tâm của đường tròn đáy.

Ta có : $\widehat{ASO} = 60^\circ$, và $\sin 60^\circ = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{r}{l}$ với l là độ dài đường sinh của hình nón.

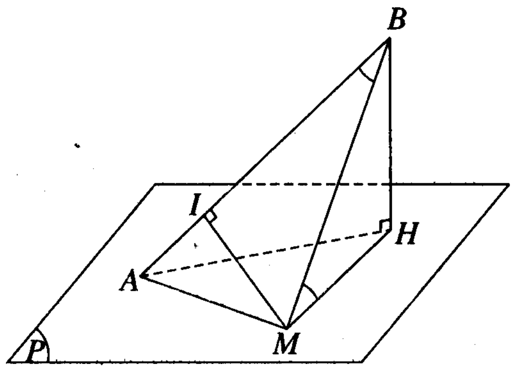
Vậy $l = \dfrac{r}{\sin 60^\circ} = \dfrac{12}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{3}}$.

Khi có hai đường sinh vuông góc với nhau ta có tam giác vuông có diện tích là $\dfrac{1}{2}l^2$. Do đó diện tích của thiết diện là : $S = \dfrac{1}{2}l^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24^2}{3} = 96\,(\text{cm}^2)$ (h.2.24).



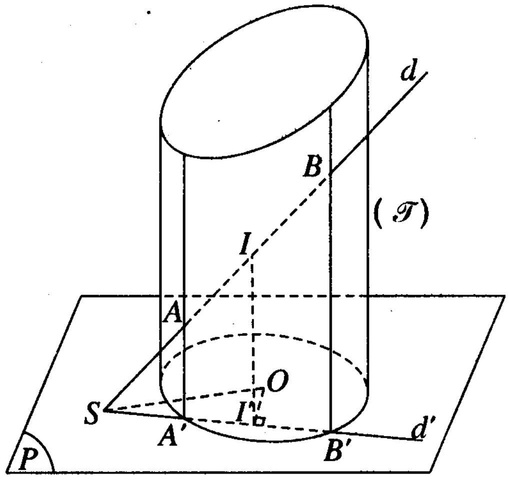
Hình 2.24

2.7. Giả sử ta có điểm M thuộc mặt phẳng (P) thoả mãn các điều kiện của giả thiết đã cho. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Hai tam giác vuông BIM và MHB bằng nhau vì có cạnh huyền chung và một cặp góc nhọn bằng nhau. Do đó $MI = BH$ không đổi. Vậy điểm M luôn luôn nằm trên mặt trụ trục AB và có bán kính bằng BH (h.2.25).



Hình 2.25

2.8. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với trục của mặt trụ $(\mathscr{T})$. Mặt phẳng (P) cắt $(\mathscr{T})$ theo một đường tròn tâm O (h.2.26). Ta hãy xét một vị trí của đường thẳng d. Gọi A, B là giao điểm của d với $(\mathscr{T})$ và I là trung điểm của đoạn AB. Chiếu A, B, I theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) ta được các điểm theo thứ tự là A', B', I' thẳng hàng với S, trong đó A', B' nằm trên đường tròn tâm O trong mặt phẳng (P) và I' là trung điểm của đoạn $A'B'$. Do đó điểm I' luôn luôn nằm trên đường tròn đường kính SO trong mặt phẳng (P) và đường thẳng II' vuông góc với (P). Ta suy ra đường thẳng II' nằm trên mặt trụ $(\mathscr{T}')$ chứa đường tròn đường kính SO nằm trong (P) và có trục song song với trục của mặt trụ $(\mathscr{T})$. Tất nhiên, điểm I chỉ nằm trong phần mặt trụ $(\mathscr{T}')$ thuộc miền trong của mặt trụ $(\mathscr{T})$.



Hình 2.26

2.9. a) Từ A và B dựng các đường sinh AA' và BB' ta có thiết diện qua AB và song song với trục là hình chữ nhật $AA'BB'$. Góc giữa AB và trục chính là góc $\widehat{ABB'}$. Do đó $\widehat{ABB'} = 30^\circ$.

Vậy $AB' = BB' \tan 30^\circ = r\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = r.$

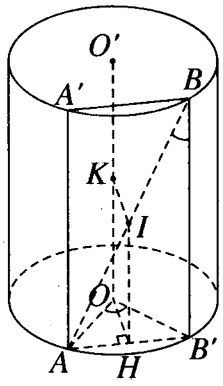
Do đó diện tích tứ giác $AA'BB'$ là $S_{AA'BB'} = AB'.\, BB' = r.r\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$.

b) Góc giữa hai bán kính đáy OA và $O'B$ là $\widehat{AOB'}$ hoặc $\widehat{A'O'B}$ (h.2.27).

Vì $AB' = r$ nên AOB' là tam giác đều, do đó $\widehat{AOB'} = 60^o$.

c) Mặt phẳng (ABB') chứa AB và song song với trục OO' của hình trụ. Gọi H là trung điểm của AB'. Ta có $OH \perp (ABB')$. Đường thẳng qua H song song với OO' cắt AB tại I. Dựng IK // HO cắt OO' tại K. Ta chứng minh được IK là đoạn vuông góc chung của AB và OO'.

Ta có $IK = HO = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.



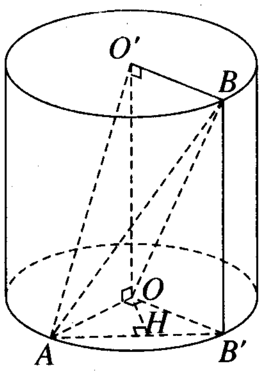
Hình 2.27

2.10. a) Vì trục OO' vuông góc với các đáy nên $OO' \perp OA$ và $OO' \perp O'B$. Vậy các tam giác AOO' và $BO'O$ vuông tại O và O' (h.2.28).

Theo giả thiết ta có $AO \perp O'B$, mà $AO \perp OO'$ nên $AO \perp (OO'B)$. Do đó $AO \perp OB$, nên tam giác AOB vuông tại O. Tương tự, ta chứng minh được tam giác $AO'B$ vuông tại O'. Thể tích hình chóp $OABO'$ là

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta OO'B}.AO$$

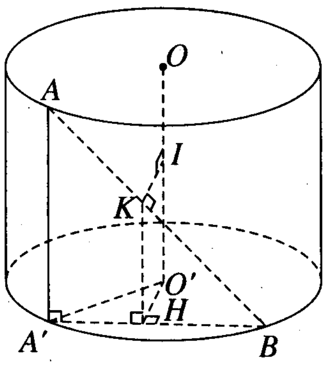
hay $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}OO'.O'B.AO = \dfrac{1}{6}\cdot r\sqrt{2}.r^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}r^3$.



Hình 2.28

b) Ta có (α) là (ABB'). Vì OO' // (α), nên khoảng cách giữa OO' và (α) bằng khoảng cách từ O đến (α). Dựng $OH \perp AB'$ ta có $OH \perp (\alpha)$. Vậy khoảng cách cần tìm là $OH = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

c) Đường tròn tâm O có bán kính bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ tiếp xúc với AB' tại H là trung điểm của AB'. Do đó mặt phẳng (α) song song với trục OO' chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy, nên (α) tiếp xúc với mặt trụ dọc theo một đường sinh, với mặt trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.



Hình 2.29

2.11. a) Ta có công thức $S_{xq} = 2\pi rl$ với $r = 50$ cm, $l = 50$ cm.

Do đó $S_{xq} = 2\pi.50.50 = \pi.5000$ (cm^2)

và $V = \pi r^2 h = 125\,000.\pi$ (cm^3).

b) Giả sử đoạn thẳng AB có điểm mút A nằm trên đường tròn đáy tâm O và điểm mút B nằm trên đường tròn đáy tâm O'. Theo giả thiết ta có $AB = 100$ cm. Giả sử IK là đoạn vuông góc chung của trục OO' và đoạn AB với I thuộc OO' và K thuộc AB. Chiếu vuông góc đoạn AB xuống mặt phẳng đáy chứa đường tròn tâm O', ta có A', H, B lần lượt là hình chiếu của A, K, B (h.2.29).

Vì $KI \perp OO'$ nên IK song song với mặt phẳng $(O'BA')$, do đó $O'H \parallel IK$ và $O'H = IK$. Ta suy ra $O'H \perp AB$ và $O'H \perp AA'$. Vậy $O'H \perp A'B$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ ta có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{100^2 - 50^2} = 50\sqrt{3}$.

Vậy $IK = O'H = \sqrt{O'A'^2 - A'H^2} = \sqrt{50^2 - \left(\dfrac{50\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 50\sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = 25$ (cm).

2.12. Theo giả thiết ta có tam giác đáy ABC là tam giác đều (h.2.30).

Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC. Theo giả thiết ta có $SA = a$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và $\widehat{SIA} = \alpha$.

Do đó $\begin{cases} h = r\tan\alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases}$

Vậy $a^2 = r^2\tan^2\alpha + 4r^2 = r^2(\tan^2\alpha + 4)$.

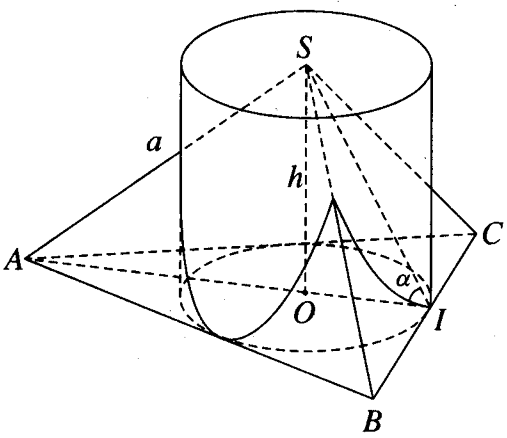
Ta suy ra $r = \dfrac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$ và $h = \dfrac{a\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$.

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ ta có công thức $S_{xq} = 2\pi rl$ trong đó

$r = \dfrac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$ và $l = h = \dfrac{a\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi \cdot \dfrac{a^2\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 4}$.

Các mặt bên SAB, SBC, SCA là những phần của ba mặt phẳng không song song với trục và cũng không vuông góc với trục nên chúng cắt mặt xung quanh của hình trụ theo những cung elip. Các cung này có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng (ABC) tạo nên đường tròn đáy của hình trụ.



Hình 2.30

§2. MẶT CẦU

2.13. a) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$.

Ta lại có $AB' \perp SC$ nên suy ra $AB' \perp (SBC)$.

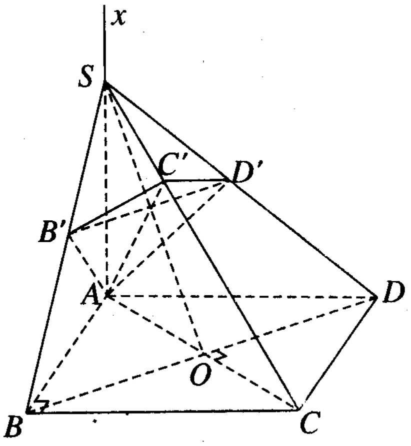
Do đó $AB' \perp B'C$.

Chứng minh tương tự ta có $AD' \perp D'C$ (h.2.31).

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C}$

$= \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} = 90^o$.

Từ đó suy ra 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính là AC.



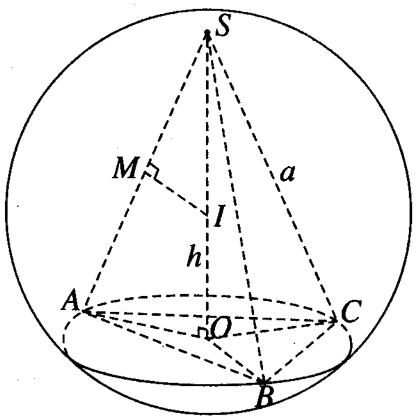
Hình 2.31

b) Gọi r là bán kính mặt cầu, ta có $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$

và $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

2.14. Giả sử ta có mặt cầu tâm I đi qua các đỉnh S, A, B, C của hình chóp. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo giao tuyến là đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $SA = SB = SC$ nên ta có $SO \perp (ABC)$ và OS là trục của đường tròn tâm O. Do đó $SO \perp AO$. Trong tam giác SAO, đường trung trực của đoạn SA cắt SO tại I và ta được hai tam giác vuông đồng dạng là SIM và SAO, với M là trung điểm của cạnh SA (h.2.32).



Hình 2.32

Ta có $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SA}{2SO}$ với $SI = IA = IB = IC = r$.

Vậy $r = SI = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{a^2}{2h}$.

Do đó diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ đã cho là :

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a^2}{2h}\right)^2 = \pi\frac{a^4}{h^2}.$$

2.15. a) Theo giả thiết ta có :

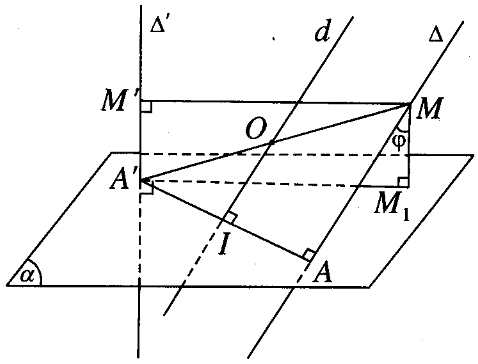
$\widehat{A'M'M} = \widehat{A'AM} = \widehat{A'M_1M} = 90^\circ$ (h.2.33).

Do đó 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) tâm O, với O là trung điểm của $A'M$ và có bán kính $r = \dfrac{A'M}{2}$.

Mặt khác ta có $A'M^2 = A'A^2 + AM^2$,

trong đó $\cos\varphi = \dfrac{MM_1}{AM}$,

nên $AM = \dfrac{MM_1}{\cos\varphi} = \dfrac{x}{\cos\varphi}$.



Hình 2.33

Do đó $A'M^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{\cos^2\varphi}$, suy ra $A'M = \sqrt{\dfrac{a^2\cos^2\varphi + x^2}{\cos^2\varphi}} = \dfrac{1}{\cos\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + x^2}$

Mặt cầu tâm O có bán kính $r = \dfrac{A'M}{2} = \dfrac{1}{2\cos\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + x^2}$.

Diện tích của mặt cầu tâm O : $S = 4\pi r^2 = \pi(2r)^2 = \pi(A'M^2) = \pi\left(a^2 + \dfrac{x^2}{\cos^2\varphi}\right)$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AA'. Ta có $IO \parallel \Delta$ nên tâm O di động trên đường thẳng d cố định đi qua I và song song với Δ. Mặt cầu tâm O đi qua hai điểm cố định A, A', có tâm di động trên đường trung trực d cố định của đoạn AA'. Vậy mặt cầu tâm O luôn luôn chứa đường tròn cố định tâm I có đường kính AA' nằm trong mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với d.

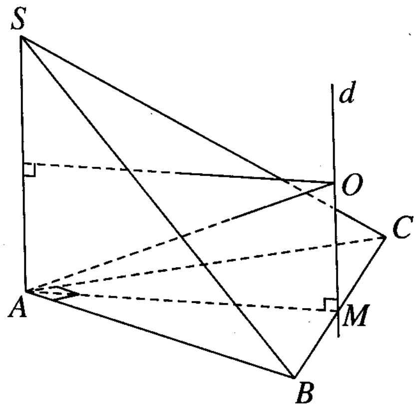
2.16. a) $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC, ta có $MA = MB = MC$. Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại M. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

Ta có $OS = OA = OB = OC$

và $r^2 = OA^2 = OM^2 + MA^2$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (h.2.34).



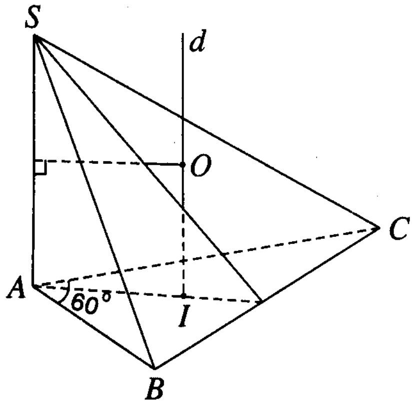
Hình 2.34

b) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $b = c$, khi đó ABC là tam giác đều cạnh b. Gọi I là trọng tâm của tam giác đều nên I đồng thời cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Dựng d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

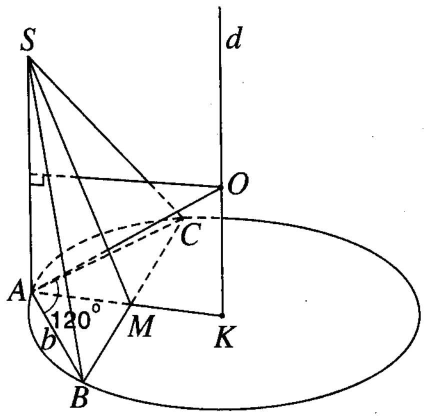
Ta có $OS = OA = OB = OC$ và $r^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2$.

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}.\ \text{Vậy } r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}} \quad \text{(h.2.35).}$$



Hình 2.35



Hình 2.36

c) $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $b = c$, khi đó ABC là một tam giác cân có góc A ở đỉnh bằng 120° và cạnh bên bằng b. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Kéo dài AM một đoạn $MK = AM$, ta có $KA = KB = KC = AB = AC = b$.

Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại K. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

Ta có : $OS = OA = OB = OC$ và $r^2 = OA^2 = OK^2 + KA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$.

Do đó ta có mặt cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có bán kính $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ (h.2.36).

2.17. a) Tam giác ADC vuông tại A nên $AD^2 = DC^2 - AC^2$ (1)

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AD^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2 = 4r^2 + AB^2$ (3)

Mặt khác ta lại có $AC^2 = DC^2 - AD^2$ (4)

và $BD^2 = AD^2 + AB^2$ (5)

Từ (4) và (5) ta có :

$AC^2 + BD^2 = DC^2 + AB^2 = 4r^2 + AB^2$ (6)

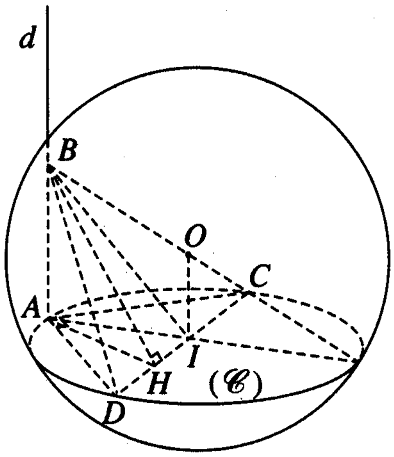
Từ (3) và (6) ta có :

$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ (không đổi)

(vì $4r^2 + AB^2$ không đổi).

b) Diện tích tam giác BCD bằng $\frac{1}{2}$ đường cao BH nhân với đường kính DC. Diện tích này lớn nhất khi BI là đường cao và khi đó $AI \perp CD$ (h.2.37).

c) Ta có $AH \perp DC$. Do đó khi CD di động, điểm H luôn luôn nhìn đoạn AI dưới một góc vuông. Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn đường kính AI nằm trong mặt phẳng (α).



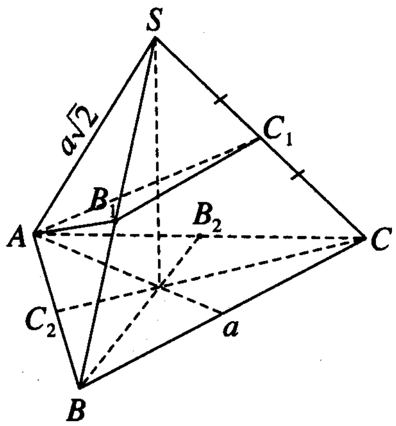
Hình 2.37

2.18. a) Giả sử mặt cầu đi qua đỉnh A của hình chóp và tiếp xúc với cạnh SB tại B_1, tiếp xúc với cạnh SC tại C_1. Khi đó mặt cầu cắt cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm C_2, B_2. Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu đó theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn này tiếp xúc với SB tại B_1 và đi qua A và C_2.

Do đó ta có : $BB_1^2 = BA.BC_2$ trong đó

$BB_1 = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $BB_1^2 = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $\frac{a^2}{2} = a.BC_2 \Rightarrow BC_2 = \frac{a^2}{2} : a = \frac{a}{2}$ (h.2.38).



Hình 2.38

Điều đó chứng tỏ mặt cầu nói trên đi qua trung điểm C_2 của đoạn AB. Lí luận tương tự ta chứng minh được mặt cầu đó đi qua trung điểm B_2 của AC.

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D, ta có :

$$SD.SA = SB_1^2 \text{ hay } SD.a\sqrt{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

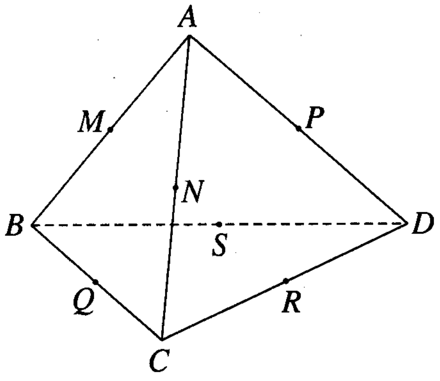
Do đó $SD = \frac{a^2}{2} : a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ và $AD = SA - SD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

2.19. Giả sử có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt tại M, N, P, Q, R, S. Khi đó AM, AN, AP là các tiếp tuyến cùng phát xuất từ A nên $AM = AN = AP$.

Lập luận tương tự ta cũng có :

$$BM = BQ = BS$$
$$CQ = CR = CN$$
$$DR = DS = DP.$$

Vậy
$$\begin{aligned} AB + CD &= AM + MB + CR + RD \\ &= AN + BS + CN + DS \\ &= AN + NC + BS + SD \\ &= AC + BD \end{aligned}$$



Hình 2.39

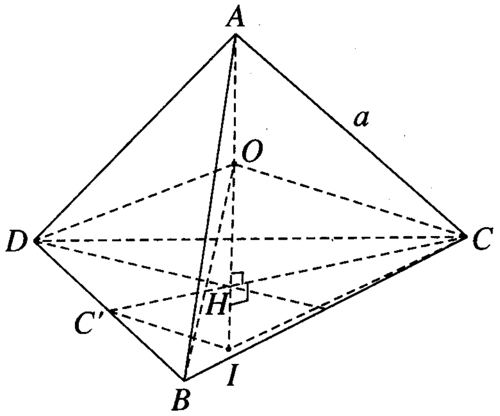
Bằng lí luận tương tự ta chứng minh được $AB + CD = AC + BD = AD + BC$ (h.2.39).

2.20. Gọi H là trọng tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AH^2 = AC^2 - HC^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$. Vậy $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Mặt khác $OC^2 = OH^2 + HC^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}$ hay $OC = OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $BD = BC = CD = a$ nên các tam giác DOB, BOC, COD là những tam giác vuông cân tại O. Do đó hình chóp $ODBC$ là hình chóp có đáy là tam giác đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên OH, ngoài ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp này phải nằm trên trục của tam giác vuông DOB. Từ trung điểm C' của cạnh BD ta vẽ đường thẳng song song với OC cắt đường thẳng OH tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$. Mặt cầu này có bán kính là IC và $IC^2 = IH^2 + HC^2$ (h.2.40).



Hình 2.40

Chú ý rằng $IH = \frac{1}{2}OH$ (vì $HC' = \frac{1}{2}HC$).

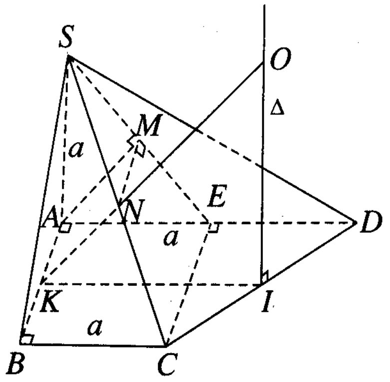
Do đó : $IC^2 = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3} = \frac{9a^2}{24}$ hay $IC = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

2.21. Tam giác CED là tam giác vuông cân tại E nên trục của đường tròn đi qua ba điểm C, E, D là đường thẳng Δ đi qua trung điểm I của đoạn CD và song song với SA.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC. Ta có mặt phẳng $(ABNM)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn SE. Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ chính là giao điểm của Δ và mặt phẳng $(ABNM)$. Gọi K là trung điểm của AB thì $KN \parallel AM$ và do đó $KN \parallel (SAE)$. Ta có $IK \parallel AD$ nên $IK \parallel (SAE)$.

Vậy KN và Δ đồng phẳng và ta có O là giao điểm cần tìm (h.2.41).

Chú ý rằng OIK là tam giác vuông cân, vì $\widehat{OKI} = \widehat{MAE} = 45^\circ$.



Hình 2.41

Ta có $OI = IK$, trong đó $IK = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{a + 2a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $OC^2 = OI^2 + IC^2 = \dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4}$ (vì $CD = a\sqrt{2}$, $IC = \dfrac{CD}{2}$). Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là : $r = OC = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

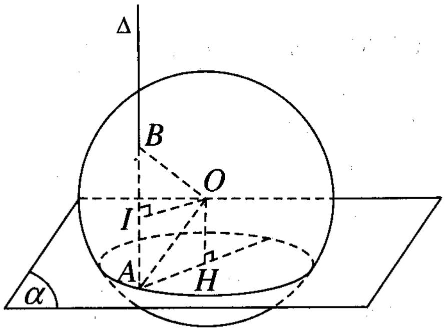
2.22. a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O trên mặt phẳng (α). Theo giả thiết ta có $\widehat{OAH} = 30^\circ$. Do đó : $HA = OA\cos 30^\circ = r\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu là : $S = \pi . HA^2 = \dfrac{3\pi r^2}{4}$.

b) Mặt phẳng (ABO) qua tâm O của hình cầu nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn qua A và B. Gọi I là trung điểm của đoạn AB ta có $OI \perp AB$. Vì $AB \parallel OH$ nên $AIOH$ là hình chữ nhật.

Do đó $AI = OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{r}{2}$.

Vậy $AB = 2AI = r$ (h.2.42).



Hình 2.42

Chú ý. Có thể nhận xét rằng tam giác OAB cân tại O ($OA = OB$) và có góc $\widehat{OAB} = 60^\circ$ nên OAB là tam giác đều và suy ra $AB = OA = OB = r$.

2.23. a) Theo giả thiết ta có $AH = \dfrac{4r}{3}$ (h.2.43).

Ta suy ra $OH = \dfrac{r}{3}$. Gọi r' là bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

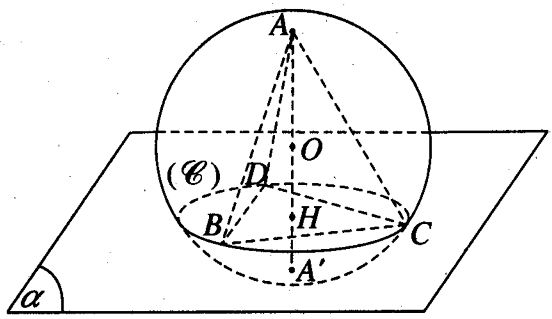
Ta có : $r'^2 = r^2 - OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}$.

Vậy diện tích của hình tròn ($\mathscr{C}$) là :

$$S = \pi r'^2 = \frac{8\pi r^2}{9}.$$

b) Vì BCD là tam giác đều nên ta có :

$$BC = r'.\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}r \text{ (h.2.43).}$$



Hình 2.43

Diện tích của tam giác đều BCD là :

$$S = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24r^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích hình chóp $A.BCD$ là : $V = \frac{1}{3}\frac{2r^2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4r}{3} = \frac{8\sqrt{3}r^3}{27}$.

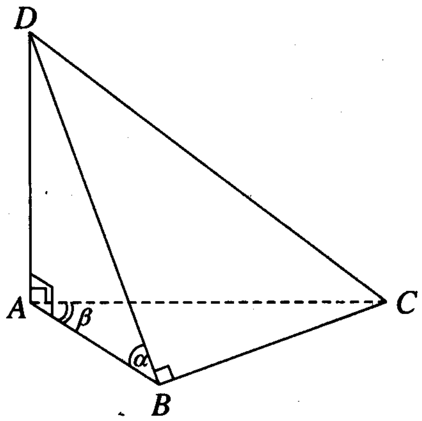
Hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.BCD$ có chung mặt đáy BCD nên

$$\frac{V_{A'.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2}\cdot \text{ Do đó } V_{A'.BCD} = \frac{4\sqrt{3}r^3}{27}.$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.24. Tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên $\widehat{ABD} = \alpha$ là một góc nhọn. Khi quay các cạnh của tứ diện đó xung quanh cạnh AB thì cạnh BD tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh B có trục là AB, cạnh AD vuông góc với AB tạo thành đáy của hình nón đó.

Mặt khác theo giả thiết ta có $BD \perp BC$ nên $AB \perp BC$. Ta có $\widehat{BAC} = \beta$ là một góc nhọn. Do đó khi quay các cạnh của tứ diện xung quanh cạnh AB thì cạnh AC tạo thành một hình nón tròn xoay đỉnh A có trục là AB, còn cạnh BC tạo thành đáy của hình nón (h.2.44).



Hình 2.44

Như vậy khi quay tất cả các cạnh của tứ diện xung quanh trục AB thì các cạnh BD và AC tạo thành hai hình nón.

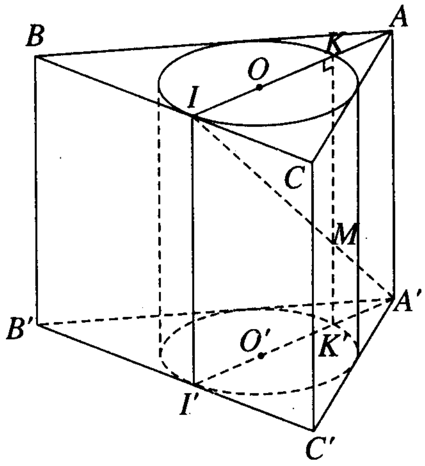
2.25. a) Hình trụ nội tiếp trong lăng trụ có đường tròn đáy tiếp xúc tại trung điểm các cạnh của tam giác đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, r là bán kính đáy của hình trụ nội tiếp trong lăng trụ, ta có :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot \text{ Do đó } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ (h.2.45).}$$

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp lăng trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot h = \frac{\sqrt{3}\pi ah}{3}\cdot$$

b) Ta có mặt phẳng $(AA'I)$ là mặt phẳng qua trục hình trụ. Mặt phẳng này cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $IKK'I'$. Đoạn $A'I$ cắt KK' tại M nên cắt hình trụ theo đoạn IM.



Hình 2.45

Ta có : $\dfrac{KM}{AA'} = \dfrac{IK}{IA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow KM = \dfrac{2}{3}h$.

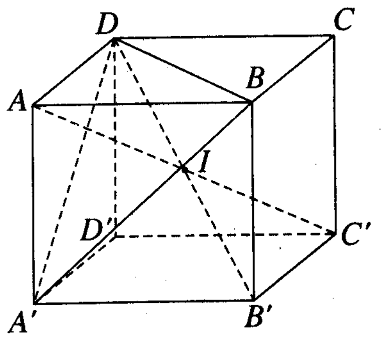
Xét tam giác vuông IKM ta có : $IM^2 = IK^2 + KM^2 = \dfrac{3a^2}{9} + \dfrac{4h^2}{9} = \dfrac{3a^2+4h^2}{9}\cdot$

Vậy $IM = \dfrac{\sqrt{3a^2+4h^2}}{3}\cdot$

2.26. a) Hình trụ có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (h.2.46).

Do đó ta có : $S_{xq} = 2\pi rh = \pi a^2\sqrt{2}$.

b) Gọi I là tâm của hình lập phương. Tất cả các đỉnh của hình lập phương đều có khoảng cách đến I bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên chúng nằm trên mặt cầu tâm I bán kính $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$



Hình 2.46

Ta có diện tích mặt cầu đó là $S = 4\pi r^2 = 3\pi a^2$.

c) Đường tròn đáy của hình nón tròn xoay đỉnh A tạo nên bởi cạnh AB là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $A'BD$, tam giác này có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và có đường cao bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot$

Do đó đường tròn đáy hình nón có bán kính $r' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy hình nón tròn xoay này có đường sinh $l = a$ và có diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi r'l = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{6}}{3}$.

2.27. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và A', B', C' là các điểm tiếp xúc của các cạnh bên SA, SB, SC với mặt cầu. Ta có AA' và AM là hai tiếp tuyến nên $AM = AA'$. Vì M là trung điểm của AB nên $AM = MB$.

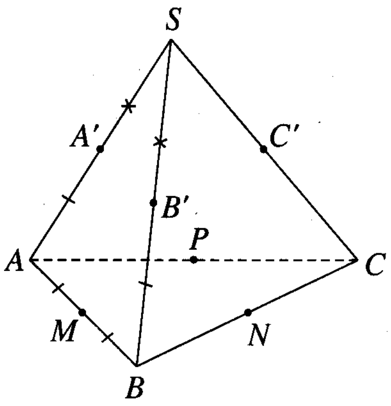
Mặt khác $BM = BB'$, ta suy ra $AA' = BB'$.

Vì $SA' = SB'$ nên $SA' + A'A = SB' + B'B$ hay $SA = SB$.

Tương tự, ta chứng minh được $SB = SC$.

Do đó $SA = SB = SC$.

Mặt khác $AB = 2BM = 2BN = BC = 2CN = 2CP = CA$. Vậy $AB = BC = CA$ và ABC là một tam giác đều. Do đó hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và ABC là một tam giác đều nên là một hình chóp đều. Ta có đường cao kẻ từ S có chân H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC (h.2.47).

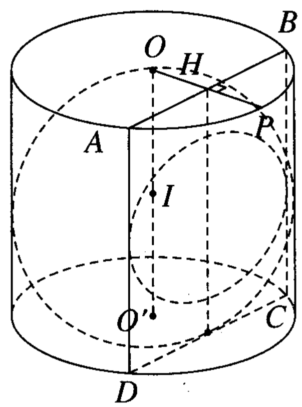


Hình 2.47

2.28. a) Vì các mặt đáy của hình trụ vuông góc với trục OO' tại O và O' nên chúng tiếp xúc với mặt cầu đường kính OO' (h.2.48).

Gọi I là trung điểm của đoạn OO'. Ta có I là tâm của mặt cầu. Kẻ IM vuông góc với một đường sinh nào đó (M nằm trên đường sinh) ta đều có $IM = r$ là bán kính của mặt trụ, đồng thời điểm M cũng thuộc mặt cầu. Vậy mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt trụ.

b) Trên mặt đáy tâm O ta gọi H là trung điểm của bán kính OP. Qua H kẻ dây cung $AB \perp OP$ và nằm trong đáy $(O ; r)$. Các đường sinh AD và BC cùng với các dây cung AB và DC (thuộc đáy $(O' ; r)$) xác định cho ta thiết diện cần tìm là một hình chữ nhật. Gọi S là diện tích hình chữ nhật này, ta có : $S_{ABCD} = AB.AD$ trong đó $AD = 2r$ còn $AB = 2AH$. Vì H là trung điểm của OP nên ta tính được $AB = r\sqrt{3}$. Vậy $S_{ABCD} = 2r^2\sqrt{3}$.



Hình 2.48

c) Đường tròn giao tuyến của mặt cầu đường kính OO' và mặt phẳng $(ABCD)$ có bán kính bằng $\frac{AB}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Đường tròn này có tâm là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và tiếp xúc với hai cạnh AD, BC của hình chữ nhật đó.

2.29. a) Tam giác vuông ABC có $BC = 2a$ và $AC = a$ nên ta suy ra $\widehat{ABC} = 30^o$. Khi quay xung quanh trục AB cạnh BC tạo nên mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh bằng 60^o và có đường tròn đáy có bán kính $AC = a$. Khi quay xung quanh trục AB nửa đường tròn đường kính AB tạo nên mặt cầu có tâm là trung điểm I của đoạn AB và bán kính $r = \frac{AB}{2}$ (h.2.49).

b) Khi quay xung quanh trục AB, giao điểm M của nửa đường tròn đường kính AB và cạnh BC sẽ tạo nên giao tuyến của mặt nón và mặt cầu.

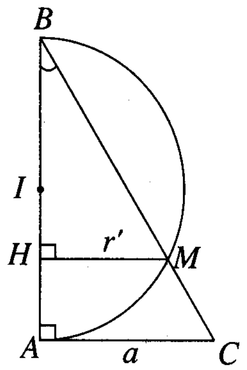
Vẽ $MH \perp AB$

Ta có : $\frac{MH}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác ta có $CA^2 = CM.CB$ nên ta có $CM = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$.

Do đó $BM = CB - CM = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$ và $MH = \frac{3}{4}a$.

Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính $r' = \frac{3}{4}a$.



Hình 2.49

c) Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón và S_2 là diện tích mặt cầu.

Ta có : $S_1 = \pi rl + \pi r^2 = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$.

$$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi (IA)^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2 \text{. Vậy } S_1 = S_2 \text{.}$$

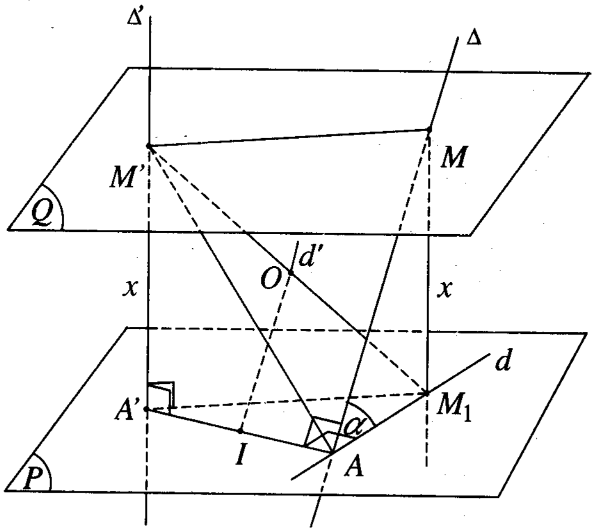
2.30. a) Vì mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với Δ' nên AA' thuộc (P). Vì M thuộc Δ mà d là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) nên M_1 thuộc d. Vì $MA \perp AA'$ nên $M_1A \perp AA'$ (h.2.50).

Mặt khác $M_1A \perp M'A'$ nên ta suy ra $M_1A \perp (AA'M')$. Do đó $M_1A \perp M'A$ và điểm A thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$.

Ta có $M'A' \perp (P)$ nên $M'A' \perp A'M_1$, ta suy ra điểm A' cũng thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$.

Ta có $(Q) // (P)$ nên ta suy ra $MM_1 \perp (Q)$ mà MM' thuộc (Q), do đó $M_1M \perp MM'$.

Như vậy 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) có đường kính $M'M_1$. Tâm O của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn $M'M_1$.



Hình 2.50

Ta có $M'M_1^2 = M'A'^2 + A'M_1^2 = M'A'^2 + A'A^2 + AM_1^2 = x^2 + a^2 + x^2 \cot^2\alpha$

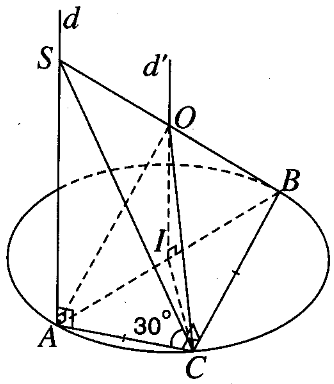
vì $MM_1 = x$ và $\cot\alpha = \dfrac{AM_1}{M_1M} = \dfrac{AM_1}{x}$.

Bán kính r của mặt cầu (S) bằng $\dfrac{M'M_1}{2}$ nên $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2(1+\cot^2\alpha)}$.

b) Hình tứ giác $A'M'MM_1$ là hình chữ nhật nên tâm O cũng là trung điểm của $A'M$. Do đó khi x thay đổi thì mặt phẳng (Q) thay đổi và điểm O luôn luôn thuộc đường thẳng d' đi qua trung điểm I của đoạn AA' và song song với đường thẳng Δ. Vì mặt cầu tâm O luôn luôn đi qua hai điểm cố định A, A' nên nó có tâm O di động trên đường thẳng d'. Do đó mặt cầu tâm O luôn luôn chứa đường tròn tâm I cố định có đường kính AA' cố định và nằm trong mặt phẳng cố định vuông góc với đường thẳng d'.

2.31. a) Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên ta có $IA = IB = IC$. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ phải nằm trên đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Ta suy ra $d' // d$. Do đó d' cắt SB tại trung điểm O của đoạn SB. Ta có $OB = OS = OA = OC$ và như vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $SABC$ (h.2.51).

b) Trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° thì góc của hai mặt phẳng đó chính là góc $\widehat{SCA}$. Thực vậy vì $SA \perp (ABC)$ mà $AC \perp CB$ nên ta có $SC \perp CB$. Do đó $\widehat{SCA} = 30^\circ$.



Hình 2.51

Vì $AB = 2a$ nên ta có $AC = a\sqrt{2}$ ta suy ra $SA = AC.\tan 30^\circ = a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

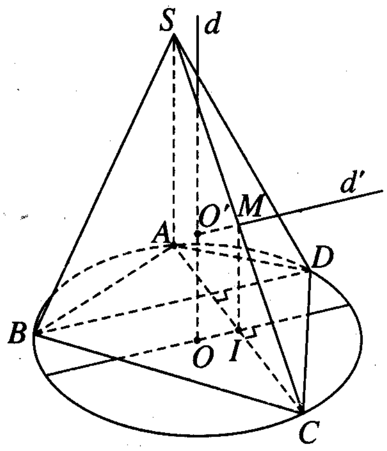
Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện khi $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Ta có $r = \dfrac{SB}{2} = OA = OB = OC = OS$, trong đó $SB^2 = SA^2 + AB^2$.

Vậy $SB^2 = \dfrac{6a^2}{9} + 4a^2 = \dfrac{42a^2}{9}$. Do đó $SB = \dfrac{a\sqrt{42}}{3}$.

Ta suy ra $r = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{42}}{6}$.

2.32. a) Trong mặt phẳng chứa đường tròn tâm O ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ ta kẻ đường kính qua O vuông góc với dây cung AC tại I. Ta có $IA = IC$ và $OI \parallel BD$. Gọi O' là tâm mặt cầu đi qua 5 đỉnh của hình chóp ta có $O'A = O'B = O'C = O'D = O'S$. Điểm O' phải nằm trên trục d của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Ta có $d \perp (ABCD)$ tại O. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Ta có $MI \parallel SA$ nên $MI \perp (ABCD)$ tại I. Từ M kẻ đường thẳng $d' \parallel OI$ cắt d tại O'. Vì $d' \perp (SAC)$ tại M nên ta có $O'C = O'S$ và $O'C$ là bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ (h.2.52).



Hình 2.52

Ta có $r = O'C = \sqrt{OO'^2 + OC^2} = \sqrt{MI^2 + r'^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4r'^2}}{2}.$$

b) Vì SA không đổi nên ta có V_{SABCD} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABCD} lớn nhất. Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$ trong đó AC và BD là hai dây cung vuông góc với nhau. Vậy $AC.BD$ lớn nhất khi và chỉ khi $AC = BD = 2r'$, nghĩa là tứ giác $ABCD$ là một hình vuông.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

2.33 (A)	**2.35** (B)	**2.37** (B)	**2.39** (B)	
2.34 (A)	**2.36** (B)	**2.38** (C)	**2.40** (A)	**2.41** (A)

CHƯƠNG III PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. Điểm O được gọi là *gốc toạ độ*. Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là *các mặt phẳng toạ độ*.

Không gian gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ được gọi là *không gian Oxyz*.

II- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tuỳ ý.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ và gọi bộ ba số $(x ; y ; z)$ là *toạ độ của điểm M* đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ đã cho. Như vậy có tương ứng 1 – 1 giữa mỗi điểm M trong không gian với một bộ ba số $(x ; y ; z)$ gọi là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước. Ta viết : $M = (x ; y ; z)$ hoặc $M(x ; y ; z)$.

III- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ với $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Khi đó bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước. Ta viết : $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hay $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$.

IV- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và một số k. Khi đó ta có :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

☞ ***Chú ý.*** a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}.$

b) $\vec{0} = (0 ; 0 ; 0)$.

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ cùng phương $\Leftrightarrow$ có một số k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \\ b_3 = ka_3. \end{cases}$$

d) Nếu $A = (a_1; a_2; a_3)$, $B = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$.

V- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG

a) Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

b) Độ dài của một vectơ :

Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, ta có $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$ và $B = (x_B; y_B; z_B)$ là

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

d) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Ta có : $\cos\varphi = \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

và $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

VI- PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$ mặt cầu tâm $I = (a ; b ; c)$ bán kính r có phương trình là : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$,

hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(-A ; -B ; -C)$

có bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ I

Tìm toạ độ của một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thoả mãn một số điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa có liên quan đến vectơ : toạ độ của vectơ, độ dài của vectơ, biết phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng, biết tính tổng (hiệu) của hai vectơ, biết tính các toạ độ trọng tâm của một tam giác, ...

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (5 ; 7 ; 2)$, $\vec{b} = (3 ; 0 ; 4)$, $\vec{c} = (-6 ; 1 ; -1)$. Hãy tìm các vectơ sau đây :

a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$;   b) $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} 3\vec{a} = (15 ; 21 ; 6) \\ -2\vec{b} = (-6 ; 0 ; -8) \\ \vec{c} \ = (-6 ; 1 ; -1). \end{cases}$

Do đó $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3 ; 22 ; -3)$.

b) Tương tự, ta tính được $\vec{n} = (19 ; 39 ; 30)$.

Ví dụ 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°. Tìm $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $|\vec{a}-\vec{b}|$ biết $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

Giải

Ta có : $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

$$= 9 + 25 + 2.3.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 19.$$

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$.

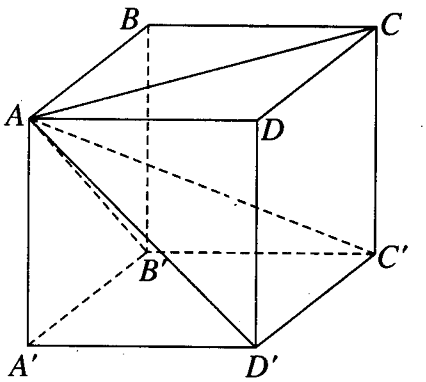
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$= 9 + 25 - 2.3.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

Vậy $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD'}$.



Hình 3.1

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ vì $ACC'A'$ là hình chữ nhật (h.3.1).

Tương tự : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$ vì $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB}$ vì $ABC'D'$ là hình chữ nhật.

Do đó $3\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC'}$.

Ta suy ra $2\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}$.

Vậy $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$.

Ví dụ 4. Trong không gian cho ba điểm $A(1 ; 0 ; -2)$, $B(2 ; 1 ; -1)$, $C(1 ; -2 ; 2)$.

a) Tìm độ dài các cạnh của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1 ; -3 ; 3)$, $\overrightarrow{CA} = (0 ; 2 ; -4)$.

Do đó $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$,

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19},$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Ta có :

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}, \; y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}, \; z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $D = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Tương tự, $E = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $F = (1 ; -1 ; 0)$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giả sử $G = (x ; y ; z)$. Ta có : $\overrightarrow{GA} = (1 - x ; -y ; -2 - z)$

$$\overrightarrow{GB} = (2 - x ; 1 - y ; -1 - z)$$

$$\overrightarrow{GC} = (1 - x ; -2 - y ; 2 - z).$$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = (4-3x\,;-1-3y\,;-1-3z)$.

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên ta có :

$$\begin{cases}4-3x=0\\-1-3y=0\\-1-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}.\end{cases} \Rightarrow G=\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$$

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các hệ thức vectơ

1. Phương pháp giải

Sử dụng quy tắc ba điểm đối với phép cộng, phép trừ vectơ và các tính chất của các phép toán về vectơ để biến đổi các hệ thức vectơ.

2. Ví dụ

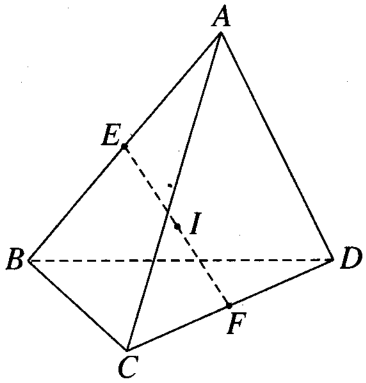
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) Với điểm M bất kì trong không gian, hãy chứng minh rằng :

$$4\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

Giải



Hình 3.2

a) Ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IF}$.

Do đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF})$.

Vì I là trung điểm của EF nên $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$,

suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ (h.3.2).

b) Ta có $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI}$

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DI}$.

Do đó $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI}$.

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$. Vậy $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện *ABCD*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

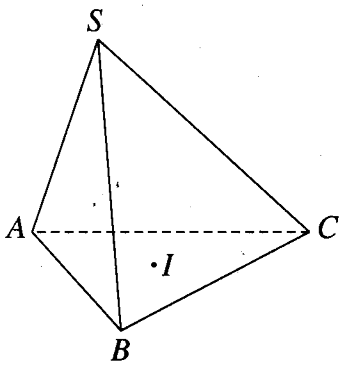
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Do đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$. Vì $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ nên ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Nhận xét. Trên đây ta đã biến đổi vế trái thành vế phải. Mặt khác ta cũng có thể biến đổi vế phải thành vế trái bằng phương pháp tương tự.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác *S.ABC* với *I* là trọng tâm của tam giác đáy *ABC*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.



Hình 3.3

Giải

Ta có $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}$.

Do đó $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

Vì *I* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (h.3.3).

Vậy $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

VẤN ĐỀ 3

Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

1. Phương pháp giải

– Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức toạ độ của tích vô hướng.

– Sử dụng các công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1 ; -2 ; 3)$, $B(0 ; 3 ; 1)$, $C(4 ; 2 ; 2)$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) Tìm côsin của góc $\widehat{BAC}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 5 ; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5 ; 4 ; -1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1.5 + 5.4 + (-2).(-1) = 27$.

b) $$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{27}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}.\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{27}{\sqrt{30}.\sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2 ; 0 ; 1)$, $B(-1 ; 2 ; 3)$.

a) Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.

b) Tìm côsin của các góc tạo bởi ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trên ba trục Ox, Oy, Oz và vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3 ; 2 ; 2)$ và $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2+2^2+2^2} = \sqrt{17}$.

b) Các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có toạ độ là : $i = (1 ; 0 ; 0)$, $\vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$, $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$.

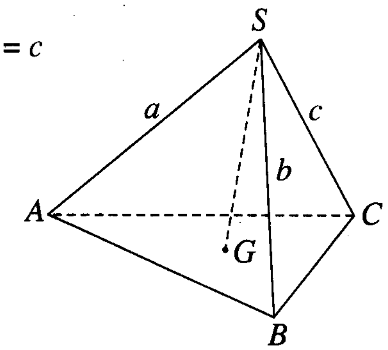
Do đó : $\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\vec{i}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{i}|.|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{17}}$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\vec{j}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{j}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\vec{k}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{k}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và có : $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Hãy tính khoảng cách SG.



Hình 3.4

Giải

Theo Ví dụ 3 (Vấn đề 2) ta có :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

$$(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2.\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2.\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} + 2.\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\cos\beta.$$

Do đó $SG = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\cos\beta}$ (h.3.4).

Ví dụ 4. Hệ trục $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Gọi Oa, Ob, Oc theo thứ tự là các tia phân giác của các góc $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$, $\widehat{xOy}$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ theo thứ tự là ba vectơ đơn vị trên ba tia phân giác ấy.

a) Hãy tính toạ độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

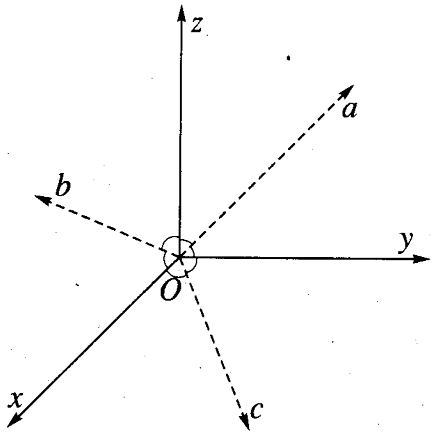
b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{b}.\vec{c}$, $\vec{c}.\vec{a}$ và từ đó suy ra góc giữa các cặp vectơ đó.

Giải

a) Vì tia Oa là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ nên tia Oa tạo với hai tia Oy và Oz hai góc đều bằng $\frac{\pi}{4}$.

Do đó : $\vec{a} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{j} + \cos\frac{\pi}{4}\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{a} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (h.3.5).



Hình 3.5

Tương tự, ta tính được :

$\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Dùng cách tính tích vô hướng bằng biểu thức toạ độ ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2},\ \vec{b}.\vec{c} = \frac{1}{2},\ \vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{2}.$$

Vì $|\vec{a}| = 1$ và $|\vec{b}| = 1$ mà $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$ nên ta suy ra $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $(\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a}) = \frac{\pi}{3}$.

VẤN ĐỀ 4

Lập phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính của mặt cầu đó

1. Phương pháp giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(a ; b ; c)$, bán kính r có dạng :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

2. Ví dụ

Trong không gian $Oxyz$ hãy lập phương trình mặt cầu đi qua điểm $M(5 ; -2 ; 1)$ và có tâm $I(3 ; -3 ; 1)$.

Giải

Mặt cầu cần tìm có bán kính $r = IM = |\overrightarrow{IM}|$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (2\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Do đó $r = |\overrightarrow{IM}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Vậy mặt cầu có phương trình là : $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z + 14 = 0$.

VẤN ĐỀ 5

Cho biết phương trình mặt cầu, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

1. Phương pháp giải

Biến đổi phương trình đã cho về dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Khi đó mặt cầu đã cho có tâm $I = (a\ ;\ b\ ;\ c)$ và có bán kính bằng r.

2. Ví dụ

Cho mặt cầu có phương trình $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 3y + 15z - 2 = 0$. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết dưới dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{25}{4} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{6}.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I = \left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{-5}{2}\right)$ và bán kính $r = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (2 ; -1 ; 2)$, $\vec{b} = (3 ; 0 ; 1)$, $\vec{c} = (-4 ; 1 ; -1)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$ biết rằng :

a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; b) $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$.

3.2 Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a} = (1 ; -3 ; 4)$.

a) Tìm y_0 và z_0 để cho vectơ $\vec{b} = (2 ; y_0 ; z_0)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}$ biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng và $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$.

3.3. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M có toạ độ $(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx).

3.4. Cho hai bộ ba điểm :

a) $A = (1 ; 3 ; 1)$, $B = (0 ; 1 ; 2)$, $C = (0 ; 0 ; 1)$;

b) $M = (1 ; 1 ; 1)$, $N = (-4 ; 3 ; 1)$, $P = (-9 ; 5 ; 1)$.

Hỏi bộ nào có ba điểm thẳng hàng ?

3.5. Trong không gian $Oxyz$, hãy tìm trên mặt phẳng (Oxz) một điểm M cách đều ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 1 ; 0)$, $C(3 ; 1 ; -1)$.

3.6. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

3.7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AD, BC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$.

3.8. Trong không gian cho ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Gọi $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{w} = 2\vec{c} - 3\vec{a}$.

Chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

3.9. Trong không gian $Oxyz$ cho một vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý khác vectơ $\vec{0}$. Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trên ba trục Ox, Oy, Oz và vectơ $\vec{a}$.

Chứng minh rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3.10. Cho hình tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$.

b) Từ hệ thức trên hãy suy ra định lí : "Nếu một hình tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối diện thứ ba cũng vuông góc với nhau."

3.11. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian với các toạ độ đã cho là :

a) $\vec{a}=(3\,;0\,;-6)$, $\quad\vec{b}=(2\,;-4\,;c)$;

b) $\vec{a}=(1\,;-5\,;2)$, $\quad\vec{b}=(4\,;3\,;-5)$;

c) $\vec{a}=(0\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3})$, $\quad\vec{b}=(1\,;\sqrt{3}\,;-\sqrt{2})$.

3.12. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau :

a) $A(4\,;-1\,;1)$, $\quad B(2\,;1\,;0)$;

b) $A(2\,;3\,;4)$, $\quad B(6\,;0\,;4)$.

3.13. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là :

$A(a\,;0\,;0)$, $\quad B(0\,;b\,;0)$, $\quad C(0\,;0\,;c)$.

Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

3.14. Trong không gian $Oxyz$ hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau :

a) Có tâm $I(5\,;-3\,;7)$ và có bán kính $r=2$;

b) Có tâm là điểm $C(4\,;-4\,;2)$ và đi qua gốc toạ độ ;

c) Đi qua điểm $M(2\,;-1\,;-3)$ và có tâm $C(3\,;-2\,;1)$.

3.15. Trong không gian $Oxyz$ hãy xác định tâm và bán kính các mặt cầu có phương trình sau đây :

a) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-16z-26=0$;

b) $2x^2+2y^2+2z^2+8x-4y-12z-100=0$.

3.16. Trong không gian $Oxyz$ hãy viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;-2\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$ và gốc toạ độ O. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

Định nghĩa. Cho mặt phẳng (α). Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

II- PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1. Nếu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá của hai vectơ khác phương là $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$ thì (α) có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2 ; a_3b_1 - a_1b_3 ; a_1b_2 - a_2b_1).$$

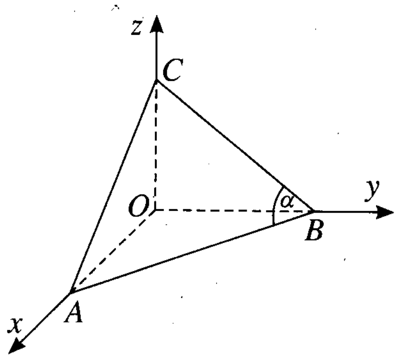
Vectơ $\vec{n}$ được gọi là *tích có hướng* (hay *tích vectơ*) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

2. Phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}(A ; B ; C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A ; B ; C)$.

4. Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục toạ độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại các điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ với $abc \neq 0$ thì (α) có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (h.3.6).



Hình 3.6

III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình tổng quát lần lượt là

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Gọi $\vec{n}_1\,(A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2\,(A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α_1) và (α_2). Với k là số thực, ta có :

1. $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$

2. $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$

$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

☞ ***Chú ý :***

- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 \;\; \forall k \in \mathbb{R}$.
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2. \end{cases}$

IV- KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ được tính bởi công thức :

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Loại 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) khi đã biết vectơ pháp tuyến $\vec{n}\,(A\,;B\,;C)$ và một điểm $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ thuộc (α)

– Phương trình (α) có dạng : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

– Khai triển, rút gọn rồi đưa về dạng tổng quát : $Ax + By + Cz + D = 0$, với $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Loại 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa ba điểm M, N, P không thẳng hàng

– Tìm vectơ pháp tuyến của (α) : $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}$;

– Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$ (loại 1).

Loại 3. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm $M_0\left(x_0;\,y_0;\,z_0\right)$ và song song với mặt phẳng (β) : $Ax+By+Cz+D=0$

– Phương trình (α) có dạng : $Ax+By+Cz+D'=0$ (1)

– Thay toạ độ M_0 vào (1) ta tìm được D'.

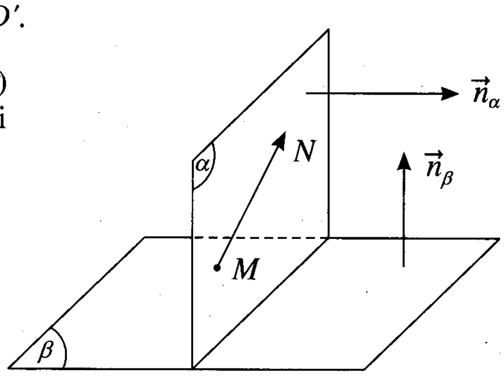
Loại 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm M, N và vuông góc với mặt phẳng (β) :

$$Ax+By+Cz+D=0$$

– Tìm vectơ pháp tuyến của (α)

$$\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{MN}\wedge\vec{n}_\beta$$

– Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$ (loại 1) (h.3.7).



Hình 3.7

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2\,;5\,;-7)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1\,;-2\,;3)$ và $\vec{b}=(3\,;0\,;5)$.

Giải

Ta có : $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-10 ; 4 ; 6) = -2(5 ; -2 ; -3)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5 ; -2 ; -3)$. Vậy phương trình của (α) là : $5(x-2) - 2(y-5) - 3(z+7) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 3z - 21 = 0$.

Ví dụ 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(2 ; -1 ; 3)$, $B(4 ; 0 ; 1)$, $C(-10 ; 5 ; 3)$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1 ; -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-12 ; 6 ; 0)$.

Gọi $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (12 ; 24 ; 24)$.

Ta chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = \frac{1}{12}\vec{a} = (1 ; 2 ; 2)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là :

$$1(x-2) + 2(y+1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 3y - 4z - 2 = 0$ và điểm $A(0 ; 2 ; 0)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (γ) đi qua OA và vuông góc với (α).

Giải

a) Vì (β) song song với (α) nên phương trình mặt phẳng (β) có dạng :

$$2x + 3y - 4z + D = 0. \qquad (1)$$

Điểm A thuộc (β) nên thay toạ độ của A vào (1) ta được

$$2.0 + 3.2 - 4.0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6.$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (β) là : $2x + 3y - 4z - 6 = 0$.

b) Hai vectơ có giá song song hoặc được chứa trong (γ) là :

$$\overrightarrow{OA} = (0 ; 2 ; 0) \text{ và } \vec{n}_\alpha = (2 ; 3 ; -4).$$

Suy ra (γ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\gamma = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{n}_\alpha = (-8\ ;\ 0\ ;\ -4)$.

Mặt phẳng (γ) đi qua điểm $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ và có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_\gamma = (-8\ ;\ 0\ ;\ -4).$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (γ) là : $-8x - 4z = 0$ hay $2x + z = 0$.

Ví dụ 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ -2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ -3)$.

Giải

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được phương trình (α) có dạng : $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{-3} = 1$ hay $6x - 3y - 2z - 6 = 0$.

VẤN ĐỀ 2

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

$$(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

1. *Phương pháp giải*

– Xét hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_\beta = (A_2; B_2; C_2)$.

Ta có các trường hợp sau :

* $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$: (α) cắt (β);

* $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$: $(\alpha) \mathbin{//} (\beta)$;

* $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$: $(\alpha) \equiv (\beta)$;

* $\vec{n}_\alpha . \vec{n}_\beta' = 0$: $(\alpha) \perp (\beta)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình tổng quát sau đây :

a) $(\alpha_1) : x + 2y + 3z + 4 = 0,$

$(\beta_1) : x + 5y - z - 9 = 0.$

b) $(\alpha_2) : x + y + z + 5 = 0,$

$(\beta_2) : 2x + 2y + 2z + 6 = 0.$

c) $(\alpha_3) : x + 2y + 3z + 1 = 0,$

$(\beta_3) : 3x + 6y + 9z + 3 = 0.$

Giải

a) Gọi $\vec{n}_{\alpha_1}$ và $\vec{n}_{\beta_1}$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α_1) và (β_1).

Ta có : $\vec{n}_{\alpha_1} = (1 ; 2 ; 3)$ và $\vec{n}_{\beta_1} = (1 ; 5 ; -1)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \vec{n}_{\alpha_1} \neq k\vec{n}_{\beta_1}$. Vậy (α_1) cắt (β_1).

b) Gọi $\vec{n}_{\alpha_2}$ và $\vec{n}_{\beta_2}$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α_2) và (β_2).

Ta có : $\vec{n}_{\alpha_2} = (1 ; 1 ; 1)$ và $\vec{n}_{\beta_2} = (2 ; 2 ; 2)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\alpha_2} = \frac{1}{2}\vec{n}_{\beta_2} \\ \frac{1}{2} \neq \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Vậy $(\alpha_2) // (\beta_2)$.

c) Gọi $\vec{n}_{\alpha_3}$ và $\vec{n}_{\beta_3}$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α_3) và (β_3).

Ta có : $\vec{n}_{\alpha_3} = (1 ; 2 ; 3)$ và $\vec{n}_{\beta_3} = (3 ; 6 ; 9)$

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Vậy $(\alpha_3) \equiv (\beta_3)$.

Ví dụ 2. Xác định giá trị của m để cặp mặt phẳng sau đây vuông góc

$$(\alpha): 2x + my + 2mz - 9 = 0,$$

$$(\beta): 6x - y - z - 10 = 0.$$

Giải

Gọi $\vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_\beta$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (α) và (β).

Ta có : $\vec{n}_\alpha = (2\,;\, m\,;\, 2m)$

$\vec{n}_\beta = (6\,;\, -1\,;\, -1)$.

Điều kiện cần và đủ để $(\alpha) \perp (\beta)$ là $\vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta = 0$.

Ta có : $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta = 0$

$\Leftrightarrow 12 - m - 2m = 0$

$\Leftrightarrow m = 4$.

Vậy (α) vuông góc với (β) khi và chỉ khi $m = 4$.

Ví dụ 3. Xác định giá trị của m và n để cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau :

$$(\alpha): 2x + my + 3z - 5 = 0,$$

$$(\beta): nx - 8y - 6z + 2 = 0.$$

Giải

Ta có : $(\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} = \dfrac{m}{-8} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -12 \\ -6m = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4. \end{cases}$

VẤN ĐỀ 3

Tính khoảng cách

1. Phương pháp giải

Loại 1. Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$, ta dùng công thức $d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

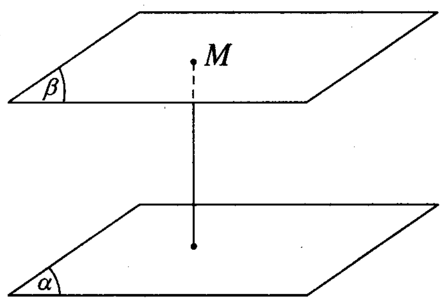
Loại 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (h.3.8)

(α) : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

– Ta chọn một điểm M thuộc (β)

(chẳng hạn điểm $M\left(0; 0; -\dfrac{D_2}{C_2}\right)$);



Hình 3.8

– Ta có $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha))$.

Ví dụ 1. Cho hai điểm $A(1 ; -1 ; 2)$, $B(3 ; 4 ; 1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (α).

Giải

Ta có : $d(A, (\alpha)) = \dfrac{|x_A + 2y_A + 2z_A - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|1 - 2 + 4 - 10|}{3} = \dfrac{7}{3}$

$$d(B, (\alpha)) = \dfrac{|x_B + 2y_B + 2z_B - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|3 + 8 + 2 - 10|}{3} = 1.$$

Ví dụ 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) cho bởi phương trình sau đây : $(\alpha) : x + 2y + 2z + 11 = 0$,

$(\beta) : x + 2y + 2z + 2 = 0$.

Giải

Ta lấy điểm $M(0 ; 0 ; -1)$ thuộc mặt phẳng (β), kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Ta có

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)) = \dfrac{|x_M + 2y_M + 2z_M + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= \dfrac{|0 + 2.(0) + 2.(-1) + 11|}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3.$$

Vậy $d((\alpha), (\beta)) = 3$.

Ví dụ 3. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2 ; 3 ; 4)$ và mặt phẳng (α) : $2x + 3y + z - 17 = 0$.

Giải

Xét điểm $M(0 ; 0 ; z) \in Oz$, ta có :

Điểm M cách đều điểm A và mặt phẳng (α)

$$\Leftrightarrow AM = d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow \sqrt{4+9+(z-4)^2} = \frac{|z-17|}{\sqrt{4+9+1}}$$

$$\Leftrightarrow 13 + (z-4)^2 = \frac{(z-17)^2}{14}$$

$$\Leftrightarrow 14(z^2 - 8z + 29) = z^2 - 34z + 289$$

$$\Leftrightarrow 13z^2 - 78z + 117 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3.$$

Vậy điểm $M(0 ; 0 ; 3)$ là điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.17. Viết phương trình của mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) (α) đi qua điểm $M(2 ; 0 ; 1)$ và nhận $\vec{n} = (1 ; 1 ; 1)$ làm vectơ pháp tuyến ;

b) (α) đi qua điểm $A(1 ; 0 ; 0)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{u} = (0 ; 1 ; 1)$, $\vec{v} = (-1 ; 0 ; 2)$;

c) (α) đi qua ba điểm $M(1 ; 1 ; 1)$, $N(4 ; 3 ; 2)$, $P(5 ; 2 ; 1)$.

3.18. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1 ; -2 ; 4)$, $B(3 ; 6 ; 2)$.

3.19. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5 ; 1 ; 3)$, $B(1 ; 6 ; 2)$, $C(5 ; 0 ; 4)$, $D(4 ; 0 ; 6)$.

a) Hãy viết phương trình mặt phẳng (ABC) ;

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC).

3.20. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ $O(0 ; 0 ; 0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : x + y + 2z - 7 = 0$.

3.21. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(0 ; 1 ; 0)$, $B(2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : x + 2y - z = 0$.

3.22. Xác định các giá trị của A, B để hai mặt phẳng sau đây song song với nhau :

$$(\alpha) : Ax - y + 3z + 2 = 0,$$

$$(\beta) : 2x + By + 6z + 7 = 0.$$

3.23. Tính khoảng cách từ điểm $M(1 ; 2 ; 0)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau :

a) $(\alpha) : x + 2y - 2z + 1 = 0$;

b) $(\beta) : 3x + 4z + 25 = 0$;

c) $(\gamma) : z + 5 = 0$.

3.24. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng

$$(\alpha) : 3x - y + 4z + 2 = 0,$$

$$(\beta) : 3x - y + 4z + 8 = 0.$$

3.25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Dùng phương pháp toạ độ để :

a) Chứng minh hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song ;

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

3.26. Lập phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(3 ; -1 ; -5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\beta) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0,$$

$$(\gamma) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

3.27. Cho điểm $A(2 ; 3 ; 4)$. Hãy viết phương trình của mặt phẳng (α) đi qua các hình chiếu của điểm A trên các trục toạ độ.

3.28. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi phương trình tổng quát sau đây :

a) $(\alpha_1) : 3x - 2y - 3z + 5 = 0,$

$(\alpha_1') : 9x - 6y - 9z - 5 = 0.$

b) $(\alpha_2): x - 2y + z + 3 = 0$,
$(\alpha'_2): x - 2y - z + 3 = 0$.

c) $(\alpha_3): x - y + 2z - 4 = 0$,
$(\alpha'_3): 10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

3.29. Viết phương trình của mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(2 ; -1 ; 2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z + 4 = 0$.

3.30. Lập phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1 ; 2 ; 3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ làm vectơ chỉ phương. Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ sao cho $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ làm vectơ chỉ phương. Δ có phương trình chính tắc là : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

II- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, TRÙNG NHAU, CẮT NHAU HOẶC CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt đi qua hai điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$.

Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$, ta có các điều kiện sau :

1) $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

2) $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

3) d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \end{cases}$

4) d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

5) $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}' = 0$.

III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT HOẶC VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, và cho mặt phẳng (α) có phương trình : $Ax + By + Cz + D = 0$. Gọi $\vec{n} = (A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Ta có các điều kiện sau :

1) $d \,//\, (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$

2) $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$

3) d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} \neq 0$

4) $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$.

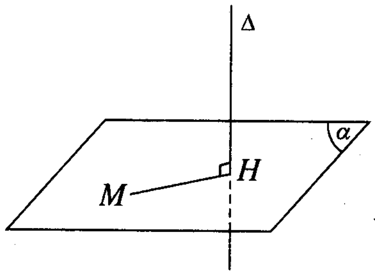
IV- TÍNH KHOẢNG CÁCH

1. Trong không gian $Oxyz$, để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta thực hiện các bước :

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ ;

* Tìm giao điểm H của Δ với (α) ;

* Khoảng cách từ M đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm M và H : $d(M, \Delta) = MH$ (h.3.9).

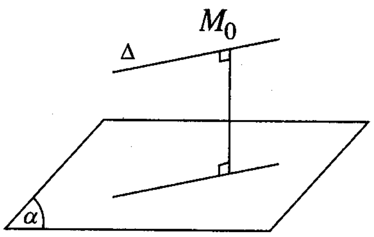


Hình 3.9

2. Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với Δ ta thực hiện các bước :

* Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tuỳ ý trên Δ ;

* Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) : $d(\Delta,(\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$ (h.3.10).



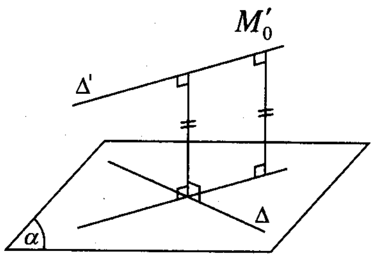
Hình 3.10

3. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' ta thực hiện các bước :

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với đường thẳng Δ' ;

* Lấy một điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ tuỳ ý trên Δ' ;

* Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến mặt phẳng (α) : $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$ (h.3.11).



Hình 3.11

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

1. Phương pháp giải

Bước 1 : Xác định một điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ.

Bước 2 : Xác định một vectơ chỉ phương $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ của Δ.

Bước 3 : Phương trình tham số và phương trình chính tắc của Δ lần lượt có dạng

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

$$\Delta : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$ (nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0).

2. Ví dụ

Ví dụ. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(3 ; 5 ; 7)$.

Giải

Δ đi qua hai điểm A và B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2 ; 3 ; 4)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

VẤN ĐỀ 2

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng Δ và Δ' trong không gian

1. Phương pháp giải

Bước 1 : Xác định điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ của Δ. Xác định điểm cố định $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a}'\,(a'_1; a'_2; a'_3)$ của Δ' (h.3.12).

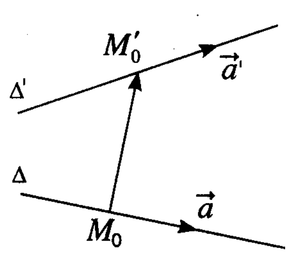
Bước 2 : Tính $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$.

Bước 3 : Dùng các dấu hiệu sau để xét vị trí tương đối giữa Δ và Δ' :

$$\Delta \,//\, \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta \text{ cắt } \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \end{cases}$$



Hình 3.12

Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ lần lượt với các đường thẳng sau

$$d_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2} \;;$$

$$d_2 : \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3} \;;$$

$$d_3 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5} \;;$$

$$d_4 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Giải

Ta có đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 \,;\, -1 \,;\, 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 \,;\, 3 \,;\, 1)$.

a) d_1 đi qua điểm $M_1(3 \,;\, 2 \,;\, 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (4 \,;\, 6 \,;\, 2)$.

Ta có $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_1 = (0 \,;\, 0 \,;\, 0) = \vec{0}$.

M_1 thuộc Δ $\left(\text{vì } \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2+1}{3} = \dfrac{6-5}{1}\right)$. Vậy $\Delta \equiv d_1$.

b) d_2 đi qua $M_2(4 ; 1 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (6 ; 9 ; 3)$.

Ta có $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_2 = (0 ; 0 ; 0) = \vec{0}$.

M_2 không thuộc Δ $\left(\text{vì } \dfrac{4-1}{2} \neq \dfrac{1+1}{3} \right)$. Vậy $\Delta \,//\, d_2$.

c) d_3 đi qua điểm $M_3(3 ; 2 ; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_3 = (4 ; 3 ; 5)$.

Ta có : $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_3 = (12 ; -6 ; -6) \neq \vec{0}$.

$\overrightarrow{M_0M_3} = (2 ; 3 ; 1)$,

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_3} = 24 - 18 - 6 = 0$.

Vậy Δ cắt d_3.

d) d_4 đi qua $M_4(1 ; -2 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_4 = (3 ; 2 ; 2)$.

Ta có : $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_4 = (4 ; -1 ; -5)$.

$\overrightarrow{M_0M_4} = (0 ; -1 ; -6)$,

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_4} = 0 + 1 + 30 \neq 0$.

Vậy Δ và d_4 là hai đường thẳng chéo nhau.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và $d' : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

a) Hãy xét vị trí tương đối giữa d và d'.

b) Tìm giao điểm nếu có của d và d'.

Giải

a) Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 3-t=1+2t' & (1) \\ 2t=-1+t' & (2) \\ -1+t=-t' & (3) \end{cases}$

Giải hệ (1) và (2) ta được : $\begin{cases} t+2t'=2 \\ 2t-t'=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=1. \end{cases}$

Các giá trị của t, t' này thoả mãn (3). Do đó hệ phương trình (I) có một nghiệm.

Vậy d cắt d'.

b) Thay $t=0$ vào phương trình tham số của d' ta được giao điểm là $M(3\,;0\,;-1)$.

VẤN ĐỀ 3

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp giải

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$, cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Gọi $\vec{n}\,(A\,;B\,;C)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta có các cách sau :

Cách 1. Xét tích vô hướng $\vec{n}.\vec{a}$ và thay toạ độ của điểm M_0 vào phương trình của (α) để kiểm tra, ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\begin{cases} \vec{n}.\vec{a}=0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d$ song song với (α)

Trường hợp 2. $\begin{cases} \vec{n}.\vec{a}=0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d$ nằm trong (α)

Trường hợp 3. $\vec{n}.\vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow d$ cắt (α)

Trường hợp 4. $\vec{n}=k\vec{a} \Leftrightarrow d$ vuông góc với (α).

Cách 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$

– Thay x, y, z ở phương trình tham số trên vào phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ ta được

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \text{ hay } mt + n = 0. \ (1)$$

Xét số nghiệm t của phương trình (1) ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1 : (1) vô nghiệm

$\Leftrightarrow d$ song song với (α).

Trường hợp 2 : (1) có một nghiệm $t = t_0$

$\Leftrightarrow d$ cắt (α) tại điểm $M_0(x_0 + t_0 a_1; y_0 + t_0 a_2; z_0 + t_0 a_3)$

Trường hợp 3 : (1) có vô số nghiệm

$\Leftrightarrow d$ nằm trong (α)

Trường hợp 4 : $(A ; B ; C) = k(a_1; a_2; a_3)$

$\Leftrightarrow d$ vuông góc với (α).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

lần lượt với các mặt phẳng sau $(\alpha_1) : x + y + z + 2 = 0$;

$(\alpha_2) : 4x + 8y + 2z - 7 = 0$;

$(\alpha_3) : x - y + 2z + 5 = 0$;

$(\alpha_4) : 2x - 2y + 4z - 10 = 0$.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; 4 ; 1)$.

Các mặt phẳng (α_1), (α_2), (α_3), (α_4) có vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1 ; 1 ; 1),\ \vec{n}_2 = (4 ; 8 ; 2),\ \vec{n}_3 = (1 ; -1 ; 2),\ \vec{n}_4 = (2 ; -2 ; 4).$$

Ta có :

a) $\vec{n}_1.\vec{a} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$. Vậy đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α_1).

b) $\vec{n}_2 = 2\vec{a}$. Vậy đường thẳng Δ vuông góc với (α_2).

c) $\begin{cases} \vec{n}_3.\vec{a} = 2-4+2=0 \\ M_0 \notin (\alpha_3) \text{ (vì } 1-(2)+2.(3)+5 \neq 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng Δ song song với (α_3).

d) $\begin{cases} \vec{n}_4.\vec{a} = 4-8+4=0 \\ M_0 \in (\alpha_4) \text{ (vì } 2.(1)-2.(2)+4.(3)-10=0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α_4).

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$

và mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y + z - 1 = 0$.

Chứng minh rằng d cắt (α) và tìm toạ độ giao điểm.

Giải

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -t. \end{cases}$

Thay x, y, z ở phương trình trên vào phương trình tổng quát của (α) ta được :

$(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$.

Phương trình (1) có một nghiệm $t_0 = \dfrac{2}{3}$, vậy d cắt (α) tại điểm

$$M_0\left(1+\frac{4}{3}\,;-1+\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\right) \text{ hay } M_0\left(\frac{7}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right).$$

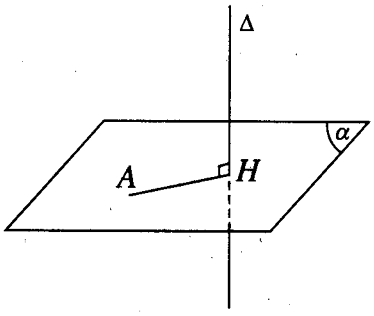
VẤN ĐỀ 4

Tính khoảng cách

1. Phương pháp giải

Loại 1. Khoảng cách từ điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ đến đường thẳng Δ :

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$



Hình 3.13

Cách 1

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với Δ

* Tìm giao điểm H của Δ và (α)

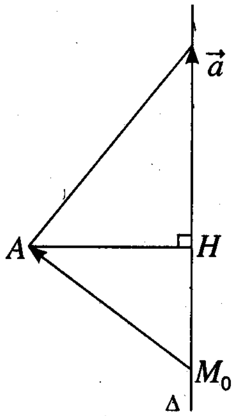
* Tính $d(A, \Delta) = AH$ (h.3.13).

Cách 2

* Lấy điểm $M_0 \in \Delta$

* Tính $\vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a}$

* $d(A, \Delta) = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|}$ (h.3.14).



Hình 3.14

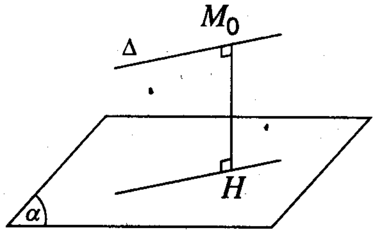
Loại 2. Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ và mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ song song với Δ

Cách giải

* Lấy điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ

* Tính $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ (h.3.15).}$$



Hình 3.15

Loại 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$$\Delta : \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

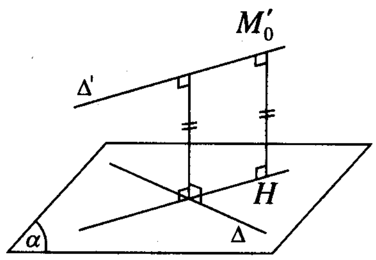
$$\Delta' : \frac{x-x'_0}{a'_1} = \frac{y-y'_0}{a'_2} = \frac{z-z'_0}{a'_3}$$

Cách 1

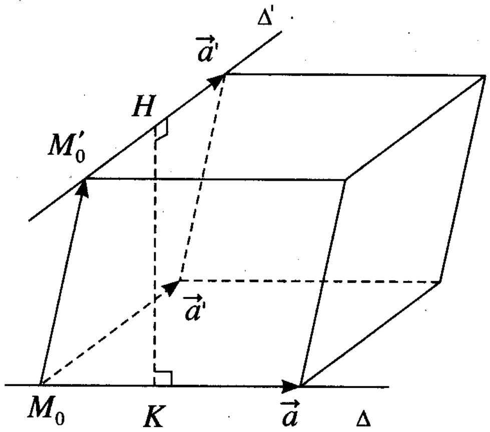
* Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' ta được $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$.

* Lấy điểm $M'_0(x'_0 ; y'_0 ; z'_0)$ thuộc Δ'.

* Tính $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \dfrac{|Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (h.3.16).



Hình 3.16



Hình 3.17

Cách 2

* Xác định điểm $M_0 \in \Delta$ và $M'_0 \in \Delta'$.

* Xác định hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ là hai vectơ chỉ phương của Δ và Δ'.

* Tính $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$.

* Tính $V = \left|\overrightarrow{M_0M'_0}.\vec{n}\right|$.

* Tính $d(\Delta, \Delta') = HK = \dfrac{V}{|\vec{n}|}$ (h.3.17).

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ điểm $A(1\,;2\,;1)$ đến đường thẳng Δ :

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}.$$

Giải

Cách 1

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với Δ.

Ta có $\vec{n}_\alpha=\vec{a}_\Delta=(1\,;2\,;-2)$.

Vậy phương trình của (α) là $1(x-1)+2(y-2)-2(z-1)=0$

hay $x+2y-2z-3=0$.

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=-2+t\\ y=1+2t\\ z=-1-2t,\end{cases}$

thay x, y, z ở trên vào phương trình (α) ta được :

$$(-2+t)+2(1+2t)-2(-1-2t)-3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 9t-1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad t=\frac{1}{9}.$$

Vậy (α) cắt Δ tại điểm $H\left(-2+\frac{1}{9}\,;\,1+\frac{2}{9}\,;-1-\frac{2}{9}\right)$ hay $H\left(-\frac{17}{9};\frac{11}{9};\frac{-11}{9}\right)$.

Ta có $d(A,\ \Delta)=AH=\sqrt{\left(-\frac{17}{9}-1\right)^2+\left(\frac{11}{9}-2\right)^2+\left(-\frac{11}{9}-1\right)^2}$

$$=\frac{15\sqrt{5}}{9}=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Cách 2

* Δ đi qua $M_0(-2\,;1\,;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1\,;2\,;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0A} = (3 ; 1 ; 2)$.

* $\vec{n} = \overrightarrow{M_0A} \wedge \vec{a} = (-6 ; 8 ; 5)$.

* Vậy $d(A, \Delta) = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{36+64+25}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng Δ :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}.$$

a) Hãy chứng tỏ Δ song song với (α).

b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α).

Giải

a) Ta có $\vec{n}_\alpha = (3 ; -2 ; -1)$

$\vec{a}_\Delta = (2 ; 1 ; 4)$,

Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 7 ; 3)$.

Ta có $\vec{n}_\alpha . \vec{a}_\Delta = 6 - 2 - 4 = 0$ và $M_0 \notin (\alpha)$. Vậy Δ song song với (α).

b) $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|3.(1) - 2.(7) - (3) + 5|}{\sqrt{9+4+1}} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$.

Ví dụ 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Giải

Cách 1

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ'. Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là : $\vec{a} = (2 ; -1 ; 0)$ và $\vec{a}' = (-1 ; 1 ; 1)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1 ; -2 ; 1)$.

Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm $M_0(1 ; -1 ; 1)$. Phương trình (α) có dạng $-(x-1) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$.

Δ' đi qua điểm $M'_0(2\,;-2\,;3)$.

Vậy $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \dfrac{|2-4-3+2|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2

Ta có $\quad \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1\,;-2\,;1)$

$\overrightarrow{M_0M'_0} = (1\,;-1\,;2)$,

$V = \left|\overrightarrow{M_0M'_0}.\vec{n}\right| = |-1+2+2| = 3$.

Vậy $d(\Delta, \Delta') = \dfrac{V}{|\vec{n}|} = \dfrac{3}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.31. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $A(1\,;2\,;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3\,;3\,;1)$;

b) Δ đi qua điểm $B(1\,;0\,;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) :

$$2x - y + z + 9 = 0\,;$$

c) Δ đi qua hai điểm $C(1\,;-1\,;1)$ và $D(2\,;1\,;4)$.

3.32. Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha) : y + 2z = 0$

và cắt hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4. \end{cases}$

3.33. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau :

a) $d : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ $\quad$ và $\quad d' : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{2}$;

b) $d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ $\quad$ và $\quad d' : \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \\ z = 10 - 2t' \end{cases}$;

c) $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5t. \end{cases}$

3.34. Tìm a để hai đường thẳng sau đây song song

$$d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

3.35. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $(\alpha): x + 2y + z - 3 = 0$;

b) $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $(\alpha): x + z + 5 = 0$;

c) $d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + z - 6 = 0.$

3.36. Tính khoảng cách từ điểm $A(1 ; 0 ; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

3.37. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0.$

a) Chứng minh rằng Δ song song với (α).

b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α).

3.38. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng Δ và Δ' trong các trường hợp sau :

a) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases}$;

b) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta' : \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t'. \end{cases}$;

3.39. Cho hai đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$,

$$\Delta' : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

a) Xét vị trí tương đối giữa Δ và Δ' ;

b) Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'.

3.40. Cho điểm $M(2 ; -1 ; 1)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ ;

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng Δ.

3.41. Cho điểm $M(1 ; -1 ; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 12 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) ;

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

3.42. Cho hai đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1. \end{cases}$$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

3.43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Bằng phương pháp toạ độ hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD'.

3.44. Cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x + y + z - 1 = 0$

và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$.

Gọi M là giao điểm của d và (α), hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với d và nằm trong (α).

3.45. Cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 7+3t \\ y = 2+2t \\ z = 1-2t. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình của (α).

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.46. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{4}$

và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t. \end{cases}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2.

b) Cho điểm $M(2 ; 1 ; 4)$. Tìm toạ độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

3.47. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; a ; 0)$, $A'(0 ; 0 ; b)$ với $a > 0$ và $b > 0$. Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

Xác định tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

3.48 Cho hai điểm $A(2 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0 ; 6 ; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

3.49. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $x + 3ky - z + 2 = 0$ (β)

và $kx - y + z + 1 = 0$ (γ).

Tìm k để giao tuyến của (β) và (γ) vuông góc với mặt phẳng

$$(\alpha) : x - y - 2z + 5 = 0.$$

3.50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-4\ ;\ -2\ ;\ 4)$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

3.51. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

3.52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$, AC cắt BD tại gốc toạ độ O. Biết $A(2\ ;\ 0;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1;\ 0)$, $S(0\ ;\ 0\ ;\ 2\sqrt{2}\,)$. Gọi M là trung điểm cạnh SC.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa SA và song song với BM.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

3.53. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $D(-3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ và mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 11)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 10)$, $C(1\ ;\ 1\ ;\ 8)$.

a) Viết phương trình đường thẳng AC.

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).

c) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm D, bán kính $r = 5$. Chứng minh mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

3.54. Cho mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

a) Xác định toạ độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).

b) Tính khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P). Từ đó chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà ta kí hiệu là (C). Xác định bán kính r' và tâm H của đường tròn (C).

3.55. Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát : $2x + y - z - 6 = 0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua O và song song với (α).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và vuông góc với mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng (α).

3.56. Cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh là $A(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$, $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ và đỉnh D đối xứng với O qua tâm hình hộp chữ nhật.

a) Xác định toạ độ đỉnh D. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABD).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABD).

3.57. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(6\ ;\ -2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 6)$, $C(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $D(4\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Hãy viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

3.58. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $C\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

a) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua O và vuông góc với OC.

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa AB và vuông góc với (α).

3.59. Trong không gian $Oxyz$ cho 4 điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ và $D(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

b) Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (ACD).

3.60. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(2\ ;\ 4\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 4\ ;\ -1)$, $C(2\ ;\ 4\ ;\ 3)$, $D\ (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng AB và CD.

c) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

d) Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.61. Cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $E(4 ; -1 ; 1)$, $F(3 ; 1 ; -1)$ và song song với trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của (α) ?

(A) $x + y = 0$;
(B) $y + z = 0$;
(C) $x + y + z = 0$;
(D) $x + z = 0$.

3.62. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : x - 4y + z + 12 = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình của (α) ?

(A) $x - 4y + z + 4 = 0$;
(B) $x - 4y + z - 4 = 0$;
(C) $x - 4y + z - 12 = 0$;
(D) $x - 4y + z + 3 = 0$.

3.63. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2 ; 6 ; -3)$ và các mặt phẳng :

$$(\alpha) : x - 2 = 0$$
$$(\beta) : y - 6 = 0$$
$$(\gamma) : z + 3 = 0.$$

Tìm mệnh đề *sai* trong các mệnh đề sau :

(A) (α) đi qua I ;
(B) $(\beta) // (xOz)$;
(C) $(\gamma) // Oz$;
(D) $(\alpha) \perp (\beta)$.

3.64. Phương trình của mặt phẳng chứa trục Oy và điểm $Q(1 ; 4 ; -3)$ là :

(A) $3x + z = 0$;
(B) $x + 3z = 0$;
(C) $3x + y = 0$;
(D) $3x - z = 0$.

3.65. Cho mặt phẳng $(\alpha) : 2y + z = 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) $(\alpha) // Ox$;
(B) $(\alpha) // Oy$;
(C) $(\alpha) // (yOz)$;
(D) $(\alpha) \supset Ox$.

3.66. Cho ba điểm $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(-1 ; 0 ; 4)$, $C(0 ; -2 ; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng BC ?

(A) $x - 2y - 5z + 5 = 0$;
(B) $x - 2y - 5z - 5 = 0$;
(C) $x - 2y - 5z = 0$;
(D) $2x - y + 5z - 5 = 0$.

3.67. Gọi (γ) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3\ ;-1\ ;-5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng : $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$,

$(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$

Phương trình tổng quát của (γ) là :

(A) $2x + y - 2z - 15 = 0$; (C) $x + y + z + 3 = 0$;

(B) $2x + y - 2z + 15 = 0$; (D) $2x + y - 2z - 16 = 0$.

3.68. Cho đường thẳng d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

(A) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$; (C) $x - 2 = y = z + 3$;

(B) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{5}$; (D) $x + 2 = y = z - 3$.

3.69. Cho đường thẳng d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

(A) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; (C) $2x + y + z - 5 = 0$;

(B) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$; (D) $x + y + z - 3 = 0$.

3.70. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1\ ;2\ ;-3)$ và $B(3\ ;-1\ ;1)$?

(A) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$; (C) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{4}$;

(B) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$; (D) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$.

3.71. Toạ độ giao điểm M của đường thẳng $d : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ là :

(A) $(1\ ;0\ ;1)$; (B) $(0\ ;0\ ;-2)$; (C) $(1\ ;1\ ;6)$; (D) $(12\ ;9\ ;1)$.

3.72. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

(A) $d \parallel (\alpha)$; (B) d cắt (α) ; (C) $d \subset (\alpha)$; (D) $d \perp (\alpha)$.

3.73. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

(A) d cắt (α) ; (B) $d \parallel (\alpha)$; (C) $d \subset (\alpha)$; (D) $d \perp (\alpha)$.

3.74. Hãy tìm kết luận đúng về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng :

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

(A) d cắt d' ;

(B) $d \equiv d'$;

(C) d chéo với d' ;

(D) $d \parallel d'$.

3.75. Giao điểm của hai đường thẳng :

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t'. \end{cases} \quad \text{là :}$$

(A) $(-3 ; -2 ; 6)$;

(B) $(5 ; -1 ; 20)$;

(C) $(3 ; 7 ; 18)$;

(D) $(3 ; -2 ; 1)$.

3.76. Tìm m để hai đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

(A) $m = 0$; (B) $m = 1$; (C) $m = -1$; (D) $m = 2$.

3.77. Khoảng cách từ điểm $M(-2 ; -4 ; 3)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$ là :

(A) 3 ; (B) 2 ; (C) 1 ; (D) 11.

3.78. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2 ; -1 ; -1)$ đến mặt phẳng (α) : $16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Độ dài của đoạn AH là :

(A) 55 ; (B) $\frac{11}{5}$; (C) $\frac{11}{25}$; (D) $\frac{22}{5}$.

3.79. Cho mặt cầu tâm $I(4 ; 2 ; -2)$ bán kính r tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : 12x - 5z - 19 = 0$. Bán kính r bằng :

(A) 39 ; (B) 3 ; (C) 13 ; (D) $\frac{39}{\sqrt{13}}$.

3.80. Cho hai mặt phẳng song song :

$$(\alpha) : x + y - z + 5 = 0$$

và $$(\beta) : 2x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Khoảng cách giữa (α) và (β) là :

(A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; (B) 2 ; (C) $\frac{7}{2}$; (D) $\frac{7}{2\sqrt{3}}$.

3.81. Khoảng cách từ điểm $M(2 ; 0 ; 1)$ đến đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ là :

(A) $\sqrt{12}$; (B) $\sqrt{3}$; (C) $\sqrt{2}$; (D) $\frac{12}{\sqrt{6}}$.

3.82. Bán kính của mặt cầu tâm $I(1 ; 3 ; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$ là :

(A) $\sqrt{14}$; (B) 14 ; (C) $\sqrt{7}$; (D) 7.

3.83. Khoảng cách giữa hai đường thẳng :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$ là :

(A) $\sqrt{6}$; (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (C) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; (D) $\sqrt{2}$.

3.84. Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2 ; 0 ; 1)$ trên đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{là :}$$

(A) $(1 ; 0 ; 2)$; (B) $(2 ; 2 ; 3)$; (C) $(0 ; -2 ; 1)$; (D) $(-1 ; -4 ; 0)$.

3.85. Cho mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y - z + 5 = 0$

và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α). Khoảng cách giữa (α) và (β) là :

(A) $\dfrac{9}{14}$; (B) $\dfrac{9}{\sqrt{14}}$; (C) $\dfrac{3}{14}$; (D) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

3.1. $\vec{m} = (-4 ; -2 ; 3)$,

$\vec{n} = (-9 ; 2 ; 1)$.

3.2. a) Ta biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là một số thực. Theo giả thiết ta có $\vec{b} = (x_0 ; y_0 ; z_0)$ với $x_0 = 2$. Ta suy ra $k = \dfrac{1}{2}$ nghĩa là $1 = \dfrac{1}{2}x_0$.

Do đó : $-3 = \dfrac{1}{2}y_0$ nên $y_0 = -6$,

$4 = \dfrac{1}{2}z_0$ nên $z_0 = 8$.

Vậy ta có $\vec{b} = (2 ; -6 ; 8)$.

b) Theo giả thiết ta có $\vec{c} = -2\vec{a}$.

Do đó toạ độ của $\vec{c}$ là : $\vec{c} = (-2 ; 6 ; -8)$.

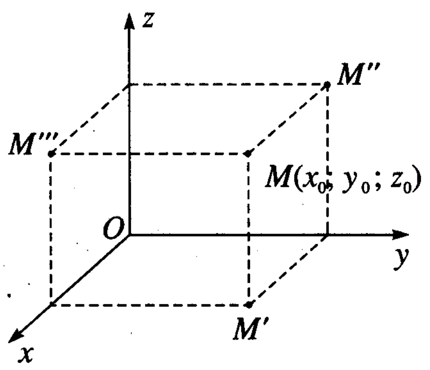
3.3. Gọi M', M'', M''' lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) (h.3.18).

Ta có :

$M'(x_0 ; y_0 ; 0)$

$M''(0 ; y_0 ; z_0)$

$M'''(x_0 ; 0 ; z_0)$.



Hình 3.18

3.4. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1 ; -3 ; 0)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ với k là một số thực.

Giả sử ta có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, khi đó : $\begin{cases} k.(-1) = -1 \\ k.(-3) = -2 \\ k.(0) = 1. \end{cases}$

Ta không tìm được số k nào thoả mãn đồng thời cả ba đẳng thức trên. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-5 ; 2 ; 0)$ và $\overrightarrow{MP} = (-10 ; 4 ; 0)$. Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$ với $k = \frac{1}{2}$ nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.

3.5. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) có toạ độ là $(x ; 0 ; z)$, cần phải tìm x và z. Ta có :

$$MA^2 = (1-x)^2 + 1 + (1-z)^2$$
$$MB^2 = (-1-x)^2 + 1 + z^2$$
$$MC^2 = (3-x)^2 + 1 + (-1-z)^2.$$

Theo giả thiết M cách đều ba điểm A, B, C nên ta có $MA^2 = MB^2 = MC^2$.

Từ đó ta tính được $M = \left(\frac{5}{6} ; 0 ; -\frac{7}{6}\right)$.

3.6. a) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Do đó : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ vì $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$.

b) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ nên : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

Do đó : $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DB}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

3.7. a) Ta có $MPNQ$ là hình bình hành vì $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$ hay $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. (1)

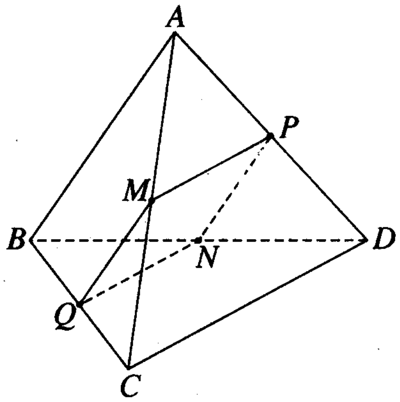
Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (2)

vì $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$ (h.3.19).

Từ (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$ là đẳng thức cần chứng minh.



Hình 3.19

b) Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$.

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. (3)

Mặt khác : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ (4)

vì $\overrightarrow{CB} - (-\overrightarrow{BC}) = \vec{0}$.

Từ (3) và (4) ta suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$ là đẳng thức cần chứng minh.

3.8. Muốn chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng ta cần tìm hai số thực p và q sao cho $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$.

Giả sử có $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$

$$2\vec{c} - 3\vec{a} = p(\vec{a} - 2\vec{b}) + q(3\vec{b} - \vec{c})$$

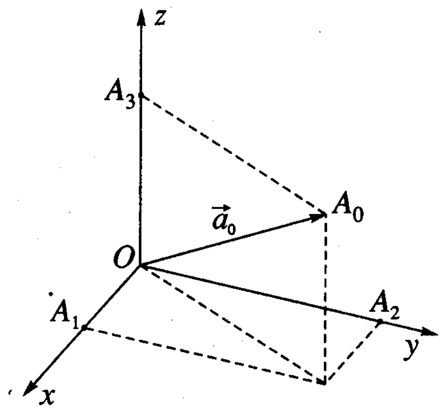
$$\Leftrightarrow (3 + p)\vec{a} + (3q - 2p)\vec{b} - (q + 2)\vec{c} = \vec{0} \quad (1)$$

Vì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lấy tuỳ ý nên đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 + p = 0 \\ 3q - 2p = 0 \\ q + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = -2. \end{cases}$$

Như vậy ta có : $\vec{w} = -3\vec{u} - 2\vec{v}$ nên ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

3.9. Gọi $\vec{a}_0$ là vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (h.3.20).



Hình 3.20

Gọi $\overrightarrow{OA_0} = \vec{a}_0$ và các điểm A_1, A_2, A_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm A_0 trên các trục Ox, Oy, Oz.

Khi đó ta có : $\frac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA_0}|} = \cos\alpha$, $\frac{|\overrightarrow{OA_2}|}{|\overrightarrow{OA_0}|} = \cos\beta$,

$\frac{|\overrightarrow{OA_3}|}{|\overrightarrow{OA_0}|} = \cos\gamma$.

Vì $|\overrightarrow{OA_0}| = 1$ nên $|\overrightarrow{OA_1}| = \cos\alpha$, $|\overrightarrow{OA_2}| = \cos\beta$, $|\overrightarrow{OA_3}| = \cos\gamma$.

Ta có $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$, ta suy ra : $\overrightarrow{OA_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$

hay $\overrightarrow{OA_0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Vì $\overrightarrow{OA_0} = \vec{a}_0$ mà $|\vec{a}_0| = 1$ nên ta có : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3.10. a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (1)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ (3)

Lấy (1) + (2) + (3) ta có hệ thức cần chứng minh là :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

b) Từ hệ thức trên ta suy ra định lí : "Nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, nghĩa là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ thì $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ và do đó $AD \perp BC$."

3.11. a) $\vec{a}.\vec{b} = 6(1 - c)$; b) $\vec{a}.\vec{b} = -21$; c) $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

3.12. a) $|\overrightarrow{AB}| = 3$; b) $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

3.13. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0)$

và $\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c)$.

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$ nên góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

Lập luận tương tự ta chứng minh được các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cũng là góc nhọn.

3.14. a) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$;

b) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=36$;

c) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$.

3.15. a) Tâm $I(3\,;-1\,;8)$, bán kính $r=10$;

b) Tâm $I(-2\,;1\,;3)$, bán kính $r=8$.

3.16. Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì $A\in(S)$ nên ta có : $1-2a+d=0$ (1)

$B\in(S)$ nên ta có : $4+4b+d=0$ (2)

$C\in(S)$ nên ta có : $16-8c+d=0$ (3)

$O\in(S)$ nên ta có : $d=0$ (4)

Giải hệ 4 phương trình trên ta có : $d=0,\ a=\dfrac{1}{2},\ b=-1,\ c=2$.

Vậy mặt cầu (S) cần tìm có phương trình là : $x^2+y^2+z^2-x+2y-4z=0$.

Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-\frac{1}{4}-1-4=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{21}{4}.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I\left(\dfrac{1}{2}\,;-1\,;2\right)$ và có bán kính $r=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

3.17. a) Phương trình (α) có dạng : $(x-2)+(y)+(z-1)=0$ hay $x+y+z-3=0$.

b) Hai vectơ có giá song song với mặt phẳng (α) là : $\vec{u}=(0\,;1\,;1)$ và $\vec{v}=(-1\,;0\,;2)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=(2\,;-1\,;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1\,;0\,;0)$ và nhận $\vec{n}=(2\,;-1\,;1)$ là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của (α) là : $2(x-1)-y+z=0$ hay $2x-y+z-2=0$.

c) Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là : $\overrightarrow{MN}=(3\,;2\,;1)$

và $\overrightarrow{MP}=(4\,;1\,;0)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}=(-1\,;4\,;-5)$.

Vậy phương trình của (α) là : $-1(x-1)+4(y-1)-5(z-1)=0$ hay $x-4y+5z-2=0$.

3.18. Đoạn thẳng AB có trung điểm là $I(2 ; 2 ; 3)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua I và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IB} = (1 ; 4 ; -1)$.
Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là :

$$1(x-2) + 4(y-2) - 1(z-3) = 0 \text{ hay } x + 4y - z - 7 = 0.$$

3.19. a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-4 ; 5 ; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0 ; -1 ; 1)$, suy ra $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4 ; 4 ; 4)$.

Do đó (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4 ; 4 ; 4)$ hoặc $\vec{n}' = (1 ; 1 ; 1)$.

Suy ra phương trình của (ABC) là : $(x-5) + (y-1) + (z-3) = 0$ hay $x + y + z - 9 = 0$.

b) Mặt phẳng (α) đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) nên (α) cũng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}' = (1 ; 1 ; 1)$.

Vậy phương trình của (α) là : $(x-4) + (y) + (z-6) = 0$ hay $x + y + z - 10 = 0$.

3.20. Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta) : x + y + 2z - 7 = 0$.

Vậy phương trình của (α) có dạng : $x + y + 2z + D = 0$.

(α) đi qua gốc toạ độ $O(0 ; 0 ; 0)$ suy ra $D = 0$.

Vậy phương trình của (α) là $x + y + 2z = 0$.

3.21. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : x + 2y - z = 0$.

Vậy hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2 ; 1)$ và $\vec{n}_\beta = (1 ; 2 ; -1)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến là : $\vec{n}_\alpha = (-4 ; 3 ; 2)$.

Vậy phương trình của (α) là : $-4(x) + 3(y-1) + 2(z) = 0$ hay $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

3.22. $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \dfrac{A}{2} = \dfrac{-1}{B} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2. \end{cases}$

3.23. a) $d(M, (\alpha)) = \dfrac{|1+4+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{6}{3} = 2.$

b) $d(M, (\beta)) = \dfrac{|3+25|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{28}{5}.$

c) $d(M, (\gamma)) = \dfrac{|5|}{\sqrt{1}} = 5.$

3.24. Xét điểm $M(x ; y ; z)$. Ta có : M cách đều hai mặt phẳng (α) và (β)

$$\Leftrightarrow d(M, (\alpha)) = d(M, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|3x - y + 4z + 2|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{|3x - y + 4z + 8|}{\sqrt{9+1+16}}$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 4z + 5 = 0.$$

3.25. Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có toạ độ là :

$A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$,
$B'(1 ; 0 ; 1)$, $D'(0 ; 1 ; 1)$, $C'(1 ; 1 ; 1)$.

a) Phương trình của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ là : $x + y - z = 0$ và $x + y - z - 1 = 0$.

Ta có : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$. Vậy $(AB'D') \,//\, (BC'D)$.

b) $d((AB'D'), (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.26. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (β) và (γ), do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là $\vec{n}_\beta = (3 ; -2 ; 2)$ và $\vec{n}_\gamma = (5 ; -4 ; 3)$

Suy ra $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (2 ; 1 ; -2)$.

Mặt khác (α) đi qua điểm $M(3 ; -1 ; -5)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$, vậy phương trình của (α) là : $2(x - 3) + 1(y + 1) - 2(z + 5) = 0$ hay $2x + y - 2z - 15 = 0$.

3.27. Hình chiếu của điểm $A(2 ; 3 ; 4)$ lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $B(2 ; 0 ; 0)$, $C(0 ; 3 ; 0)$, $D(0 ; 0 ; 4)$. Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm B, C, D nên (α) có phương trình theo đoạn chắn là : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ hay $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

3.28. a) $(\alpha_1) \,//\, (\alpha'_1)$; b) (α_2) cắt (α'_2) ; c) (α_3) trùng với (α'_3).

3.29. Mặt phẳng (β) song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 3z + 4 = 0$, do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (β) là : $\vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$ và $\vec{n}_\alpha = (2 ; -1 ; 3)$.

Suy ra (β) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = \vec{j} \wedge \vec{n}_\alpha = (3 ; 0 ; -2)$.

Mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(2 ; -1 ; 2)$ có vectơ pháp tuyến là : $\vec{n}_\beta = (3 ; 0 ; -2)$.

Vậy phương trình của (β) là : $3(x - 2) - 2(z - 2) = 0$ hay $3x - 2z - 2 = 0$.

3.30. Gọi giao điểm của (α) với ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ $(a, b, c > 0)$.

Mặt phẳng (α) có phương trình theo đoạn chắn là : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (1)

Do (α) đi qua $M(1 ; 2 ; 3)$ nên ta thay toạ độ của điểm M vào (1) : $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Thể tích của tứ diện $OABC$ là $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có : $1 = \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc}$

$$\Rightarrow abc \geq 27.6 \Rightarrow V \geq 27.$$

Ta có : V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9. \end{cases}$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) thoả mãn đề bài là :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9} = 1 \text{ hay } 6x+3y+2z-18 = 0.$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.31. a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3 ; 3 ; 1)$ là :

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \\ z = 3+t. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$.

b) $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_\alpha = (2 ; -1 ; 1)$

Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -1+t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

c) Δ đi qua hai điểm C và D nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CD} = (1 ; 2 ; 3)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1+3t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

3.32. Gọi A và B lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với (α). Đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng AB (h.3.21).

Ta có $A(1-t\,;t\,;4t) \in d_1$

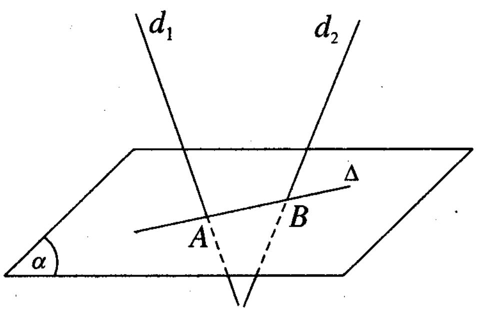
$A \in (\alpha) \Leftrightarrow t + 4.(2t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

Suy ra $A(1\,;0\,;0)$.

Ta có $B(2-t'\,;4+2t'\,;4) \in d_2$

$B \in (\alpha) \Leftrightarrow 4 + 2t' + 8 = 0 \Leftrightarrow t' = -6.$

Suy ra $B(8\,;-8\,;4)$.



Hình 3.21

Δ đi qua A, B nên có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (7\,;-8\,;4)$.

Phương trình chính tắc của Δ là : $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y}{-8} = \dfrac{z}{4}$.

3.33. a) Ta có $\vec{a}_d = (1\,;2\,;3)$ và $\vec{a}_{d'} = (3\,;2\,;2)$.

Suy ra $\vec{n} = \vec{a}_d \wedge \vec{a}_{d'} = (-2\,;7\,;-4)$.

Ta có $M_0(-1\,;1\,;-2) \in d$, $M_0'(1\,;5\,;4) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M_0'} = (2\,;4\,;6)$.

Ta có $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} = -4 + 28 - 24 = 0$. Vậy đường thẳng d và d' đồng phẳng và khác phương, nên d và d' cắt nhau.

b) Ta có $\vec{a}_d = (1\,;1\,;-1)$ và $\vec{a}_{d'} = (2\,;2\,;-2)$, $M_0(0\,;1\,;2) \in d$.

Vì $\begin{cases} \vec{a}_{d'} = 2\vec{a}_d \\ M_0 \notin d' \text{ (toạ độ } M_0 \text{ không thoả mãn } d') \end{cases}$

nên hai đường thẳng d và d' song song.

c) d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (-1\,;3\,;-2)$,

d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}_{d'} = (0\,;0\,;5)$.

Gọi $\vec{n} = \vec{a}_d \wedge \vec{a}_{d'} = (15\,;5\,;0) \neq \vec{0}$.

Ta có $M_0(0\,;0\,;-1) \in d$

$M_0'(0\,;9\,;0) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M_0'} = (0\,;9\,;1)$, $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M_0'} = 45 \neq 0$.

Vậy d và d' là hai đường thẳng chéo nhau.

3.34. Ta có $\vec{a}_d = (1\,;a\,;-1)$ và $\vec{a}_{d'} = (2\,;4\,;-2)$

$$d\,//\,d' \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{4} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow a = 2.$$

Khi đó $M'_0(1\,;2\,;2)$ thuộc d' và M'_0 không thuộc d. Vậy $d\,//\,d' \Leftrightarrow a = 2$.

3.35. a) Thay x, y, z trong phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) ta được : $t + 2(1+2t) + (1-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại $M_0(0\,;1\,;1)$.

b) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d vào phương trình tổng quát của (α) ta được : $(2-t) + (2+t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = -9$.

Phương trình vô nghiệm, vậy đường thẳng d song song với (α).

c) Thay x, y, z trong phương trình tham số của d vào phương trình tổng quát của (α) ta được : $(3-t) + (2-t) + (1+2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$.

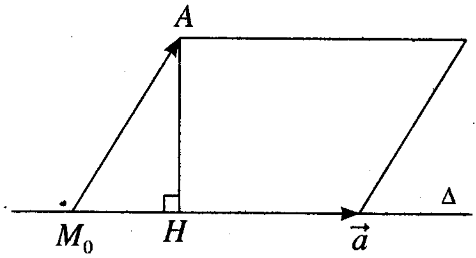
Phương trình luôn thoả mãn với mọi t. Vậy d chứa trong (α).

3.36. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1\,;0\,;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2\,;2\,;1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_0A} = (0\,;0\,;1)$,

$\vec{n} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{M_0A} = (2\,;-2\,;0)$.

$$d(A,\ \Delta) = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4+4+0}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



Hình 3.22

Vậy khoảng cách từ điểm A đến Δ là $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (h.3.22).

3.37. a) Ta có : $\vec{a}_\Delta = (2\,;3\,;2)$ và $\vec{n}_\alpha = (2\,;-2\,;1)$

$$\vec{a}_\Delta . \vec{n}_\alpha = 4 - 6 + 2 = 0 \qquad (1)$$

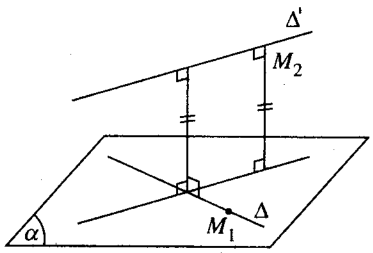
Xét điểm $M_0(-3\,;-1\,;-1)$ thuộc Δ, ta thấy toạ độ M_0 không thoả mãn phương trình của (α). Vậy $M_0 \notin (\alpha)$ $\qquad$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta\,//\,(\alpha)$.

b) $d(\Delta,\ (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \dfrac{|2.(-3) - 2.(-1) + (-1) + 3|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) là $\dfrac{2}{3}$.

3.38. a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ'. Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là : $\vec{a} = (1 ; -1 ; 0)$ và $\vec{a}' = (-1 ; 1 ; 1)$. Suy ra $\vec{n}_\alpha = (-1 ; -1 ; 0)$ (h.3.23).



Hình 3.23

(α) đi qua điểm $M_1(1 ; -1 ; 1)$ thuộc Δ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'_\alpha = (1 ; 1 ; 0)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) có dạng $x - 1 + y + 1 = 0$ hay $x + y = 0$.

Ta có : $M_2(2 ; 2 ; 0)$ thuộc đường thẳng Δ'.

$$d(\Delta , \Delta') = d(M_2, (\alpha)) = \frac{|2+2|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}.$$

b) Hai đường thẳng Δ và Δ' có phương trình là $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta' : \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t'. \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ và song song với Δ' là $9x + 5y - 2z - 22 = 0$.

Lấy điểm $M'(0 ; 2 ; 0)$ trên Δ'.

Ta có $d(\Delta , \Delta') = d(M', (\alpha)) = \dfrac{|5.(2) - 22|}{\sqrt{81 + 25 + 4}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

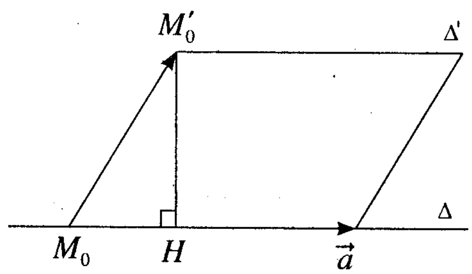
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là $\dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

3.39. a) Δ đi qua điểm $M_0(1 ; -3 ; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; 1 ; -2)$

Δ' đi qua điểm $M'_0(-2 ; 1 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (-4 ; -2 ; 4)$.

Ta có $\begin{cases} \vec{a}' = -2\vec{a} \\ M_0 \notin \Delta'. \end{cases}$

Vậy Δ' song song với Δ (h.3.24).



Hình 3.24

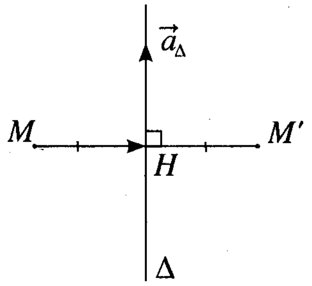
b) Ta có $\overrightarrow{M_0M'_0} = (-3 ; 4 ; -5)$

$\vec{a} = (2 ; 1 ; -2)$.

$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{a} = (-3 ; -16 ; -11)$.

$$d(\Delta , \Delta') = M'_0H = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{9 + 256 + 121}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{386}}{3}.$$

3.40. a) Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t. \end{cases}$



Hình 3.25

Xét điểm $H(1 + 2t\,;\ -1 - t\,;\ 2t) \in \Delta$.

Ta có $\overrightarrow{MH} = (2t - 1\,;\ -t\,;\ 2t - 1)$

$\vec{a}_\Delta = (2\,;\ -1\,;\ 2)$.

H là hình chiếu vuông góc của M trên $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}_\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 2(2t - 1) + t + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{9}$ (h.3.25).

Ta suy ra toạ độ điểm $H\left(\dfrac{17}{9}\,;\ \dfrac{-13}{9}\,;\ \dfrac{8}{9}\right)$.

b) H là trung điểm của MM', suy ra $x_{M'} + x_M = 2x_H$.

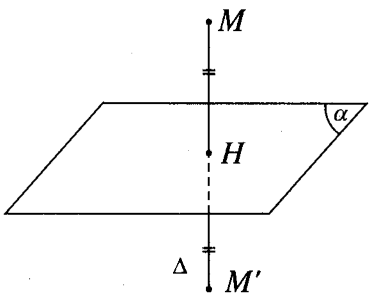
Suy ra $x_{M'} = 2x_H - x_M = \dfrac{34}{9} - 2 = \dfrac{16}{9}$.

Tương tự, ta được $y_{M'} = 2y_H - y_M = \dfrac{-26}{9} + 1 = \dfrac{-17}{9}$, $z_{M'} = 2z_H - z_M = \dfrac{16}{9} - 1 = \dfrac{7}{9}$.

Vậy $M'\left(\dfrac{16}{9}\,;\ \dfrac{-17}{9}\,;\ \dfrac{7}{9}\right)$.

3.41. a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1\,;\ -1\,;\ 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 12 = 0$ là

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$



Hình 3.26

Xét điểm $H(1 + 2t\,;\ -1 - t\,;\ 2 + 2t) \in \Delta$ (h.3.26).

Ta có $H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + (1 + t) + 2(2 + 2t) + 12 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-19}{9}$.

Vậy ta được $H\left(\dfrac{-29}{9}\,;\ \dfrac{10}{9}\,;\ \dfrac{-20}{9}\right)$.

b) H là trung điểm của MM', suy ra $x_{M'} = 2x_H - x_M = \dfrac{-58}{9} - 1 = \dfrac{-67}{9}$

$$y_{M'} = 2y_H - y_M = \frac{20}{9} + 1 = \frac{29}{9}$$

$$z_{M'} = 2z_H - z_M = \frac{-40}{9} - 2 = \frac{-58}{9}.$$

Vậy ta được $M'\left(\frac{-67}{9}\,;\frac{29}{9}\,;\,\frac{-58}{9}\right)$.

3.42. Phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d và d' lần lượt là $\vec{a} = (-1\,;2\,;3)$, $\vec{a}' = (1\,;-2\,;0)$.

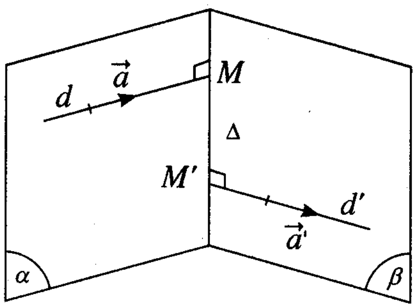
Xét điểm $M(1-t\,;\,2+2t\,;\,3t)$ trên d và điểm $M'(1+t'\,;\,3-2t'\,;\,1)$ trên d' ta có $\overrightarrow{MM'} = (t'+t\,;\,1-2t'-2t\,;\,1-3t)$.

MM' là đường vuông góc chung của d và d'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{a}' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t' - t + 2 - 4t' - 4t + 3 - 9t = 0 \\ t' + t - 2 + 4t' + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t' + 14t = 5 \\ 5t' + 5t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ t' = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$ (h.3.27).



Hình 3.27

Thay giá trị của t và t' vào ta được toạ độ của M và M' là $M\left(\frac{2}{3}\,;\frac{8}{3}\,;1\right)$, $M'\left(\frac{16}{15}\,;\,\frac{43}{15};1\right)$.

Do đó $\overrightarrow{MM'} = \left(\frac{6}{15}\,;\,\frac{3}{15}\,;0\right)$.

Suy ra đường vuông góc chung Δ của d và d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2\,;1\,;0)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + 2t \\ y = \dfrac{8}{3} + t \\ z = 1. \end{cases}$$

3.43. Ta chọn hệ trục toạ độ như sau :

C là gốc toạ độ, $\overrightarrow{CD}=\vec{i}$; $\overrightarrow{CB}=\vec{j}$; $\overrightarrow{CC'}=\vec{k}$.

Trong hệ toạ độ vừa chọn ta có

$C(0 ; 0 ; 0)$, $A'(a ; a ; a)$, $D(a ; 0 ; 0)$, $D'(a ; 0 ; a)$.

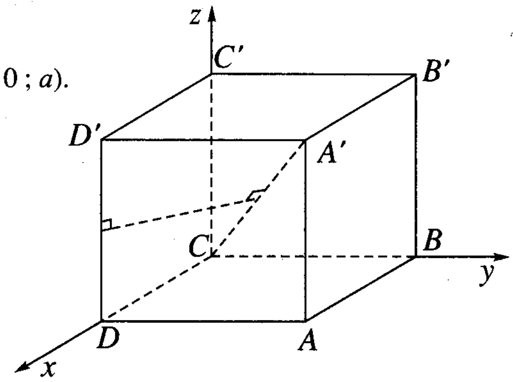
$\overrightarrow{CA'}=(a ; a ; a)$, $\overrightarrow{DD'}=(0 ; 0 ; a)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa $\overrightarrow{CA'}$ và song song với $\overrightarrow{DD'}$. (α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}=\overrightarrow{CA'}\wedge\overrightarrow{DD'}=(a^2;-a^2;0)$$

hay $\vec{n}'=(1 ; -1 ; 0)$.

Phương trình tổng quát của (α) là $x-y=0$ (h.3.28).



Hình 3.28

Ta có : $d(CA', DD')=d(D, (\alpha))=\dfrac{|-a|}{\sqrt{1+1+0}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD' là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3.44. Phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-3t.\end{cases}$

Xét phương trình $2(1+2t)+(t)+(-2-3t)-1=0 \Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm $M\left(2 ; \dfrac{1}{2} ; -\dfrac{7}{2}\right)$ (h.3.29).

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và vectơ chỉ phương của đường thẳng d lần lượt là

$$\vec{n}_\alpha=(2 ; 1 ; 1)$$

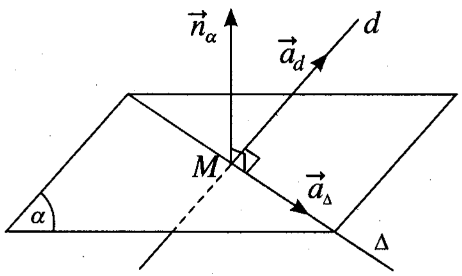
và $\quad \vec{a}_d=(2 ; 1 ; -3)$.

Gọi $\vec{a}_\Delta$ là vectơ pháp tuyến của Δ,

ta có $\vec{a}_\Delta\perp\vec{n}_\alpha$ và $\vec{a}_\Delta\perp\vec{a}_d$.

Suy ra $\vec{a}_\Delta=\vec{n}_\alpha\wedge\vec{a}_d=(-4 ; 8 ; 0)$

hay $\vec{a}_\Delta=(1 ; -2 ; 0)$.



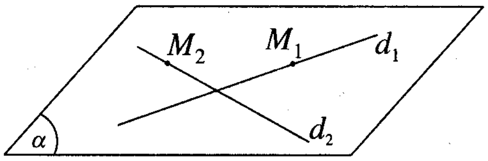
Hình 3.29

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \dfrac{1}{2} - 2t \\ z = -\dfrac{7}{2}. \end{cases}$

3.45. a) Ta có $\vec{a}_{d_1} = (2 ; -3 ; 4)$ và $\vec{a}_{d_2} = (3 ; 2 ; -2)$

$\vec{n} = \vec{a}_{d_1} \wedge \vec{a}_{d_2} = (-2 ; 16 ; 13)$.

Lấy điểm $M_1(1 ; -2 ; 5)$ trên d_1 và điểm $M_2(7 ; 2 ; 1)$ trên d_2 (h.3.30).



Hình 3.30

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (6 ; 4 ; -4)$

$\vec{n}.\overrightarrow{M_1M_2} = -12 + 64 - 52 = 0$.

Suy ra d_1 và d_2 cùng nằm trong mặt phẳng (α).

b) Mặt phẳng (α) chứa M_1 và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$, vậy phương trình của (α) là :

$$-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0 \text{ hay } 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

3.46. a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 : $\begin{cases} x = 2t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 4t' \end{cases}$

Δ_1 đi qua điểm $M_1(0 ; -2 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (2 ; 3 ; 4)$

Δ_2 đi qua điểm $M_2(1 ; 2 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (1 ; 1 ; 2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (2 ; 0 ; -1)$.

(α) đi qua điểm $M_1(0 ; -2 ; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$, vậy phương trình của (α) là : $2x - z = 0$.

b) Xét điểm $H(1 + t ; 2 + t ; 1 + 2t) \in \Delta_2$

$\overrightarrow{MH} = (t - 1 ; t + 1 ; 2t - 3)$.

Ta có : MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}_2 = 0 \Leftrightarrow t - 1 + t + 1 + 2(2t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$.

Vậy ta được $H(2 ; 3 ; 3)$.

3.47. Mặt phẳng $(A'BD)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA'} = (ab\,;\,ab\,;\,a^2)$.

Mặt phẳng (BDM) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{ab}{2}\,;\,\dfrac{ab}{2}\,;\,-a^2\right)$.

Ta có $(BDM) \perp (A'BD) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2b^2}{2} + \dfrac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 1.$

3.48. $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (0\,;\,6\,;\,0) \\ A(2\,;\,0\,;\,0) \end{cases} \Rightarrow C(2\,;\,6\,;\,0).$

Do đó $I\,(1\,;\,3\,;\,4)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua I và vuông góc với OA là : $x - 1 = 0$, (α) cắt OA tại $K(1\,;\,0\,;\,0)$.

Khoảng cách từ I đến OA là : $IK = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$.

3.49. Ta có $\vec{n}_\beta = (1\,;\,3k\,;\,-1)$ và $\vec{n}_\gamma = (k\,;\,-1\,;\,1)$. Gọi $d_k = \beta \cap \gamma$.

Đường thẳng d_k vuông góc với giá của $\vec{n}_\beta$ và $\vec{n}_\gamma$ nên có vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a} = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (3k-1\,;\,-k-1\,;\,-1-3k^2).$$

Ta có : $d_k \perp (\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{3k-1}{1} = \dfrac{-k-1}{-1} = \dfrac{-1-3k^2}{-2} \Leftrightarrow k = 1.$

3.50. Ta có $\vec{a}_d = (2\,;\,-1\,;\,4)$.

Xét điểm $B(-3+2t\,;\,1-t\,;\,-1+4t)$,

$\overrightarrow{AB} = (1+2t\,;\,3-t\,;\,-5+4t)$.

$AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t) - (3-t) + 4(-5+4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3\,;\,2\,;\,-1)$.

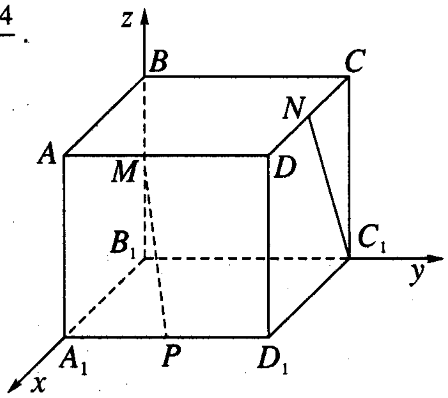
Vậy phương trình của Δ là : $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

3.51. Ta chọn hệ trục toạ độ như sau : B_1 là gốc toạ độ, $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{j}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{k}$. Trong hệ trục vừa chọn, ta có

$B_1(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,0\,;\,1)$, $A_1(1\,;\,0\,;\,0)$,

$D_1(1\,;\,1\,;\,0)$, $C(0\,;\,1\,;\,1)$, $D(1\,;\,1\,;\,1)$,

$C_1(0\,;\,1\,;\,0)$ (h.3.31).



Hình 3.31

Suy ra $M(0 ; 0 ; \frac{1}{2})$, $P(1 ; \frac{1}{2} ; 0)$, $N(\frac{1}{2} ; 1 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MP} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{C_1N} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa C_1N và song song với MP. (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ hay $\vec{n}' = (2 ; -5 ; -1)$.

Phương trình của (α) là $2x - 5(y-1) - z = 0$ hay $2x - 5y - z + 5 = 0$.

Ta có $d(MP, C_1N) = d(M, (\alpha)) = \dfrac{\left|-\frac{1}{2}+5\right|}{\sqrt{25+4+1}} = \dfrac{9}{2\sqrt{30}}$.

Ta có $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{C_1N}}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C_1N}\right|}{\left|\overrightarrow{MP}\right|\left|\overrightarrow{C_1N}\right|} = 0$. Vậy $\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{C_1N}}\right) = 90^{\circ}$.

3.52. a) Ta có $C(-2 ; 0 ; 0)$ và $M(-1 ; 0 ; \sqrt{2})$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa SA và song song với BM. Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là $\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$.

Suy ra vectơ pháp tuyến của (α) là : $\vec{n} = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$ hay $\vec{n}' = (\sqrt{2}; 0; 1)$.

Mặt phẳng (α) có phương trình : $\sqrt{2}(x-2) + z = 0$ hay $\sqrt{2}x + z - 2\sqrt{2} = 0$.

b) Ta có $d(SA, BM) = d(B, (\alpha)) = \dfrac{\left|-2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+1}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM là $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

3.53. a) Đường thẳng AC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AC} = (0 ; 1 ; -3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng AC : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 11 - 3t. \end{cases}$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1 ; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0 ; 1 ; -3)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2 ; -3 ; -1)$.

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2 ; -3 ; -1)$.

Mặt phẳng (α) có phương trình : $2(x-1)+3(y)+(z-11)=0$ hay $2x+3y+z-13=0$.

c) Phương trình mặt cầu (S) tâm D bán kính 5 : $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$

Ta có $d(D,(\alpha))=\dfrac{|2.(-3)+3.(1)+(2)-13|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}<5$

Do đó $d(D,(\alpha))<r$. Vậy mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

3.54. a) (S) có tâm $I\left(-\dfrac{3}{2};-2;\dfrac{5}{2}\right)$ và có bán kính $r=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4+\dfrac{25}{4}-6}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

b) $d(I,(P))=\dfrac{\left|2.\left(-\dfrac{3}{2}\right)-3.(-2)+4.\left(\dfrac{5}{2}\right)-5\right|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{8}{\sqrt{29}}<\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Vậy $d(I,(P))<r$.

Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính r'.

H chính là hình chiếu vuông góc của I xuống mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Ta có vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a}_\Delta=\vec{n}_{(P)}=(2;-3;4)$

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+2t\\ y=-2-3t\\ z=\dfrac{5}{2}+4t.\end{cases}$

Δ cắt (P) tại $H\left(-\dfrac{3}{2}+2t;-2-3t;\dfrac{5}{2}+4t\right)$. Ta có :

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow 2\left(-\dfrac{3}{2}+2t\right)-3(-2-3t)+4\left(\dfrac{5}{2}+4t\right)-5=0\Leftrightarrow 29t+8=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{8}{29}$.

Suy ra toạ độ $H\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{16}{29};-2+\dfrac{24}{29};\dfrac{5}{2}-\dfrac{32}{29}\right)$ hay $H\left(\dfrac{119}{58};\dfrac{-34}{29};\dfrac{81}{58}\right)$.

Ta có $r'^2=r^2-d^2(I,(P))=\dfrac{26}{4}-\dfrac{64}{29}=\dfrac{249}{58}$. Suy ra $r'=\sqrt{\dfrac{249}{58}}$.

3.55. a) Mặt phẳng (α) có phương trình : $2x+y-z-6=0$.

(β) đi qua $O(0;0;0)$ và (β) // (α), suy ra phương trình của (β) là $2x+y-z=0$.

b) Đường thẳng Δ đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (α), suy ra phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=-t.\end{cases}$

c) $d(O,(\alpha)) = \dfrac{|-6|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6}$.

3.56. a) $D(3\,;4\,;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0\,;4\,;5)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3\,;4\,;0)$.

Suy ra (ABD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = (-20\,;-15\,;12)$.

Phương trình của mặt phẳng (ABD) có dạng

$$20(x-3) + 15y - 12z = 0 \text{ hay } 20x + 15y - 12z - 60 = 0.$$

b) Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua D và vuông góc với mặt phẳng

(ABD) : $\begin{cases} x = 3 + 20t \\ y = 4 + 15t \\ z = 5 - 12t. \end{cases}$

3.57. Tâm $I(x\,;y\,;z)$ của (S) có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 \\ (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 6y - 6z = 12 \\ 8x - 4y + 8z = 44 \\ 4x - 6y + 6z = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ 2x - 3y + 3z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(2\,;-1\,;3)$.

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại A nên (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA} = (4\,;-1\,;0)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $4(x-6) - (y+2) = 0$ hay $4x - y - 26 = 0$.

3.58. a) Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OC} = \left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ hay $\vec{n} = 3\overrightarrow{OC} = (1\,;1\,;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z = 0$.

b) Gọi (β) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (α). Hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (β) là : $\overrightarrow{AB} = (0\,;1\,;1)$ và $\vec{n}_\alpha = (1\,;1\,;1)$.

Suy ra (β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta = (0\,;1\,;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (β) là $y - z = 0$.

3.59. a) Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. (*)

Thay toạ độ các điểm A, B, C, D vào (*) ta có

$$\begin{cases} 1-2a+d=0 \\ 1-2b+d=0 \\ 1-2c+d=0 \\ 2-2a-2b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ d=0. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là : $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}=(-1;0;1)$ và $\overrightarrow{AD}=(0;1;0)$.

Suy ra (ACD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}=(-1;0;-1)$ hay $\vec{n}'=(1;0;1)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (ACD) là $x-1+z=0$ hay $x+z-1=0$.

Mặt cầu (S) có tâm là $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $I\in(ACD)$, suy ra mặt phẳng (ACD) cắt (S) theo một đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và có bán kính r bằng bán kính mặt cầu (S), vậy

$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

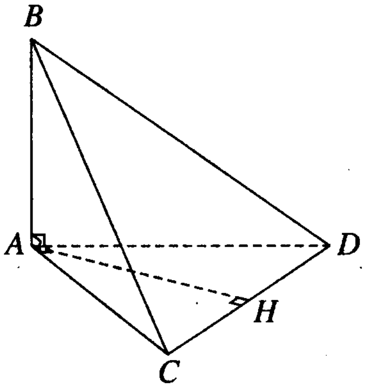
3.60. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;0)$; $\overrightarrow{AC}=(0;0;4)$; $\overrightarrow{AD}=(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$, suy ra $AB\perp AC, AC\perp AD, AD\perp AB$.

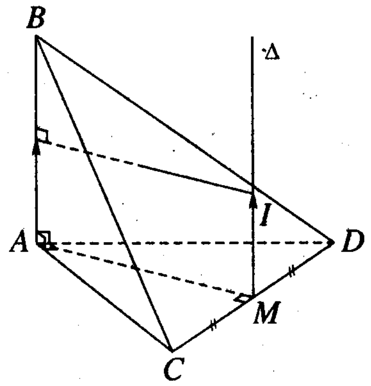
Vậy AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CD. Ta có AH chính là đường vuông góc chung của AB và CD (h.3.32).

$\overrightarrow{AB}=(-1;0;0)$; $\overrightarrow{CD}=(0;-2;-4)$



Hình 3.32



Hình 3.33

Vectơ chỉ phương của đường thẳng AH là $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (0\,;\,-4\,;\,2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng AH hay Δ là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 4t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

c) Gọi M là trung điểm của CD. Vẽ trục Δ của đường tròn (ACD), mặt phẳng trung trực của AB cắt Δ tại $I(a\,;\,b\,;\,c)$. Ta có I là tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (h.3.33).

Ta có $M(2\,;\,3\,;\,1)$, $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = -\dfrac{1}{2} \\ b - 3 = 0 \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 3 \\ c = 1. \end{cases}$

(S) có bán kính $r = IA = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1 + 4} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là : $(x - \dfrac{3}{2})^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{21}{4}$.

d) Mặt phẳng (α) song song với (ABD) nên có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{AC} = (0\,;\,0\,;\,4) \text{ hay } \vec{n} = (0\,;\,0\,;\,1).$$

Phương trình (α) có dạng $z + D = 0$. Ta có :

(α) tiếp xúc với $S(I, r) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = r \Leftrightarrow |1 + D| = \dfrac{\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = \dfrac{\sqrt{21}}{2} - 1 \\ D = -\dfrac{\sqrt{21}}{2} - 1. \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng (α) thoả mãn đề bài là $(\alpha_1) : z + \dfrac{\sqrt{21}}{2} - 1 = 0$

và $(\alpha_2) : z - \dfrac{\sqrt{21}}{2} - 1 = 0$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.61 (B)	**3.65** (D)	**3.69** (B)	**3.73** (C)	**3.77** (C)	**3.81** (C)
3.62 (A)	**3.66** (B)	**3.70** (C)	**3.74** (D)	**3.78** (B)	**3.82** (A)
3.63 (C)	**3.67** (A)	**3.71** (B)	**3.75** (C)	**3.79** (B)	**3.83** (A)
3.64 (A)	**3.68** (A)	**3.72** (A)	**3.76** (A)	**3.80** (D)	**3.84** (A)
					3.85 (B)

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

I. ĐỀ BÀI

1. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Tính tỉ số $\dfrac{V_{ACA'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}}$;

b) Tính $V_{ACA'B'}$ biết rằng tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $AA' = b$ và AA' tạo với (ABC) một góc bằng 60°.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = a$, $BD = CA = b$, $CD = AB = c$.

a) Chứng minh rằng các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện đồng quy và đôi một vuông góc với nhau ;

b) Tính V_{ABCD} theo a, b, c ;

c) Chứng minh rằng O là tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp của tứ diện $ABCD$. Tính bán kính của các mặt cầu đó theo a, b, c.

3. Cho hình nón tròn xoay (H) đỉnh S, đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao bằng h. Gọi (H') là hình trụ tròn xoay có đáy là hình tròn bán kính r $(0 < r < R)$ nội tiếp (H).

a) Tính tỉ số thể tích của (H') và (H) ;

b) Xác định r để (H') có thể tích lớn nhất.

4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $A'(0 ; 0 ; 1)$.

a) Hãy tìm toạ độ các đỉnh còn lại ;

b) Chứng minh $A'C \perp (BC'D)$;

c) Tìm toạ độ của chân đường vuông góc chung của $B'D'$ và BC'.

5. Trong không gian $Oxyz$, cho $S(0 ; 0 ; 2)$, $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 0)$.

a) Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SB ;

b) Tìm toạ độ của các điểm B' là giao của (P) với đường thẳng SB, C' là giao của (P) với đường thẳng SC ;

c) Tính thể tích tứ diện $SAB'C'$;

d) Tìm điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (P) ;

e) Chứng minh các điểm A, B, C, B', C' cùng thuộc một mặt cầu. Viết phương trình của mặt cầu đó và phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu đó tại C'.

6. Cho hình chóp ngũ giác $S.ABCDE$. Gọi A', B', C', D', E' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD, SE. Khi đó $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'E'}}{V_{S.ABCDE}}$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{5}$; (C) $\dfrac{1}{8}$; (D) $\dfrac{1}{32}$.

7. Thể tích hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a bằng :

(A) $\dfrac{\pi a^3}{9}$; (B) $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{18}$; (C) $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{18}$; (D) $\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$.

8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khi đó thể tích hình chóp $A.A'BCD'$ bằng :

(A) $\dfrac{a^3}{2}$; (B) $\dfrac{a^3}{3}$; (C) $\dfrac{a^3}{4}$; (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (H) là hình nón tròn xoay nội tiếp hình lập phương đó. Khi đó $\dfrac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{\pi}{6}$; (C) $\dfrac{\pi}{8}$; (D) $\dfrac{\pi}{12}$.

10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (H) là hình trụ tròn xoay ngoại tiếp hình lập phương đó. Khi đó $\dfrac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ bằng :

(A) $\dfrac{3}{2}$; (B) $\dfrac{\pi}{2}$; (C) $\dfrac{\pi}{3}$; (D) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (H) là hình cầu nội tiếp hình lập phương đó. Khi đó $\dfrac{V_{(H)}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ bằng :

(A) $\dfrac{\pi}{6}$; (B) $\dfrac{\pi}{4}$; (C) $\dfrac{\pi}{3}$; (D) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Các bài tập dưới đây cho trong không gian Oxyz.

12. Cho $A(0\ ;\ 0\ ;\ a)$, $B(b\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ c\ ;\ 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là :

(A) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$;

(B) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1$;

(C) $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=1$;

(D) $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1$.

13. Cho ba mặt phẳng $(P): 2x+y+z+3=0$,

$(Q): x-y-z-1=0$,

$(R): y-z+2=0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai* ?

(A) Không có điểm nào cùng thuộc ba mặt phẳng trên ;

(B) $(P)\perp(Q)$;

(C) $(P)\perp(R)$;

(D) $(Q)\perp(R)$.

14. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-2t \\ y=2t \\ z=3-4t \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) d_1 và d_2 cắt nhau ;

(B) d_1 và d_2 chéo nhau ;

(C) d_1 và d_2 song song ;

(D) d_1 và d_2 trùng nhau.

15. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases}$ và hai mặt phẳng

$(P): x-y+z+1=0$ và $(Q): 2x+y-z-4=0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $d\ //\ (P)$;

(B) $d\ //\ (Q)$;

(C) $d=(P)\cap(Q)$;

(D) $d\perp(P)$.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

1. a) Ta có $V_{ACA'B'} = V_{B'.ACA'} = V_{B'.CA'C'}$

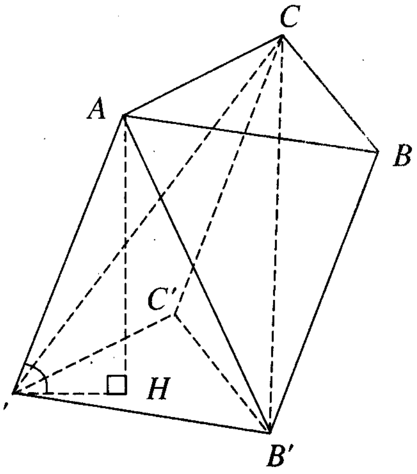
$$= V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \text{ (h.1)}.$$

Từ đó suy ra tỉ số phải tìm bằng $\frac{1}{3}$.

b) Gọi H là chân đường cao đi qua A của lăng trụ. Khi đó góc $(A'H, A'A) = 60^{\circ}$. Từ đó suy ra $AH = b\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta cũng có : $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}a^2b$.

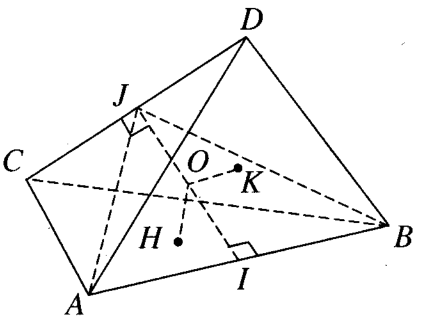
Từ đó suy ra $V_{ACA'B'} = \frac{1}{8}a^2 b$.



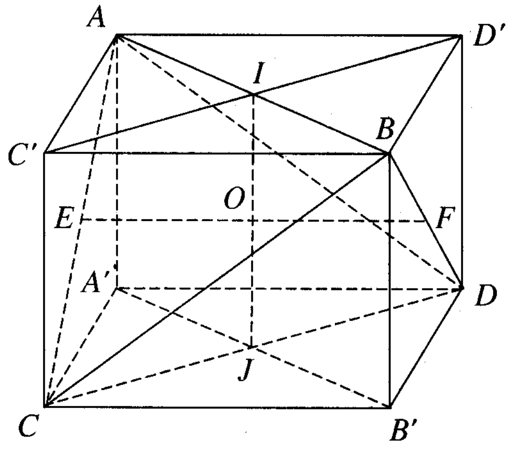
Hình 1

2. a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Vì $\Delta ACD = \Delta BDC$ nên các trung tuyến tương ứng của chúng bằng nhau, do đó $AJ = BJ$. Từ đó suy ra $JI \perp AB$. Tương tự, $IJ \perp CD$. Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

Làm tương tự đối với các cặp cạnh đối diện khác ta chứng minh được rằng đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đường vuông góc chung của cặp cạnh đó. Do đó các đường đó đồng quy tại O là trung điểm của mỗi đường (h.2)



Hình 2



Hình 3

Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và song song với CD, (Q) là mặt phẳng qua CD và song song với AB ; A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên (Q) ; C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, D lên (P). Dễ thấy $AC'BD'.A'CB'D$ là hình hộp chữ nhật. Đường nối hai tâm của mỗi cặp mặt đối diện của hình hộp chữ nhật đó chính là đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$. Do đó chúng đôi một vuông góc với nhau (h.3).

b) Đặt $AC' = x, AD' = y, AA' = z$. Ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \\ y^2 = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ z^2 = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2}. \end{cases}$

Từ đó suy ra $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} V_{AC'BD'.A'CB'D} = \dfrac{1}{12}\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$.

c) Ta có O là tâm của hình hộp chữ nhật $AC'BD'.A'CB'D$ nên nó là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$r = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{8}.$$

Gọi H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ O đến (ABC) và (ABD) (xem h.2). Vì $OA = OB = OC$ nên $HA = HB = HC$, tương tự $KA = KB = KD$. Vì $\Delta ABD = \Delta BAC$ nên $HA = KA$. Do đó $OH = OK$. Tương tự, ta chứng minh được khoảng cách từ O đến các mặt của tứ diện $ABCD$ bằng nhau nên O cũng là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi r' là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Khi đó ta có $V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OBCD} + V_{OCDA} + V_{ODAB} = 4V_{OABC} = \dfrac{4}{3} r' S_{ABC}$.

Do đó $r' = \dfrac{3}{4}\dfrac{V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{16}\dfrac{\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$,

trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

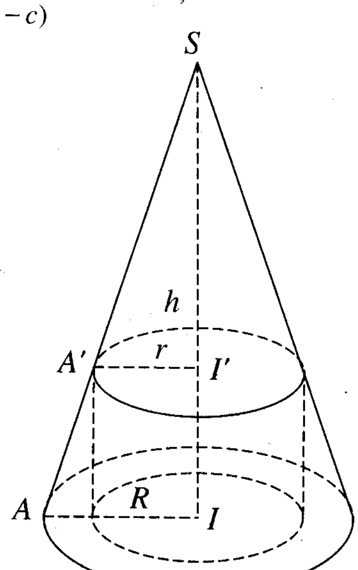
3. Giả sử đường cao SI của hình nón (H) cắt hai đáy của hình trụ (H') tại I và I' (h.4).

Khi đó $\dfrac{r}{R} = \dfrac{SI'}{h}$. Do đó $\dfrac{R-r}{R} = \dfrac{h - SI'}{h} = \dfrac{I'I}{h}$.

Từ đó suy ra $I'I = \dfrac{h(R-r)}{R}$.

$V_{(H)} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$, $V_{(H')} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \dfrac{h(R-r)}{R}$.

Do đó $\dfrac{V_{(H')}}{V_{(H)}} = \dfrac{r^2(R-r)}{R^3}$.



Hình 4

b) $V_{(H')}$ lớn nhất khi $f(r) = r^2(R - r)$ (với $0 < r < R$) là lớn nhất. Khảo sát hàm số $f(r)$, với $0 < r < R$. Ta có $f'(r) = 2Rr - 3r^2 = 0$, khi $r = 0$ (loại), hoặc $r = \frac{2R}{3}\cdot$ Lập bảng biến thiên ta thấy f đạt cực đại tại $r = \frac{2R}{3}\cdot$ Khi đó $V_{(H')} = \frac{4}{81}\pi R^2 h$.

4. a) Dễ thấy $C(1 ; 1 ; 0)$, $B'(1 ; 0 ; 1)$, $D'(0 ; 1 ; 1)$, $C'(1 ; 1 ; 1)$, $D'(0 ; 1 ; 1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{A'C} = (1 ; 1 ; -1)$,

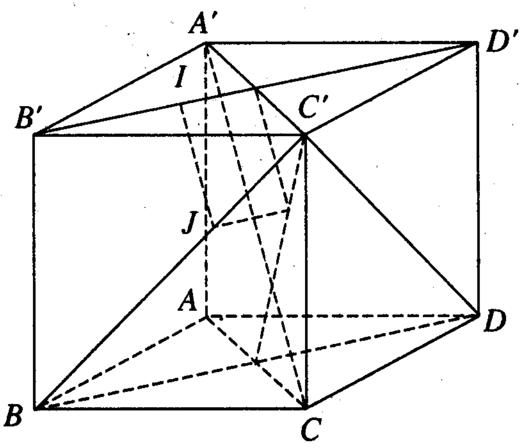
$\overrightarrow{BC'} = (0 ; 1 ; 1)$,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'} = (-1 ; 1 ; 0)$,

do đó $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC'} = 0$ và $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Từ đó suy ra $A'C \perp (BC'D)$.

c) Gọi IJ là đường vuông góc chung của $B'D'$ và BC', $\vec{n}_1$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) qua $B'D'$ và song song với $A'C$, $\vec{n}_2$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) qua BC' và song song với $A'C$ (h.5).



Hình 5

Khi đó $\vec{n}_1 = \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{B'D'} = (1 ; 1 ; 2)$, $\vec{n}_2 = \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{BC'} = (2 ; -1 ; 1)$.

Phương trình của (P) là : $(x - 1) + y + 2(z - 1) = 0$ hay $x + y + 2z - 3 = 0$.

Phương trình của (Q) là : $2(x - 1) - y + z = 0$ hay $2x - y + z - 2 = 0$.

Phương trình của $(B'D')$ là : $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1$.

Phương trình của (BC') là : $x = 1,\ y = t,\ z = t$.

I là giao điểm của đường thẳng $B'D'$ và (Q), để tìm toạ độ của I ta thế phương trình đường thẳng $B'D'$ vào phương trình của (Q).

Ta có $2(1 - t) - t + 1 - 2 = 0$, hay $t = \frac{1}{3}$. Từ đó suy ra $I(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; 1)$.

Tương tự, ta tìm được $J(1 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3})$.

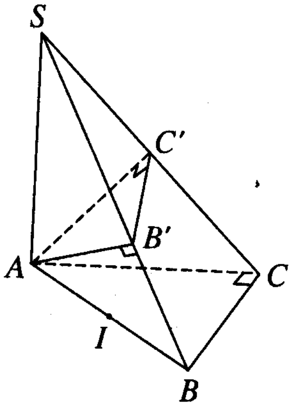
5. a) $\overrightarrow{SB} = (1 ; 2 ; -2)$. Phương trình $(P) : x + 2y - 2z = 0$.

b) Phương trình đường thẳng $SB : x = t,\ y = 2t,\ z = 2 - 2t$. Để tìm B' ta giải hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x = t,\ y = 2t,\ z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{4}{9} ; \frac{8}{9} ; \frac{10}{9}\right).$$

Tương tự, $C'(0 ; 1 ; 1)$.

c) $\overrightarrow{C'B'} = \left(\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{9}\right)$ vuông góc với $\overrightarrow{AC'} = (0; 1; 1)$.



Hình 6

Khi đó $S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AC'.C'B = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{1}{3}$.

Mặt khác $SB' = \sqrt{SA^2 - AB'^2} = \sqrt{4 - \frac{20}{9}} = \frac{4}{3}$ (h.6).

Vậy $V_{SAB'C'} = \frac{4}{27}$.

d) Đường thẳng qua B và vuông góc với (P) có phương trình :

$x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = -2t$.

Để tìm giao điểm B_0 của đường thẳng này với (P) ta giải hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = -2t \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow B_0\left(\frac{4}{9}; \frac{8}{9}; \frac{10}{9}\right).$$

Từ đó suy ra điểm đối xứng với B qua (P) là $B_1\left(-\frac{1}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{20}{9}\right)$.

e) Dễ thấy $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC'} \perp \overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{AB'}$ nên A, B, C, B', C' cùng thuộc mặt cầu tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ là trung điểm của AB, bán kính $IA = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình mặt cầu đó là $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{4}$.

Vì điểm C' thuộc mặt cầu, nên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại C' phải vuông góc với $\overrightarrow{IC'} = (-\frac{1}{2}; 0; 1)$. Phương trình của mặt phẳng đó là $x - 2(z-1) = 0$ hay $x - 2z + 2 = 0$.

ĐÁP ÁN

6. (C)	**8.** (B)	**10.** (B)	**12.** (C)	**14.** (D)
7. (D)	**9.** (D)	**11.** (A)	**13.** (A)	**15.** (C).

MỤC LỤC