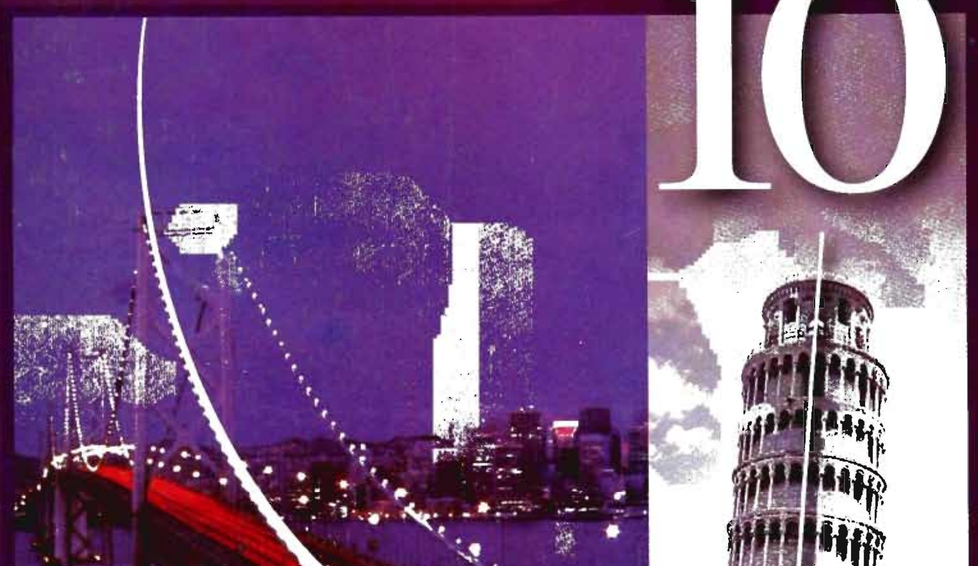
VŨ TUẤN (Chủ biên) - ĐOÀN MINH CƯỜNG - TRẦN VĂN HẠO
ĐỖ MẠNH HÙNG - PHẠM PHU - NGUYỄN TIẾN TÀI

BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ TUẤN (Chủ biên)
DOÃN MINH CƯỜNG - TRẦN VĂN HẠO - ĐỖ MẠNH HÙNG
PHẠM PHU - NGUYỄN TIẾN TÀI

BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01 - 2011/CXB/814 - 1235/GD

Mã số : CB003T1

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với Sách giáo khoa (SGK) Đại số 10, Sách bài tập là tài liệu giáo khoa chính thức cho việc học và dạy môn Đại số 10 Trung học phổ thông.

Sách đã được một Hội đồng chuyên môn của Bộ Giáo dục và Đào tạo thẩm định.

Sách bài tập Đại số 10 có cấu trúc như sau

Mỗi chương gồm :

1. Phần ***Kiến thức cần nhớ*** nhắc lại những khái niệm, mệnh đề, công thức phải nhớ để vận dụng giải các loại bài tập.

2. Phần ***Bài tập mẫu*** giới thiệu một số loại bài tập hay gặp hoặc cần lưu ý luyện tập.

3. Phần ***Bài tập*** bao gồm đề bài các loại bài tập (tự luận, trắc nghiệm, tính toán bằng máy tính bỏ túi).

4. Phần ***Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số*** giúp người đọc kiểm tra, đối chiếu kết quả bài tập tự giải.

Để việc học có kết quả cao học sinh không nên xem lời giải, hướng dẫn trước khi tự giải.

Để việc làm bài tập giúp nắm vững kiến thức được học và biết cách vận dụng vào giải các loại toán, người học nên nghiền ngẫm để hiểu rõ lí do, nguyên nhân làm cho mình không thành công (như chưa thuộc công thức, máy móc trong tư duy, thiếu sáng tạo trong việc đặt ẩn phụ,...).

Sách bài tập Đại số 10 biên soạn lần này không giải các bài tập đã cho trong SGK. Sách cung cấp thêm một hệ thống bài tập được biên soạn công phu và có phương pháp sư phạm.

Các bài tập nêu trong sách trải hầu hết các loại bài tập chính và đi từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp.

Các tác giả mong rằng cuốn sách góp phần tích cực vào hiệu quả học tập của người học và giảng dạy của các thầy cô giáo.

Chúng tôi sẵn sàng tiếp thu các ý kiến đóng góp của độc giả để sách tốt hơn và chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I. MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

2. Với mỗi giá trị của biến thuộc một tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến trở thành một mệnh đề.

3. Phủ định $\overline{P}$ của mệnh đề P là đúng khi P sai và là sai khi P đúng.

4. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng và Q sai (trong mọi trường hợp khác $P \Rightarrow Q$ đều đúng).

5. Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là $Q \Rightarrow P$.

6. Ta nói hai mệnh đề P và Q là hai mệnh đề tương đương nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

7. Kí hiệu $\forall$ đọc là với mọi. Kí hiệu $\exists$ đọc là tồn tại ít nhất một (hay có ít nhất một).

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Xét xem trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến ?

a) $7 + x = 3$; b) $7 + 5 = 3$.

Giải

a) Câu "$7 + x = 3$" là một mệnh đề chứa biến. Với mỗi giá trị của x thuộc tập số thực ta được một mệnh đề.

b) Câu "$7 + 5 = 3$" là một mệnh đề. Đó là một mệnh đề sai.

BÀI 2

Với mỗi câu sau, tìm hai giá trị thực của x để được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$; b) $4x + 3 < 2x - 1$.

Giải

a) Với $x = 1$ ta được $3.1^2 + 2.1 - 1 = 0$ là mệnh đề sai ;

Với $x = -1$ ta được $3.(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0$ là mệnh đề đúng.

b) Với $x = -3$ ta được $4.(-3) + 3 < 2.(-3) - 1$ là mệnh đề đúng ;

Với $x = 0$ ta được $4.0 + 3 < 2.0 - 1$ là mệnh đề sai.

BÀI 3

Giả sử ABC là một tam giác đã cho. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng với

a) P : "Góc A bằng 90^o", Q : "$BC^2 = AB^2 + AC^2$" ;

b) P : "$\widehat{A} = \widehat{B}$", Q : "Tam giác ABC cân".

Giải

Với tam giác ABC đã cho, ta có

a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu góc A bằng 90^o thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$" là mệnh đề đúng.

$(Q \Rightarrow P)$: "Nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì $\widehat{A} = 90^o$" là mệnh đề đúng.

b) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu $\widehat{A} = \widehat{B}$ thì tam giác ABC cân" là mệnh đề đúng.

$(Q \Rightarrow P)$: "Nếu tam giác ABC cân thì $\widehat{A} = \widehat{B}$".

$(Q \Rightarrow P)$ là mệnh đề sai trong trường hợp tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{C}$ nhưng $\widehat{A} \neq \widehat{B}$.

BÀI 4

Phát biểu thành lời các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của chúng

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$; b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 \neq 0$.

Giải

a) Có một số thực mà bình phương của nó bằng -1. Mệnh đề này sai. Phủ định của nó là "Bình phương của mọi số thực đều khác -1"

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1).$$

Mệnh đề này đúng.

b) Với mọi số thực x đều có $x^2 + x + 2 \neq 0$.

Mệnh đề này đúng vì phương trình $x^2 + x + 2 = 0$ vô nghiệm ($\Delta = 1 - 4.2 < 0$).

Phủ định của nó là "Có ít nhất một số thực x mà $x^2 + x + 2 = 0$"

$$(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 = 0).$$

Mệnh đề này sai.

C. BÀI TẬP

1. Trong các câu sau, câu nào là một mệnh đề, câu nào là một mệnh đề chứa biến ?

a) $1 + 1 = 3$; b) $4 + x < 3$;

c) $\frac{3}{2}$ có phải là một số nguyên không ? d) $\sqrt{5}$ là một số vô tỉ.

2. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu phủ định của nó

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; b) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{18}\right)^2 > 8$;

c) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)^2$ là một số hữu tỉ ;

d) $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.

Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $x < -x$; b) $x < \dfrac{1}{x}$; c) $x = 7x$; d) $x^2 \leq 0$.

4. Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) P : "15 không chia hết cho 3" ;

b) Q : "$\sqrt{2} > 1$".

5. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó, với

a) P : "$2 < 3$", Q : "$-4 < -6$" ;

b) P : "$4 = 1$", Q : "$3 = 0$".

6. Với mỗi số thực x, xét các mệnh đề P : "x là một số hữu tỉ", Q : "x^2 là một số hữu tỉ".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó ;

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên ;

c) Chỉ ra một giá trị của x mà mệnh đề đảo sai.

7. Với mỗi số thực x, xét các mệnh đề P : "$x^2 = 1$", Q : "$x = 1$".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó ;

b) Xét tính đúng sai của mệnh đề $Q \Rightarrow P$;

c) Chỉ ra một giá trị của x mà mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai.

8. Với mỗi số thực x, xét các mệnh đề P : "x là một số nguyên", Q : "$x + 2$ là một số nguyên".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó ;

b) Xét tính đúng sai của cả hai mệnh đề trên.

9. Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề P : "$AB = AC$", Q : "Tam giác ABC cân".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó ;

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên.

10. Cho tam giác ABC. Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) Nếu $AB = BC = CA$ thì ABC là một tam giác đều ;

b) Nếu $AB > BC$ thì $\widehat{C} > \widehat{A}$;

c) Nếu $\widehat{A} = 90^o$ thì ABC là một tam giác vuông.

11. Sử dụng khái niệm "điều kiện cần", hoặc "điều kiện đủ", hoặc "điều kiện cần và đủ" (nếu có thể) hãy phát biểu các mệnh đề trong bài tập 10.

12. Cho tứ giác $ABCD$. Phát biểu một điều kiện cần và đủ để

a) $ABCD$ là một hình bình hành ;
b) $ABCD$ là một hình chữ nhật ;
c) $ABCD$ là một hình thoi.

13. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Xét mệnh đề "Nếu $a + b + c = 0$ thì $f(x)$ có một nghiệm bằng 1". Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Nêu một điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có một nghiệm bằng 1.

14. Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó ;

b) Mọi số (thực) cộng với 0 đều bằng chính nó ;

c) Có một số hữu tỉ nhỏ hơn nghịch đảo của nó ;

d) Mọi số tự nhiên đều lớn hơn số đối của nó.

15. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; d) $\exists x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$;

e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$; g) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$.

16. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x.1 = x$;

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x.x = 1$;

c) $\forall n \in \mathbb{Z} : n < n^2$.

17. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.

a) Mọi hình vuông đều là hình thoi ;

b) Có một tam giác cân không phải là tam giác đều.

§2. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$

2. $A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 100.

b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n+1) \leq 20\}$.

Giải

a) $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$;

b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

BÀI 2

Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0, 3, 8, 15, 24, 35\}$;

b) $B = \{-1 + \sqrt{3}\ ; -1 - \sqrt{3}\}$.

Giải

a) Nhận xét rằng mỗi số thuộc tập A cộng thêm 1 đều là một chính phương. Từ đó ta có thể viết

$$A = \{n^2 - 1 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}\ ;$$

b) Dựa vào công thức nghiệm của phương trình bậc hai ta thấy các phần tử của tập B đều là nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - 2 = 0$. Vậy có thể viết

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2 = 0\}.$$

BÀI 3

Tìm các tập hợp con của mỗi tập hợp sau

a) $\varnothing$;

b) $\{\varnothing\}$.

Giải

a) Tập $\varnothing$ có một tập con duy nhất là chính nó.

b) Tập $\{\varnothing\}$ có hai tập con là $\varnothing$ và $\{\varnothing\}$.

BÀI 4

Trong các tập hợp sau đây, xét xem tập hợp nào là tập con của tập hợp nào.

a) A là tập hợp các tam giác ; b) B là tập hợp các tam giác đều ;

c) C là tập hợp các tam giác cân.

Giải

Hiển nhiên, $B \subset C \subset A$.

C. BÀI TẬP

18. Kí hiệu T là tập hợp các học sinh của trường, L là tập hợp các tên lớp của trường. Biết rằng An là một học sinh của trường và 10A là một tên lớp của trường. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng ?

a) Học sinh An $\in L$; b) 10A $\in L$; c) 10A $\subset T$;

d) 10A $\in T$; e) 10A $\subset L$; g) Học sinh An $\in T$.

19. Tìm một tính chất đặc trưng cho các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}\right\}$; b) $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{24}, \frac{6}{35}\right\}$.

20. Liệt kê các phần tử của tập hợp

a) $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}, -5 \le k \le 3\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 < |x| \le \frac{19}{2}\right\}$.

21. Tập hợp A có bao nhiêu tập hợp con, nếu

a) A có 2 phần tử ? b) A có 3 phần tử ? c) A có 4 phần tử ?

22. Cho hai tập hợp

$A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{6l + 4 \mid l \in \mathbb{Z}\}$.

Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. $$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

2. $$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B. \end{array}\right.$$

3. $$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B. \end{cases}$$

4. Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A và kí hiệu là $C_A B$.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A ; T là tập các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Hãy xác định các tập hợp sau

a) $T \cup G$; b) $T \cap G$; c) $H \setminus T$; d) $G \setminus T$; e) $C_H T$.

Giải

a) $T \cup G = H$; b) $T \cap G = \varnothing$; c) $H \setminus T = G$;

d) $G \setminus T = G$; e) $C_H T = G$.

BÀI 2

Cho A, B, C là ba tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để minh hoạ tính đúng, sai của các mệnh đề sau

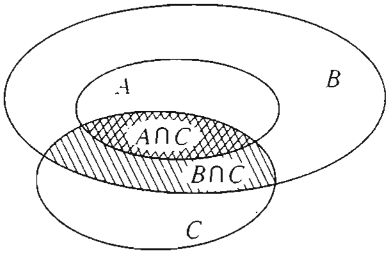
a) $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$;

b) $A \subset B \Rightarrow C \setminus A \subset C \setminus B$.

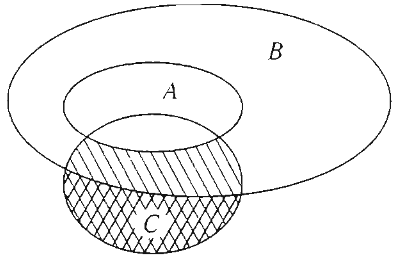
Giải

a) Mệnh đề này đúng, được minh hoạ bằng hình 1.

b) Mệnh đề này sai, được minh hoạ bằng hình 2.



Hình 1



Hình 2

BÀI 3

Mỗi học sinh lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp 10C có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Kí hiệu A là tập các học sinh lớp 10C chơi bóng đá, B là tập các học sinh lớp 10C chơi bóng chuyền. Vì mỗi bạn của lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền, nên $A \cup B$ là tập các học sinh của lớp. Để đếm số phần tử của $A \cup B$, ta đếm số phần tử của A (25 người) và đếm số phần tử của B (20 người). Nhưng khi đó các phần tử thuộc $A \cap B$ được đếm hai lần (số phần tử như vậy bằng 10).

Vậy số phần tử của $A \cup B$ là $25 + 20 - 10 = 35$. Lớp 10C có 35 học sinh.

BÀI 4

Tìm phần bù của tập hợp các số tự nhiên trong tập hợp các số nguyên.

Giải

Phần bù của tập hợp các số tự nhiên trong tập hợp các số nguyên là tập hợp các số nguyên âm.

C. BÀI TẬP

23. Liệt kê các phần tử của tập hợp A các ước số tự nhiên của 18 và của tập hợp B các ước số tự nhiên của 30. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

24. Kí hiệu A là tập các số nguyên lẻ, B là tập các bội của 3. Xác định tập hợp $A \cap B$ bằng một tính chất đặc trưng.

25. Cho A là một tập hợp tuỳ ý. Hãy xác định các tập hợp sau

a) $A \cap A$; b) $A \cup A$; c) $A \setminus A$;

d) $A \cap \varnothing$; e) $A \cup \varnothing$; g) $A \setminus \varnothing$; h) $\varnothing \setminus A$.

26. Cho tập hợp A. Có thể nói gì về tập hợp B, nếu

a) $A \cap B = B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \cup B = A$;

d) $A \cup B = B$; e) $A \setminus B = \varnothing$; g) $A \setminus B = A$.

27. Tìm các tập hợp sau

a) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$; b) $C_{\mathbb{N}}2\mathbb{N}$ (với kí hiệu $2\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn).

§4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. $(a\,;\,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

2. $(a\,;\,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

3. $(-\infty\,;\,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

4. $[a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.

5. $[a\,;\,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.

6. $(a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.

7. $[a\,;\,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$; $[0\,;\,+\infty) = \mathbb{R}^+$.

8. $(-\infty\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$; $(-\infty\,;\,0] = \mathbb{R}^-$.

9. $(-\infty\,;\,0] \cup [0\,;\,+\infty) = (-\infty\,;\,+\infty) = \mathbb{R}$.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 2\} ; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 7\} ;$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} ; \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 5\}.$$

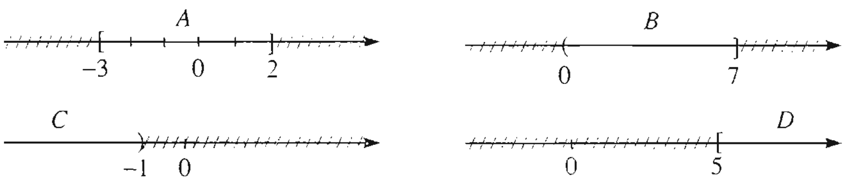
a) Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên ;

b) Biểu diễn các tập hợp A, B, C, D trên trục số.

Giải

a) $A = [-3 ; 2]$; $B = (0 ; 7]$; $C = (-\infty ; -1)$; $D = [5, +\infty)$.

b)



BÀI 2

Xác định mỗi tập hợp số sau và biểu diễn trên trục số

a) $(-5 ; 3) \cap (0 ; 7)$;

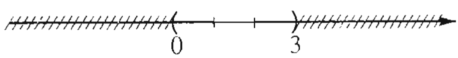
b) $(-1 ; 5) \cup (3 ; 7)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (0 ; +\infty)$;

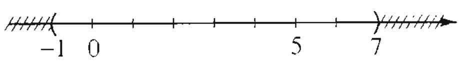
d) $(-\infty ; 3) \cap (-2 ; +\infty)$.

Giải

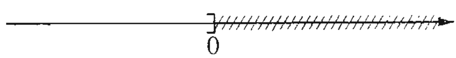
a) $(-5 ; 3) \cap (0 ; 7) = (0 ; 3)$.



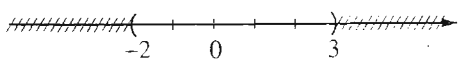
b) $(-1 ; 5) \cup (3 ; 7) = (-1 ; 7)$.



c) $\mathbb{R} \setminus (0 ; +\infty) = (-\infty ; 0]$.



d) $(-\infty ; 3) \cap (-2 ; +\infty) = (-2 ; 3)$.



C. BÀI TẬP

28. Xác định mỗi tập hợp số sau và biểu diễn nó trên trục số

a) $(-3 ; 3) \cup (-1 ; 0)$; b) $(-1 ; 3) \cup [0 ; 5]$;

c) $(-\infty ; 0) \cap (0 ; 1)$; d) $(-2 ; 2] \cap [1 ; 3)$.

29. Xác định mỗi tập hợp số sau và biểu diễn nó trên trục số

a) $(-3 ; 3) \setminus (0 ; 5)$; b) $(-5 ; 5) \setminus (-3 ; 3)$;

c) $\mathbb{R} \setminus [0 ; 1]$; d) $(-2 ; 3) \setminus (-3 ; 3)$.

30. Xác định tập hợp $A \cap B$, với

a) $A = [1 ; 5]$; $B = (-3 ; 2) \cup (3 ; 7)$;

b) $A = (-5 ; 0) \cup (3 ; 5)$; $B = (-1 ; 2) \cup (4 , 6)$.

31. Xác định tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau

a) $[-3 ; 0] \cap (0 ; 5) = \{0\}$; b) $(-\infty ; 2) \cup (2 ; +\infty) = (-\infty ; +\infty)$

c) $(-1 ; 3) \cap (2 ; 5) = (2 ; 3)$; d) $(1 ; 2) \cup (2 ; 5) = (1 ; 5)$.

32. Cho a, b, c, d là những số thực và $a < b < c < d$. Xác định các tập hợp số sau

a) $(a ; b) \cap (c ; d)$; b) $(a ; c] \cap [b ; d)$;

c) $(a ; d) \setminus (b ; c)$; d) $(b ; d) \setminus (a ; c)$.

§5. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho a là số gần đúng của $\overline{a}$.

1. $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

2. Nếu $\Delta_a \le d$ thì d được gọi là độ chính xác của số gần đúng a và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

3. Cách viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước. Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Cho số $\overline{a} = 37\,975\,421 \pm 150$. Hãy viết số quy tròn của số 37 975 421.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng trăm nên ta quy tròn số 37 975 421 đến hàng nghìn. Vậy số quy tròn là 37 975 000.

BÀI 2

Biết số gần đúng $a = 173{,}4592$ có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,01. Viết số quy tròn của a.

Giải

Vì sai số tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{100}$ nên số quy tròn của a là 173,5.

C. BÀI TẬP

33. Cho biết $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$. Viết gần đúng $\sqrt{3}$ theo quy tắc làm tròn đến hai, ba, bốn chữ số thập phân có ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

34. Theo thống kê, dân số Việt Nam năm 2002 là 79 715 675 người. Giả sử sai số tuyệt đối của số liệu thống kê này nhỏ hơn 10 000 người. Hãy viết số quy tròn của số trên.

35. Độ cao của một ngọn núi là $h = 1372{,}5 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}$. Hãy viết số quy tròn của số 1 372,5.

36. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi.

a) $\sqrt{13} \times (0{,}12)^3$ làm tròn kết quả đến 4 chữ số thập phân.

b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt{7}$ làm tròn kết quả đến 6 chữ số thập phân.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

37. Cho A, B là hai tập hợp và mệnh đề P : "A là một tập hợp con của B".

a) Viết P dưới dạng một mệnh đề kéo theo.

b) Lập mệnh đề đảo của P.

38. Dùng kí hiệu $\forall$ và $\exists$ để viết mệnh đề sau rồi lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của các mệnh đề đó.

a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0.

b) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó đều bằng 1.

c) Có một số thực bằng số đối của nó.

39. Cho A, B là hai tập hợp, $x \in A$ và $x \notin B$. Xét xem trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

a) $x \in A \cap B$;　　b) $x \in A \cup B$;

c) $x \in A \setminus B$;　　d) $x \in B \setminus A$.

40. Cho A, B là hai tập hợp. Hãy xác định các tập hợp sau

a) $(A \cap B) \cup A$;　　b) $(A \cup B) \cap B$;

c) $(A \setminus B) \cup B$;　　d) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

41. Cho A, B là hai tập hợp khác rỗng phân biệt. Xét xem trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

a) $A \subset B \setminus A$;　　b) $A \subset A \cup B$;

c) $A \cap B \subset A \cup B$;　　d) $A \setminus B \subset A$.

42. Cho a, b, c là những số thực và $a < b < c$. Hãy xác định các tập hợp sau

a) $(a ; b) \cap (b ; c)$;　　b) $(a ; b) \cup (b ; c)$;

c) $(a ; c) \setminus (b ; c)$;　　d) $(a ; b) \setminus (b ; c)$.

43. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

a) $(-\infty ; 3] \cap (-2 ; +\infty)$;　　b) $(-15 ; 7) \cup (-2 ; 14)$;

c) $(0 ; 12) \setminus [5 ; +\infty)$;　　d) $\mathbb{R} \setminus (-1 ; 1)$.

44. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

a) $\mathbb{R} \setminus ((0 ; 1) \cup (2 ; 3))$;　　b) $\mathbb{R} \setminus ((3 ; 5) \cap (4 ; 6))$;

c) $(-2 ; 7) \setminus [1 ; 3]$;　　d) $((-1 ; 2) \cup (3 ; 5)) \setminus (1 ; 4)$

45. Cho a, b, c, d là những số thực. Hãy so sánh a, b, c, d trong các trường hợp sau

a) $(a\ ;\ b) \subset (c\ ;\ d)$; b) $[a\ ;\ b] \subset (c\ ;\ d)$.

46. Xác định các tập hợp sau

a) $(-3\ ;\ 5] \cap \mathbb{Z}$; b) $(1\ ;\ 2) \cap \mathbb{Z}$;

c) $(1\ ;\ 2] \cap \mathbb{Z}$; d) $[-3\ ;\ 5] \cap \mathbb{N}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Là một mệnh đề ;

b) Là một mệnh đề chứa biến ;

c) Không là mệnh đề, không là mệnh đề chứa biến ;

d) Là một mệnh đề.

2. a) Mệnh đề đúng. Phủ định là "$\sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề sai, vì $\left(\sqrt{2} - \sqrt{18}\right)^2 = 8$.

Phủ định là "$\left(\sqrt{2} - \sqrt{18}\right)^2 \leq 8$", mệnh đề này đúng.

c) Mệnh đề đúng, vì $\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)^2 = 27$.

Phủ định là "$\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)^2$ là một số vô tỉ", mệnh đề này sai.

d) Mệnh đề sai.

Phủ định là "$x = 2$ không là nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$", mệnh đề này đúng.

a) Với $x = -1$ ta được mệnh đề $-1 < 1$ (đúng) ;
Với $x = 1$ ta được mệnh đề $1 < -1$ (sai).

b) Với $x = \dfrac{1}{2}$ ta được mệnh đề $\dfrac{1}{2} < 2$ (đúng) ;

Với $x = 2$ ta được mệnh đề $2 < \dfrac{1}{2}$ (sai).

c) $x = 0, x = 1$.

d) $x = 0, x = 1$.

4. a) $\bar{P}$ là mệnh đề "15 chia hết cho 3", P sai, $\bar{P}$ đúng.

b) $\bar{Q}$ là mệnh đề "$\sqrt{2} \le 1$". Q đúng, $\bar{Q}$ sai.

5. a) "Nếu $2 < 3$ thì $-4 < -6$". Mệnh đề sai.

b) "Nếu $4 = 1$ thì $3 = 0$". Mệnh đề đúng.

6. a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu x là một số hữu tỉ thì x^2 cũng là một số hữu tỉ". Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đảo là "Nếu x^2 là một số hữu tỉ thì x là một số hữu tỉ".

c) Chẳng hạn, với $x = \sqrt{2}$ mệnh đề này sai.

7. a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu $x^2 = 1$ thì $x = 1$". Mệnh đề đảo là "nếu $x = 1$ thì $x^2 = 1$".

b) Mệnh đề đảo "Nếu $x = 1$ thì $x^2 = 1$" là đúng.

c) Với $x = -1$ thì mệnh đề $(P \Rightarrow Q)$ sai.

8. a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu x là một số nguyên thì $x + 2$ là một số nguyên".

$(Q \Rightarrow P)$: "Nếu $x + 2$ là một số nguyên thì x là một số nguyên".

Cả hai mệnh đề này đều đúng vì tổng, hiệu của hai số nguyên là một số nguyên.

9. a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu $AB = AC$ thì tam giác ABC cân". Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề đảo là "Nếu tam giác ABC cân thì $AB = AC$".

Nếu tam giác ABC cân mà có $BA = BC \neq AB$ thì mệnh đề đảo sai.

10. a) "Nếu ABC là một tam giác đều thì $AB = BC = CA$", cả hai mệnh đề đều đúng.

b) "Nếu $\widehat{C} > \widehat{A}$ thì $AB > BC$". Cả hai mệnh đề đều đúng.

c) "Nếu ABC là một tam giác vuông thì $\widehat{A} = 90^o$".

Nếu tam giác ABC vuông tại B (hoặc C) thì mệnh đề đảo sai.

11. a) Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $AB = BC = CA$.

b) Điều kiện cần và đủ để $AB > BC$ là $\widehat{C} > \widehat{A}$.

c) Điều kiện đủ để tam giác ABC vuông là $\widehat{A} = 90^o$.

12. a) Tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $AB \,//\, CD$ và $AB = CD$.

b) Tứ giác $ABCD$ là một hình chữ nhật khi và chỉ khi nó là một hình bình hành và có một góc vuông.

c) Tứ giác $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi nó là một hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

13. Mệnh đề đảo là "Nếu $f(x)$ có một nghiệm bằng 1 thì $a+b+c=0$". "Điều kiện cần và đủ để $f(x)=ax^2+bx+c$ có một nghiệm bằng 1 là $a+b+c=0$".

14. a) $\exists n \in \mathbb{Z} : n \not\vdots\, n$;

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$;

c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x < \dfrac{1}{x}$;

d) $\forall n \in \mathbb{N} : n > -n$.

15. a) Bình phương của mọi số thực đều nhỏ hơn hoặc bằng 0 (mệnh đề sai).

b) Có một số thực mà bình phương của nó nhỏ hơn hoặc bằng 0 (mệnh đề đúng).

c) Với mọi số thực x, $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ (mệnh đề sai) ;

d) Có một số thực x, mà $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ (mệnh đề đúng) ;

e) Với mọi số thực x, $x^2+x+1>0$ (mệnh đề đúng) ;

g) Có một số thực x, mà $x^2+x+1>0$ (mệnh đề đúng).

16. a) $\exists x \in \mathbb{R} : x\,.\,1 \neq x$. Mệnh đề sai.

b) $\exists x \in \mathbb{R} : x\,.\,x \neq 1$. Mệnh đề đúng.

c) $\exists n \in \mathbb{Z} : n \geq n^2$. Mệnh đề đúng.

17. a) Có ít nhất một hình vuông không phải là hình thoi. Mệnh đề sai.

b) Mọi tam giác cân là tam giác đều. Mệnh đề sai.

18. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ;

d) Sai ; e) Sai ; g) Đúng.

19. a) $A = \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \middle| n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5 \right\}$;

b) $B = \left\{ \frac{n}{n^2 - 1} \middle| n \in \mathbb{N}, 2 \le n \le 6 \right\}$.

20. a) $A = \{-16, -13, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8\}$.

b) $B = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

c) $C = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

21. a) $A = \{a, b\}$. Các tập hợp con của A là

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, A.

Vậy A có 4 tập con.

b) $A = \{a, b, c\}$. Các tập hợp con của A là

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, A.

Vậy A có 8 tập con.

c) $A = \{a, b, c, d\}$. Các tập hợp con của A là

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, A.

Vậy A có 16 tập con.

22. Giả sử x là một phần tử tuỳ ý của B, $x = 6l + 4$. Khi đó ta có thể viết $x = 3(2l + 1) + 1$ hay $x = 3k + 1$ (với $k = 2l + 1$). Suy ra $x \in A$.

Vậy $x \in B \Rightarrow x \in A$ hay $B \subset A$.

23. $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;

$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$;

$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$;

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30\}$;

$A \setminus B = \{9, 18\}$; $B \setminus A = \{5, 10, 15, 30\}$.

24. $A \cap B = \{3(2k - 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

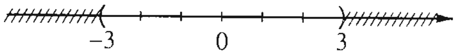
25. a) $A \cap A = A$; b) $A \cup A = A$;
c) $A \setminus A = \varnothing$; d) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
e) $A \cup \varnothing = A$; g) $A \setminus \varnothing = A$;
h) $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

26. a) $B \subset A$; b) $A \subset B$; c) $B \subset A$;
d) $A \subset B$; e) $A \subset B$; g) $A \cap B = \varnothing$.

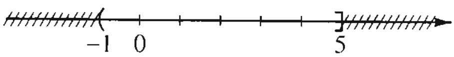
27. a) $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ là tập các số vô tỉ.

b) $C_{\mathbb{N}}2\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên lẻ.

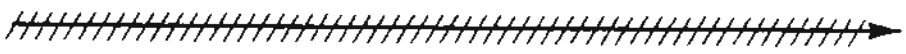
28. a) $(-3 ; 3) \cup (-1 ; 0) = (-3 ; 3)$;



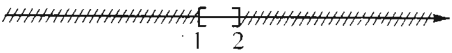
b) $(-1 ; 3) \cup [0 ; 5] = (-1 ; 5]$;



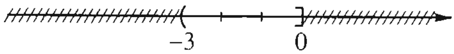
c) $(-\infty ; 0) \cap (0 ; 1) = \varnothing$;



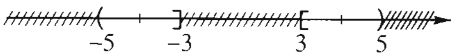
d) $(-2 ; 2] \cap [1 ; 3) = [1 ; 2]$.



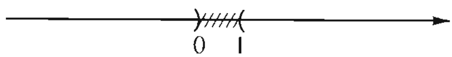
29. a) $(-3 ; 3) \setminus (0 ; 5) = (-3 ; 0]$;



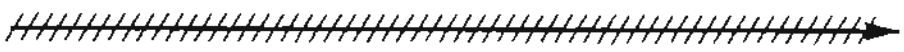
b) $(-5 ; 5) \setminus (-3 ; 3) = (-5 ; -3] \cup [3 ; 5)$;



c) $\mathbb{R} \setminus [0 ; 1] = (-\infty ; 0) \cup (1 ; +\infty)$;



d) $(-2 ; 3) \setminus (-3 ; 3) = \varnothing$.



30. a) $A \cap B = [1 ; 2) \cup (3 ; 5]$; b) $A \cap B = (-1 ; 0) \cup (4 ; 5)$.

31. a) Sai ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai.

32. a) $(a ; b) \cap (c ; d) = \varnothing$; b) $(a ; c] \cap [b ; d) = [b ; c]$;
c) $(a ; d) \setminus (b ; c) = (a ; b] \cup [c ; d)$; d) $(b ; d) \setminus (a ; c) = [c ; d)$.

33. Nếu lấy $\sqrt{3}$ bằng 1,73 thì vì $1,73 < \sqrt{3} = 1,7320508... < 1,74$ nên ta có

$$\left|\sqrt{3} - 1,73\right| < \left|1,73 - 1,74\right| = 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối trong trường hợp này không vượt quá 0,01.

Tương tự, nếu lấy $\sqrt{3}$ bằng 1,732 thì sai số tuyệt đối không vượt quá 0,001.

Nếu lấy $\sqrt{3}$ bằng 1,7321 thì sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0001.

34. Dân số Việt Nam năm 2002 là 79 720 000 người.

35. 1373 m ;

36. a) 0,0062 ; b) 0,646310.

37. a) $P : \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

b) Mệnh đề đảo là $\forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$ hay "B là một tập con của A".

38. a) $\forall x \in \mathbb{R} :\ x + (-x) = 0$ (đúng).

Phủ định là $\exists x \in \mathbb{R} :\ x + (-x) \neq 0$ (sai).

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ x.\dfrac{1}{x} = 1$ (đúng).

Phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}\ \{0\} :\ x.\dfrac{1}{x} \neq 1$ (sai).

c) $\exists x \in \mathbb{R} :\ x = -x$ (đúng).

Phủ định là $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq -x$ (sai).

39. b) ; c).

40. a) $(A \cap B) \cup A = A$; b) $(A \cup B) \cap B = B$;

c) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$; d) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

41. b) ; c) ; d).

42. a) $\varnothing$; b) $(a ; c)\setminus\{b\}$;

c) $(a ; b]$; d) $(a ; b)$.

43. a) $(-2 ; 3]$; b) $(-15 ; 14)$;

c) $(0 ; 5)$; d) $(-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty)$.

44. a) $(-\infty ; 0] \cup [1 ; 2] \cup [3 ; +\infty)$; b) $(-\infty ; 4] \cup [5 ; +\infty)$;

c) $(-2 ; 1) \cup (3 ; 7)$; d) $(-1 ; 1] \cup [4 ; 5)$.

45. a) $c \leq a < b \leq d$; b) $c < a \leq b < d$.

46. a) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $\varnothing$;

c) $\{2\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một hàm số có thể được cho bằng : a) Bảng ; b) Biểu đồ ; c) Công thức ; d) Đồ thị.

Quy ước : Khi cho hàm số $y = f(x)$ bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta coi tập xác định D của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

2. Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3. Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay giảm) trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

4. Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó. Kết quả được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên.

5. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x).$$

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

6. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Theo thông báo của Ngân hàng TMCP Phương Nam ta có bảng dưới đây về lãi suất tiền gửi tiết kiệm kiểu bậc thang với số tiền gửi từ 50 triệu VND trở lên được áp dụng từ 20-12-2005.

Kì hạn (số tháng)	3	6	12	18	24
Lãi suất (% /tháng)	0,715	0,745	0,785	0,815	0,825

Coi lãi suất y là hàm số của kì hạn x (kí hiệu $y = f(x)$).

a) Hãy tìm tập xác định của hàm số này.

b) Tìm các giá trị $f(3)$; $f(18)$.

c) Hiểu thế nào về giá trị $a.f(6)$, nếu số tiền gửi là a ($a \geq 50$ triệu) VND ?

Giải

a) Ta có $D = \{3 ; 6 ; 12 ; 18 ; 24\}$.

b) $f(3) = 0{,}715$; $f(18) = 0{,}815$.

c) Theo biểu lãi suất, nếu gửi vào quỹ tiết kiệm là a với kì hạn 6 tháng thì mỗi tháng sẽ có tiền lãi là $a.0{,}745\%$ VND.

BÀI 2

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{4x^2 + 3x - 7}$;

b) $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 3} + \sqrt{3x - 5}$.

Giải

Hai hàm số trên đều được cho bằng công thức. Theo quy ước ta có

a) $f(x)$ là một phân thức nên mẫu thức $4x^2 + 3x - 7 \neq 0$, tức là $(x - 1)(4x + 7) \neq 0$ hay $x \neq 1$ và $x \neq -\dfrac{7}{4}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1 ; -\dfrac{7}{4}\right\}$.

b) Hàm số chỉ xác định với những giá trị của x thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x \neq 3 \\ x \geq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là

$$D = \left[\frac{5}{3} ; 3\right) \cup (3 ; +\infty).$$

BÀI 3

Xét tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau trên khoảng được chỉ ra.

a) $f(x) = -2x^2 - 7$ trên khoảng $(-4 ; 0)$ và trên khoảng $(3 ; 10)$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-7}$ trên khoảng $(-\infty ; 7)$ và trên khoảng $(7 ; +\infty)$.

Giải

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -2x_1^2 - 7 - (-2x_2^2 - 7) \\ &= 2(x_2^2 - x_1^2) \\ &= -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2). \quad (*) \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2 \in (-4 ; 0)$ và $x_1 < x_2$, ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 < 0$.

Từ (*), suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-4 ; 0)$.

$\forall x_1, x_2 \in (3 ; 10)$ và $x_1 < x_2$, ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 > 0$.

Từ (*), suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(3 ; 10)$.

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1 - 7} - \frac{x_2}{x_2 - 7} = \frac{7(x_2 - x_1)}{(x_1 - 7)(x_2 - 7)}. \quad (*)$$

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty ; 7)$ và $x_1 < x_2$, từ (*) ta có $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$ (vì $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - 7 < 0$ và $x_2 - 7 < 0$).

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 7)$.

$\forall x_1, x_2 \in (7 ; +\infty)$ và $x_1 < x_2$, từ (*) ta cũng có $f(x_1) > f(x_2)$. Vậy hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(7 ; +\infty)$.

BÀI 4

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$; c) $f(x) = x^3 - 1$.

Giải

a) Dễ thấy tập xác định của hàm số là $D = \left[-\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$ và $2 \in D$,

nhưng $-2 \notin D$. Vậy hàm số đã cho không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nếu $x \in D$ thì $x \neq 0$, do đó $-x \neq 0$ và $-x \in D$. Ngoài ra, $\forall x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{-x} = -\frac{x^2+2}{x} = -f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

c) Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên thoả mãn điều kiện $x \in D$ thì $-x \in D$. Nhưng $f(-1) = -2 \neq f(1) = 0$ và $f(-1) \neq -f(1)$. Vậy hàm số $f(x)$ không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

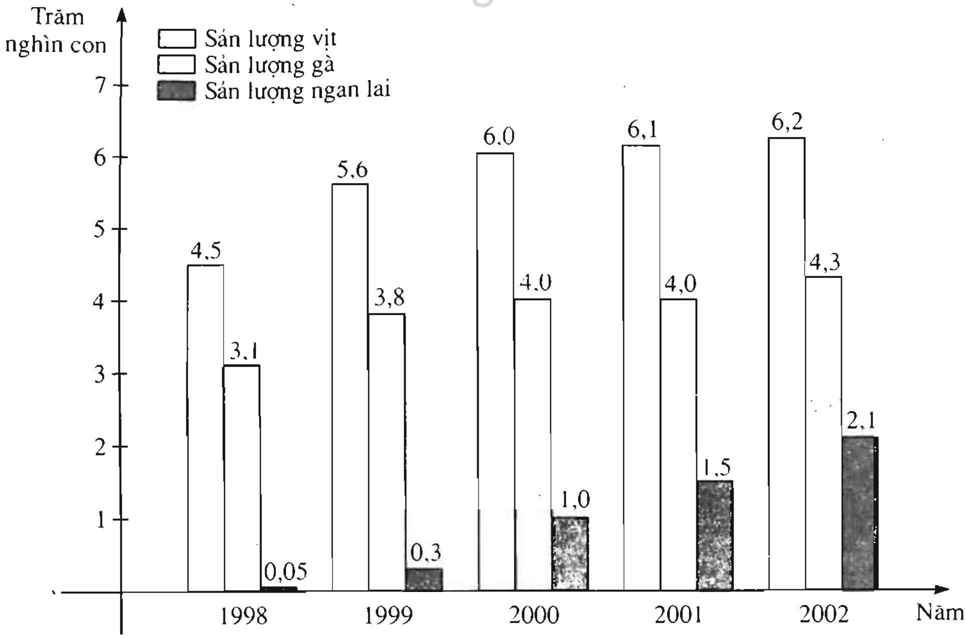
C. BÀI TẬP

1. Biểu đồ sau (h.3) biểu thị sản lượng vịt, gà và ngan lai qua 5 năm của một trang trại. Coi $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = h(x)$ tương ứng là các hàm số biểu thị sự phụ thuộc số vịt, số gà và số ngan lai vào thời gian x. Qua biểu đồ, hãy

a) Tìm tập xác định của mỗi hàm số đã nêu ;

b) Tìm các giá trị $f(2002)$, $g(1999)$, $h(2000)$ và nêu ý nghĩa của chúng ;

c) Tính hiệu $h(2002) - h(1999)$ và nêu ý nghĩa của nó.



Hình 3

2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = -x^5 + 7x - 3$;

b) $y = \dfrac{7 + x}{x^2 + 2x - 5}$;

c) $y = \sqrt{4x + 1} - \sqrt{-2x + 1}$;

d) $y = \dfrac{\sqrt{x + 9}}{x^2 + 8x - 20}$;

e) $y = \dfrac{2x + 1}{(2x + 1)(x - 3)}$.

3. Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x - 1} & \text{với } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 5$; $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$.

4. Cho hàm số

$$y = g(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x + 8} & \text{với } x < 2 \\ \sqrt{x + 7} & \text{với } x \geq 2. \end{cases}$$

Tính các giá trị $g(-3)$; $g(2)$; $g(1)$; $g(9)$.

5. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng tương ứng

a) $y = -2x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

b) $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5 ; +\infty)$;

c) $y = -\dfrac{1}{x+1}$ trên $(-3 ; -2)$ và $(2 ; 3)$.

6. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số

a) $y = -2$;

b) $y = 3x^2 - 1$;

c) $y = -x^4 + 3x - 2$;

d) $y = \dfrac{-x^4 + x^2 + 1}{x}$.

§2. HÀM SỐ $y = ax + b$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$, $(a \neq 0)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

Bảng biến thiên

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục toạ độ.

Để vẽ đường thẳng $y = ax + b$ chỉ cần xác định hai điểm khác nhau của nó.

2. Hàm số hằng $y = b$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

Hàm số hằng là hàm số chẵn ;

Đồ thị là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0 ; b)$.

3. Hàm số $y = |x|$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

Hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn ;

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

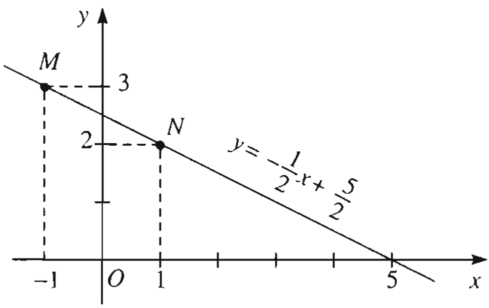
Viết phương trình dạng $y = ax + b$ của đường thẳng đi qua hai điểm $M(-1\ ;\ 3)$ và $N(1\ ;\ 2)$, vẽ đường thẳng đó.

Giải

Vì đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$ nên ta cần xác định các hệ số a và b. Đường thẳng đó đi qua $M(-1\ ;\ 3)$ và $N(1\ ;\ 2)$, tức là toạ độ của M và N thoả mãn phương trình $y = ax + b$. Ta có

$$\begin{cases} 3 = -a + b \\ 2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 5 \\ 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng đã cho có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, và đồ thị của nó được vẽ trên hình 4.

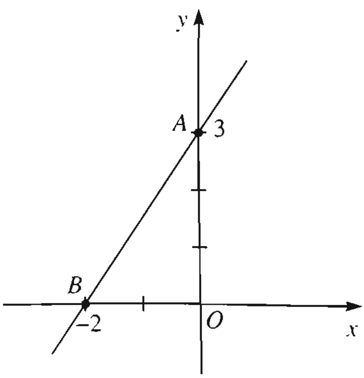


Hình 4

BÀI 2

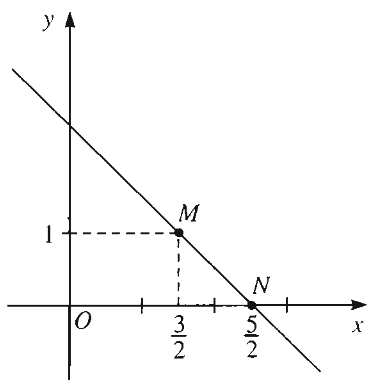
Hãy viết phương trình đường thẳng $y = ax + b$ ứng với mỗi hình sau

a)



Hình 5

b)



Hình 6

Giải

a) Đường thẳng trên hình 5 đi qua hai điểm $A(0\ ;\ 3)$ và $B(-2\ ;\ 0)$. Vì phương trình của đường thẳng có dạng $y = ax + b$ nên ta có

$$\begin{cases} 3 = b \\ 0 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng có phương trình là $y = \dfrac{3}{2}x + 3$.

b) Tương tự, với hình 6, ta có

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{3}{2}a + b \\ 0 = \dfrac{5}{2}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

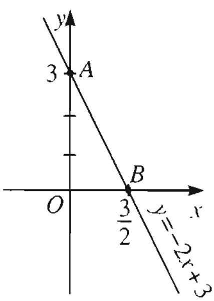
Vậy phương trình đường thẳng là $y = -x + \dfrac{5}{2}$.

BÀI 3

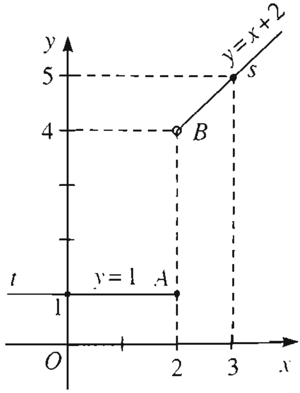
> Vẽ đồ thị của các hàm số sau
>
> a) $y = -2x + 3$; b) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{với } x > 2 \\ 1 & \text{với } x \leq 2 \end{cases}$; c) $y = -\sqrt{2}$.

Giải

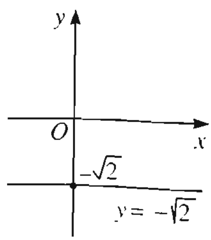
a) Ta thấy các điểm $A(0\ ;\ 3)$ và $B\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\right)$ thuộc đồ thị. Vậy đồ thị của hàm số là đường thẳng AB trên hình 7.



Hình 7



Hình 8



Hình 9

b) Đồ thị của hàm số gồm hai nửa đường thẳng (h.8).

Trong nửa khoảng $(-\infty ; 2]$ hàm số cho bởi công thức $y = 1$ nên có đồ thị là nửa đường thẳng At.

Trong khoảng $(2 ; +\infty)$ hàm số cho bởi công thức $y = x + 2$ nên có đồ thị là nửa đường thẳng Bs không kể điểm $(2 ; 4)$.

c) Hàm số $y = -\sqrt{2}$ là hàm hằng, đồ thị được vẽ ở hình 9.

BÀI 4

Vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = |x| + 2x$; b) $y = |3x - 2|$.

Giải

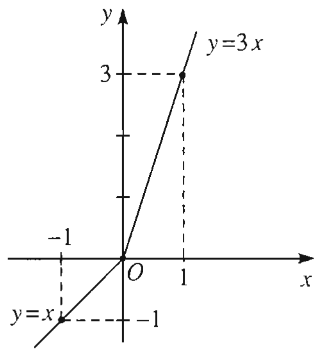
a) Do $|x| = \begin{cases} x \text{ với } x \geq 0 \\ -x \text{ với } x < 0, \end{cases}$

nên có thể viết

$$y = |x| + 2x = \begin{cases} 3x \text{ với } x \geq 0 \\ x \text{ với } x < 0. \end{cases}$$

Từ đó ta thấy hàm số đồng biến trên toàn bộ trục số.

Đồ thị hàm số đã cho được vẽ trên hình 10.



Hình 10

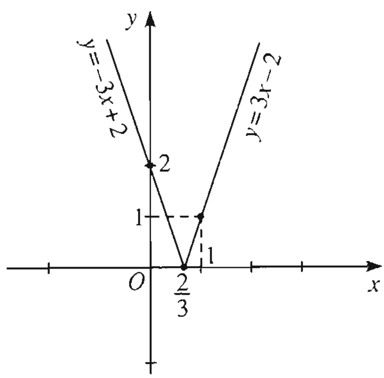
b) Ta có

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 \text{ với } x \geq \dfrac{2}{3} \\ -3x + 2 \text{ với } x < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $\qquad$ $\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
y	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$

Đồ thị hàm số đã cho được vẽ trên hình 11.



Hình 11

C. BÀI TẬP

7. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và xét tính chẵn lẻ của chúng

a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$; b) $y = \frac{4}{3}x - 1$;

c) $y = 3x$; d) $y = 5$; e) $y = \sqrt{2} - 1$.

8. Vẽ đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{với } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{với } x < 1. \end{cases}$$

9. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ và đi qua điểm

a) $M(2 ; 3)$; b) $N(-1 ; 2)$.

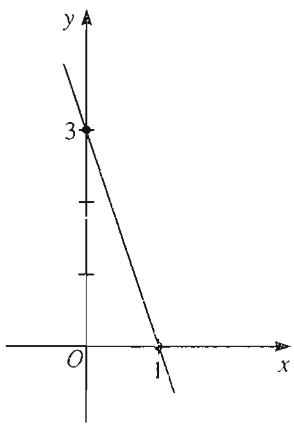
10. Xác định các hệ số a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm sau

a) $A\left(\frac{2}{3} ; -2\right)$ và $B(0 ; 1)$; b) $M(-1 ; -2)$ và $N(99 ; -2)$;

c) $P(4 ; 2)$ và $Q(1 ; 1)$.

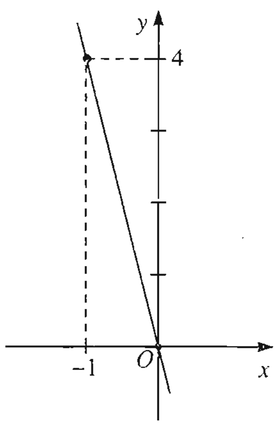
11. Viết phương trình đường thẳng $y = ax + b$ ứng với hình sau

a)



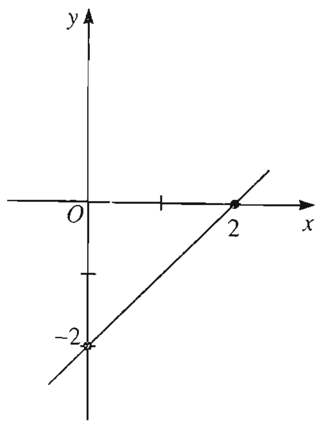
Hình 12

b)



Hình 13

c)



Hình 14

12. Cho hàm số $y = |-x-3| + |2x+1| + |x+1|$. Xét xem điểm nào trong các điểm sau đây thuộc đồ thị của nó.

a) $A(-1\ ;\ 3)$; b) $B(0\ ;\ 6)$;

c) $C(5\ ;\ -2)$; d) $D(1\ ;\ 10)$.

13. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số

a) $y = |2x-3|$; b) $y = \left|-\dfrac{3}{4}x + 1\right|$;

c) $y = |-2x| - 2x$.

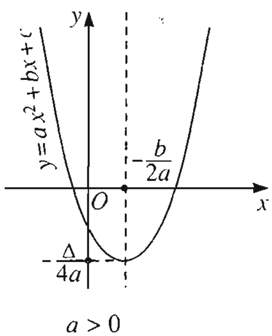
§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

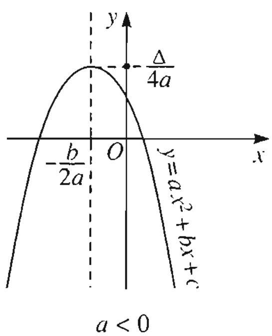
1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$ (h. 15), xuống dưới nếu $a < 0$ (h. 16).



Hình 15



Hình 16

3. Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ta thực hiện các bước sau

Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$;

Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Xác định giao điểm của parabol với các trục toạ độ (nếu có). Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị. Chẳng hạn, điểm đối xứng với giao điểm của đồ thị với trục tung qua trục đối xứng của parabol.

Dựa vào kết quả trên, vẽ parabol.

4. Bảng biến thiên

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a) $y = -x^2 + 2x - 2$; b) $y = 2x^2 + 6x + 3$.

Giải

a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai với $a = -1$; $b = 2$ và $c = -2$.

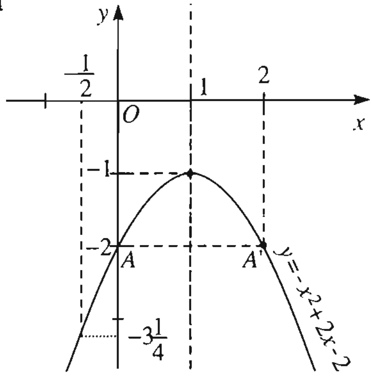
Ta có $-\dfrac{b}{2a} = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = -4$; $-\dfrac{\Delta}{4a} = -1$.

Vì $a < 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

Parabol $y = -x^2 + 2x - 2$ có đỉnh là $I(1\ ;\ -1)$, trục đối xứng là đường thẳng $d : x = 1$; giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $A\ (0\ ;\ -2)$. Điểm đối xứng với A qua d là $A'(2\ ;\ -2)$ thuộc đồ thị. Đồ thị của hàm số được vẽ trên hình 17.



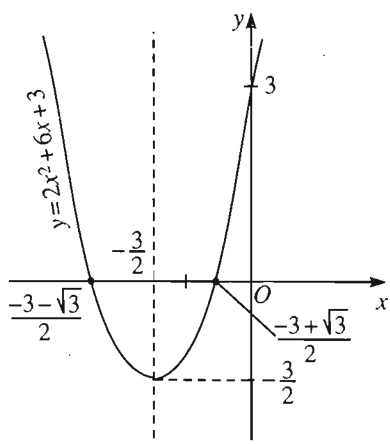
Hình 17

b) Đối với hàm số đã cho ta có $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{3}{2}$.

Vì $a > 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\frac{3}{2}$	↗ $+\infty$

Parabol $y = 2x^2 + 6x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $d : x = -\dfrac{3}{2}$; đỉnh $I\left(-\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{3}{2}\right)$; giao điểm với trục tung $(0\ ;\ 3)$ và các giao điểm với trục hoành là $\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$ và $\left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$. Đồ thị của hàm số được vẽ trên hình 18.



Hình 18

BÀI 2

Xác định hàm số bậc hai $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó

a) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại điểm $(0 ; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-1 ; -2)$;

c) Đi qua hai điểm $A(0 ; -1)$ và $B(4 ; 0)$;

d) Có hoành độ đỉnh là 2 và đi qua điểm $M(1 ; -2)$.

Giải

Để xác định hàm số ta phải xác định các hệ số b và c từ các điều kiện đã cho.

a) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a = -4$; $4 = 2.0 + b.0 + c \Leftrightarrow c = 4$.

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a = 4$; $-\dfrac{\Delta}{4a} = -2$

do đó $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = -2.$ (1)

Thay $a = 2$ và $b = 4$ vào (1) ta được $\dfrac{8c - 16}{8} = -2 \Leftrightarrow c = 0$.

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + 4x$.

c) Vì parabol đi qua $A(0 ; -1)$ và $B(4 ; 0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -1 = 2.0 + b.0 + c \\ 0 = 2.16 + 4.b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ 32 + 4.b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -\dfrac{31}{4}. \end{cases}$$

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - \dfrac{31}{4}x - 1$.

d) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -8$; parabol đi qua điểm $M(1, -2)$ nên

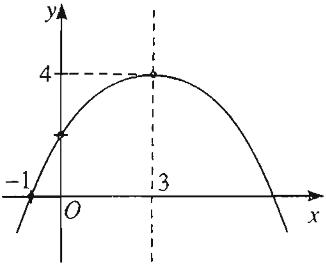
$-2 = 2.1 + b.1 + c \Leftrightarrow -2 = 2 - 8 + c \Rightarrow c = 4$.

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - 8x + 4$.

BÀI 3

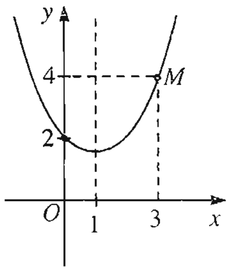
Viết phương trình của parabol $y = ax^2 + bx + c$ ứng với mỗi hình sau

a)



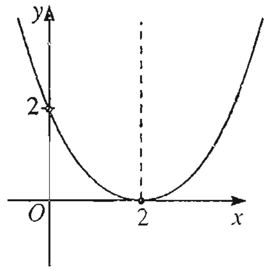
Hình 19

b)



Hình 20

c)



Hình 21

Giải

a) Trên hình 19, ta thấy điểm $I(3 ; 4)$ là đỉnh của parabol và điểm $(-1 ; 0)$ thuộc đồ thị. Ta có

$$-\frac{b}{2a} = 3 \quad (1)\ ; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = 4 \quad (2) \qquad \text{và} \qquad 0 = a - b + c \qquad (3).$$

Từ (1) suy ra $b = -6a$. Thay biểu thức của b vào (2) ta được

$$\frac{4ac - 36a^2}{4a} = 4 \Leftrightarrow c - 9a = 4 \qquad (\text{vì } a \neq 0).$$

Thay $b = -6a$ và $c = 4 + 9a$ vào (3) ta được

$$a + 6a + 4 + 9a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

Từ đó $b = -6a = \frac{3}{2}$ và $c = 4 + 9a = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$.

Vậy $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

b) Trên hình 20, ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0 ; 2)$ nên suy ra $c = 2$. Vì trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$, ngoài ra vì đồ thị đi qua điểm $M(3 ; 4)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 4 = 9a + 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 4 = 9a - 6a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -\dfrac{4}{3} \\ c = 2. \end{cases}$$

Vậy $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2.$

c) Theo hình 21, parabol có đỉnh $I(2 ; 0)$ và đi qua điểm $(0 ; 2)$.

Vậy $c = 2$; $-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$;

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 16a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ (vì a ≠ 0) và $b = -4a = -2$.

Từ đó $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$

C. BÀI TẬP

14. Xác định trục đối xứng, toạ độ đỉnh, các giao điểm với trục tung và trục hoành của parabol

a) $y = 2x^2 - x - 2$;

b) $y = -2x^2 - x + 2$;

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$;

d) $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6.$

15. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc hai

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$;

b) $y = -3x^2 - 6x + 4$;

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$;

d) $y = -2x^2 - 2.$

16. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng đồ thị của nó

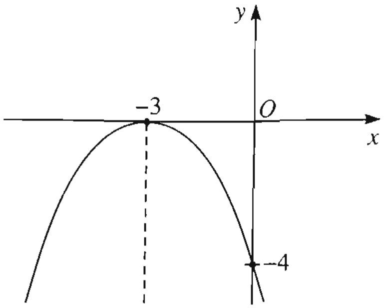
a) Đi qua hai điểm $A(1 ; -2)$ và $B(2 ; 3)$;

b) Có đỉnh là $I(-2 ; -1)$;

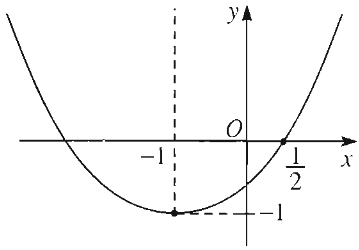
c) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $P(-2 ; 1)$;

d) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $M(3 ; 0)$.

17. Viết phương trình của parabol $y = ax^2 + bx + c$ ứng với mỗi đồ thị dưới đây.



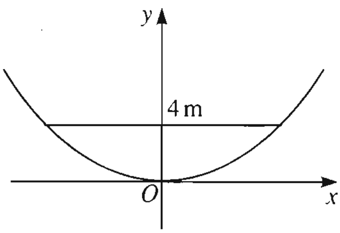
Hình 22



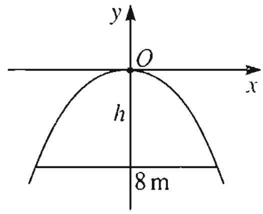
Hình 23

18. Một chiếc ăng-ten chảo parabol có chiều cao $h = 0{,}5$ m và đường kính $d = 4$ m. Ở mặt cắt qua trục ta được một parabol dạng $y = ax^2$ (h.24). Hãy xác định hệ số a.

19. Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8$ m. Hãy tính chiều cao h của cổng (h.25).



Hình 24



Hình 25

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

20. Hai hàm số $y = x + 4$ và $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ có chung một tập xác định hay không ?

21. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$, khi đó hàm số $y = -f(x)$ có chiều biến thiên như thế nào trên khoảng $(a\ ;\ b)$?

22. Tìm giao điểm của parabol $y = 2x^2 + 3x - 2$ với các đường thẳng

a) $y = 2x + 1$; b) $y = x - 4$; c) $y = -x - 4$

bằng cách giải phương trình và bằng đồ thị.

Hướng dẫn. Để xác định hoành độ giao điểm của hai đồ thị có phương trình tương ứng là $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ta phải giải phương trình $f(x) = g(x)$.

23. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$.

24. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left|\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\right|$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Tập xác định của cả ba hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = h(x)$ là

$$D = \{1998 ; 1999 ; 2000 ; 2001 ; 2002\}.$$

b) $f(2002) = 620\,000$ (con) ; $g(1999) = 380\,000$ (con) ; $h(2000) = 100\,000$ (con). Năm 2002 sản lượng của trang trại là 620 000 con vịt ; năm 1999 sản lượng là 380 000 con gà ; năm 2000 trang trại có sản lượng là 100 000 con ngan lai.

c) $h(2002) - h(1999) = 210\,000 - 30\,000 = 180\,000$ (con). Sản lượng ngan lai của trang trại năm 2002 tăng 180 000 con so với năm 1999.

2. a) $D = \mathbb{R}$;

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{6} ; -1 + \sqrt{6}\}$ vì $x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{6} \\ x = -1 + \sqrt{6}. \end{array}\right.$

c) Hàm số xác định với các giá trị của x thoả mãn

$$4x + 1 \geq 0 \text{ và } -2x + 1 \geq 0 \text{ hay } x \geq -\frac{1}{4} \text{ và } x \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định với các giá trị của x thoả mãn

$$\begin{cases} x+9 \ge 0 \\ x^2+8x-20 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -9 \\ x \ne -10 \text{ và } x \ne 2. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [-9\ ;\ +\infty) \setminus \{2\}$.

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$.

3. $f(5) = -5^2 + 2.5 = -25 + 10 = -15$ (vì $5 > 0$) ;

$f(-2) = \dfrac{2.(-2)-3}{-2-1} = \dfrac{7}{3}$ (vì $-2 < 0$) ; $f(0) = 3$; $f(2) = 0$.

4. $g(-3) = \sqrt{-3.(-3)+8} = \sqrt{17}$ (vì $-3 < 2$) ; $g(2) = 3$; $g(1) = \sqrt{5}$; $g(9) = 4$.

5. a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = -2x_1 + 3 - (-2x_2 + 3) = -2(x_1 - x_2).$$

Ta thấy nếu $x_1 > x_2$ thì $-2(x_1 - x_2) < 0$, tức là

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + 10x_1 + 9 - x_2^2 - 10x_2 - 9 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 10(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 10). \qquad (*) \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2 \in (-5\ ;\ +\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 + 10 > 0$ vì $x_1 > -5$; $x_2 > -5 \Rightarrow x_1 + x_2 > -10$.

Vậy từ (*) suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5\ ;\ +\infty)$.

c) $\forall x_1, x_2 \in (-3\ ;\ -2)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$; $x_1 + 1 < -2 + 1 < 0$; $x_2 + 1 < -2 + 1 < 0 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$. Vậy

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-3\ ;\ -2)$.

$\forall x_1, x_2 \in (2\ ;\ 3)$ và $x_1 < x_2$, tương tự ta cũng có $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2\ ;\ 3)$.

6. a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $\forall x \in D$ có $-x \in D$ và $f(-x) = -2 = f(x)$.

Hàm số là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $\forall x \in D$ có $-x \in D$ và $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 =$

$= 3x^2 - 1 = f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, nhưng $f(1) = -1 + 3 - 2 = 0$ còn $f(-1) = -1 - 3 - 2 = -6$

nên $f(-1) \neq f(1)$ và $f(-1) \neq -f(1)$.

Vậy hàm số đã cho không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

d) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên nếu $x \neq 0$ và $x \in D$ thì $-x \in D$. Ngoài ra,

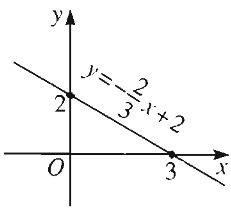
$$f(-x) = \frac{-(-x)^4 + (-x)^2 + 1}{-x} = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{-x} = -\frac{-x^4 + x^2 + 1}{x} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

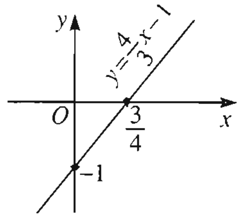
7. a) Đồ thị là hình 26. Hàm số không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ.

b) Đồ thị là hình 27. Hàm số không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ.

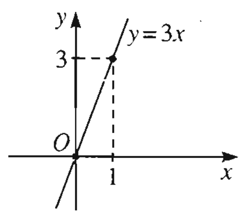
c) Đồ thị là hình 28. Hàm số là hàm số lẻ.



Hình 26



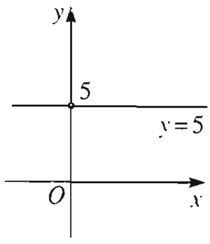
Hình 27



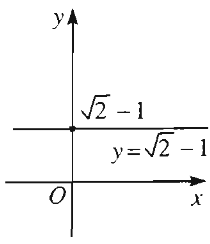
Hình 28

d) Đồ thị là hình 29. Hàm số là hàm số chẵn.

e) Đồ thị là hình 30. Hàm số là hàm số chẵn.

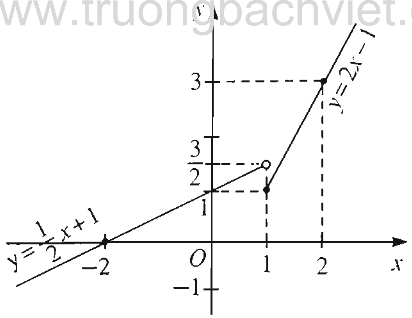


Hình 29



Hình 30

8.



Hình 31

Đồ thị hàm số được vẽ trên hình 31. Điểm $(1\ ;\ 1)$ thuộc đồ thị, điểm $\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ không thuộc đồ thị.

9. *Hướng dẫn.* Các đường thẳng đều có phương trình dạng $y = ax + b$. Các đường thẳng song song với nhau đều có cùng một hệ số a. Do đó các phương trình của các đường thẳng song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ đều có hệ số $a = 3$.

a) Phương trình cần tìm có dạng $y = 3x + b$. Vì đường thẳng đi qua điểm $M(2\ ;\ 3)$, nên ta có $3 = 3.2 + b \Leftrightarrow b = -3$.

Vậy phương trình của đường thẳng đó là $y = 3x - 3$.

b) $y = 3x + 5$.

10. *Hướng dẫn.* Để xác định các hệ số a và b ta dựa vào toạ độ các điểm mà đồ thị đi qua, lập hệ phương trình có hai ẩn a và b.

a) Vì đồ thị đi qua $A\left(\frac{2}{3}\ ;\ -2\right)$ nên ta có phương trình $a.\frac{2}{3} + b = -2$.

Tương tự, dựa vào toạ độ của $B(0\ ;\ 1)$ ta có $0 + b = 1$.

Vậy, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{3} + b = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{2} \\ b = 1. \end{cases}$$

b) $a = 0\ ;\ b = -2\ ;$

c) $a = \frac{1}{3}\ ;\ b = \frac{2}{3}$.

11. a) Ta thấy đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(0 ; 3)$ và $(1 ; 0)$. Vậy, ta có

$$\begin{cases} 3 = b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

Đường thẳng có phương trình là $y = -3x + 3$.

b) $y = -4x$;   c) $y = x - 2$.

12. *Hướng dẫn.* Để xét xem một điểm với toạ độ cho trước có thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hay không ta chỉ cần tính giá trị của hàm số tại hoành độ của điểm đã cho. Nếu giá trị của hàm số tại đó bằng tung độ của điểm đang xét thì điểm đó thuộc đồ thị, còn nếu ngược lại thì điểm đang xét không thuộc đồ thị.

a) Với điểm $A(-1 ; 3)$. Ta có

$|-(-1) - 3| + |2.(-1) + 1| + |-1 + 1| = 2 + 1 + 0 = 3$, bằng tung độ của điểm A, do đó điểm A thuộc đồ thị.

b) Điểm B không thuộc đồ thị ;

c) Điểm C không thuộc đồ thị ;

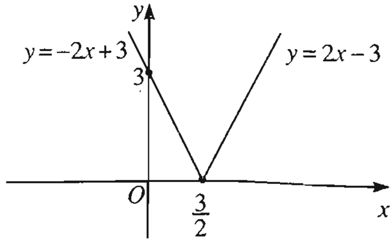
d) Điểm D không thuộc đồ thị.

13. a) Ta có thể viết

$$y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{với } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{với } x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Từ đó có bảng biến thiên và đồ thị của hàm số $y = |2x - 3|$ (h.32)

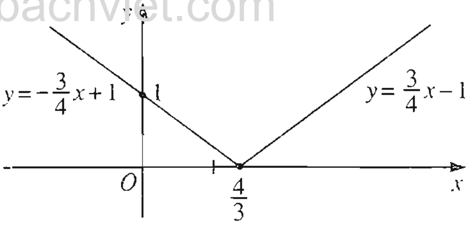
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 32

b) Bảng biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \left|-\frac{3}{4}x + 1\right|$ (h.33)

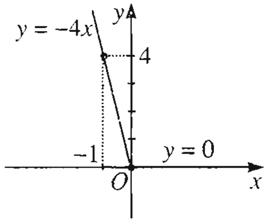
x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Hình 33

c) Ta có thể viết $y = \begin{cases} -4x & \text{với } x < 0 \\ 0 & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$

và đồ thị của hàm số $y = |-2x| - 2x$ được vẽ trên hình 34.



Hình 34

14. a) Ở đây $a = 2$; $b = -1$; $c = -2$. Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4.2.(-2) = 17$.

Trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{4}$; đỉnh $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{17}{8}\right)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -2)$.

Để tìm giao điểm với trục hoành ta giải phương trình

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Vậy các giao điểm với trục hoành là $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ và $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$.

b) Trục đối xứng $x = -\frac{1}{4}$; đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{17}{8}\right)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; 2)$; giao với trục hoành tại các điểm $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}; 0\right)$.

c) Trục đối xứng $x = 2$; đỉnh $I(2 ; 1)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -1)$; giao với trục hoành tại các điểm $(2 + \sqrt{2} ; 0)$ và $(2 - \sqrt{2} ; 0)$.

d) Trục đối xứng $x = 5$; đỉnh $I(5 ; 1)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; 6)$. Parabol không cắt trục hoành $\left(\Delta = -\frac{4}{5} < 0\right)$.

15. a) Hàm số bậc hai đã cho có $a = 2$; $b = 4$; $c = -6$;

Vậy $-\dfrac{b}{2a} = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 64$; $-\dfrac{\Delta}{4a} = -8$.

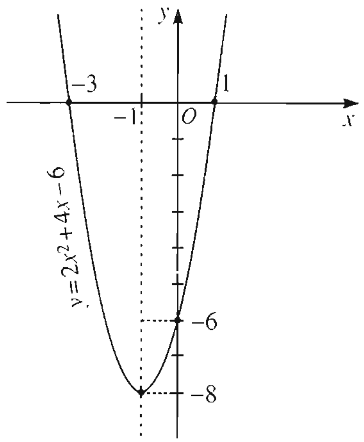
Vì $a > 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

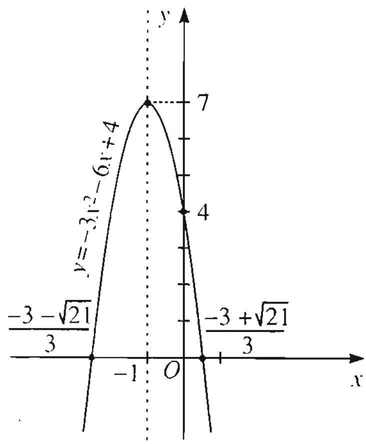
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$.

Để vẽ đồ thị ta có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$; đỉnh $I(-1 ; -8)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -6)$; giao với trục hoành tại các điểm $(-3 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = 2x^2 + 4x - 6$ được vẽ trên hình 35



Hình 35



Hình 36

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1\ ;\ +\infty)$.

Đỉnh parabol $I(-1\ ;\ 7)$. Đồ thị của hàm số $y = -3x^2 - 6x + 4$ được vẽ trên hình 36.

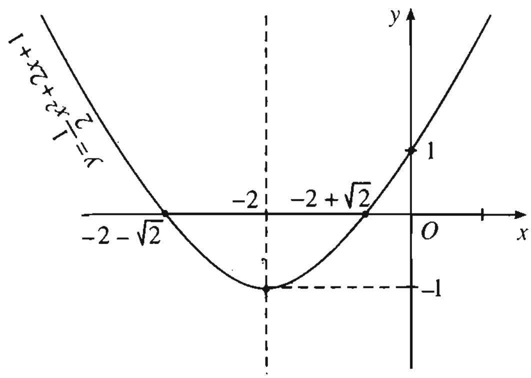
c) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

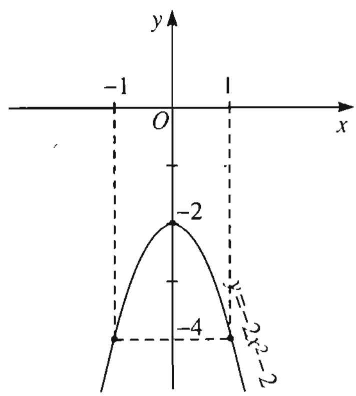
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2\ ;\ +\infty)$.

Đỉnh parabol $I(-2\ ;\ -1)$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ được vẽ trên hình 37.



Hình 37



Hình 38

d) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty\ ;\ 0]$ và nghịch biến trên nửa khoảng $[0\ ;\ +\infty\ )$ là hàm số chẵn.

Đỉnh parabol $I(0\ ;\ -2)$; đồ thị đi qua điểm $(1\ ;\ -4)$ và điểm $(-1\ ;\ -4)$.

Đồ thị hàm số $y = -2x^2 - 2$ được vẽ trên hình 38.

16. Các hàm số bậc hai cần xác định đều có $b = -4$.

a) Ta có $\begin{cases} -2 = a - 4 + c \\ 3 = 4a - 8 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1. \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x^2 - 4x - 1$.

b) $y = -x^2 - 4x - 5$; c) $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 4x - \dfrac{13}{3}$; d) $y = x^2 - 4x + 3$.

17. a) Dựa trên đồ thị (h.22) ta thấy parabol có đỉnh $I(-3\ ;\ 0)$ và đi qua điểm $(0\ ;\ -4)$. Như vậy $c = -4$; $-\dfrac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow b = 6a$. Thay $c = -4$ và $b = 6a$ vào biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 36a^2 + 16a = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{4}{9}$ (vì $a \neq 0$) và $b = -\dfrac{8}{3}$.

Vậy phương trình của parabol là $y = -\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{3}x - 4$.

b) $y = \dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{8}{9}x - \dfrac{5}{9}$.

18. Hệ số $a = \dfrac{1}{8}$.

19. Chiều cao của cổng $h = 8$ m.

20. Không.

21. Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

22. a) Xét phương trình $2x^2 + 3x - 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = 2x + 1$ có hai giao điểm là $(1\ ;\ 3)$ và $\left(-\dfrac{3}{2}; -2\right)$.

b) Xét phương trình $2x^2 + 3x - 2 = x - 4$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) có biệt thức $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, do đó phương trình vô nghiệm.

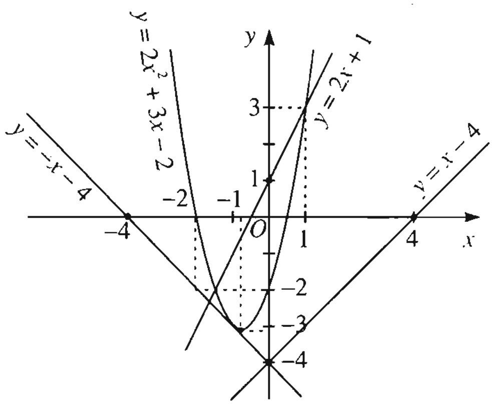
Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = x - 4$ không có giao điểm.

c) Xét phương trình

$2x^2 + 3x - 2 = -x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = -x - 4$ tiếp xúc nhau tại điểm có toạ độ $(-1 ; -3)$.

Đồ thị được vẽ trên hình 39.



Hình 39

23. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Ngoài ra

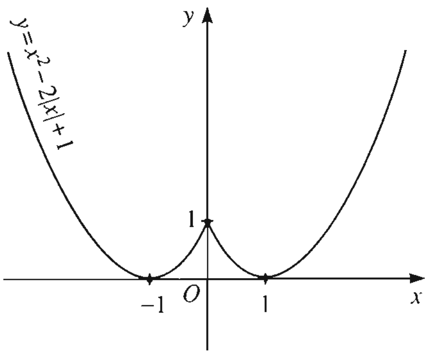
$f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = f(x)$. Hàm số là hàm số chẵn.

Đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng. Để xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của nó chỉ cần xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của nó trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$, rồi lấy đối xứng qua Oy. Với $x \geq 0$, có $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0	↗ $+\infty$

Đồ thị của hàm số đã cho được vẽ ở hình 40.



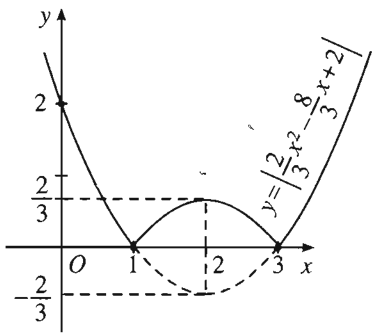
Hình 40

24. Vì $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Trong trường hợp này, ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị ứng với các nửa khoảng $(-\infty\,;1]$ và $[3\,;+\infty)$. Lấy đối xứng phần đồ thị ứng với khoảng $(1\,;3)$ qua trục hoành.

Đồ thị của hàm số $y = \left|\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\right|$ được vẽ trên hình 41 (đường liền nét)



Hình 41

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Phương trình ẩn x* là một mệnh đề chứa biến dạng $f(x) = g(x)$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của x.

2. *Điều kiện xác định của phương trình* (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

3. Nếu $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

4. *Giải một phương trình* là tìm tập tất cả các nghiệm của nó.

5. Hai phương trình $f(x) = g(x)$ (1) và $f_1(x) = g_1(x)$ (2) được gọi là *tương đương* nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng).

Kí hiệu (1) $\Leftrightarrow$ (2).

6. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

7. Nếu mỗi nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) thì ta nói phương trình (2) là *phương trình hệ quả* của phương trình (1).

Kí hiệu (1) $\Rightarrow$ (2).

Chẳng hạn, với số nguyên dương n tuỳ ý ta có

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n.$$

8. Phương trình hệ quả có thể có *nghiệm ngoại lai*, không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Muốn loại nghiệm ngoại lai ta phải thử lại vào phương trình ban đầu.

9. Ngoài các phương trình một ẩn còn có các *phương trình nhiều ẩn*. Nghiệm của một phương trình hai ẩn x, y là một cặp số thực $(x_0 ; y_0)$ thoả mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình ba ẩn x, y, z là một bộ ba số thực $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ thoả mãn phương trình đó.

10. Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số là xét xem khi nào phương trình đó vô nghiệm, khi nào có nghiệm tuỳ theo các giá trị của tham số và tìm các nghiệm đó.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Tìm điều kiện của các phương trình

a) $\dfrac{2x}{x^2-4}=\sqrt{3-x}$; b) $\dfrac{x+4}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{1-x}$.

Giải

a) Biểu thức ở vế trái có nghĩa khi $x \neq 2$ và $x \neq -2$. Biểu thức ở vế phải có nghĩa khi $x \leq 3$.

Điều kiện của phương trình là

$$x \leq 3,\ x \neq 2 \text{ và } x \neq -2.$$

b) Biểu thức ở vế trái có nghĩa khi $x > 2$, còn vế phải có nghĩa khi $x \leq 1$.

Điều kiện của phương trình là $x \leq 1$ và $x > 2$.

Ta thấy không có giá trị nào của x thoả mãn cả hai điều kiện này.

Chú ý. Khi không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện của phương trình thì phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 2

Chứng tỏ các phương trình sau vô nghiệm

a) $\dfrac{3x+1}{\sqrt{-x+2}}=\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt{x-4}-x=3+\sqrt{4-x}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x < 2$ và $x \geq 3$. Không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện này. Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \geq 4$ và $x \leq 4$, tức là $x = 4$. Giá trị này không thoả mãn phương trình đã cho (vế trái bằng -4, vế phải bằng 3).

Vậy phương trình vô nghiệm.

BÀI 3

Cho phương trình

$$(x+1)^2 = 0 \qquad (1)$$

và phương trình chứa tham số a

$$ax^2 - (2a+1)x + a = 0. \qquad (2)$$

Tìm giá trị của a sao cho phương trình (1) tương đương với phương trình (2).

Giải

Điều kiện cần. Giả sử các phương trình (1) và (2) tương đương. Thế thì, nghiệm $x = -1$ của phương trình (1) cũng phải là nghiệm của phương trình (2). Vậy

$$a.(-1)^2 - (2a+1).(-1) + a = 0 \text{ hay } a = -\frac{1}{4}.$$

Điều kiện đủ. Nếu $a = -\frac{1}{4}$ thì

$$(2) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (1).$$

Phương trình (1) và (2) tương đương.

Kết luận. Phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi $a = -\frac{1}{4}$.

BÀI 4

Giải các phương trình

a) $\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}$; b) $\sqrt{x-5} - x = 2 + \sqrt{x-5}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$. Ta có

$$\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện $x \geq -1$ và nghiệm đúng phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

b) Điều kiện của phương trình là $x \geq 5$. Ta có

$$\sqrt{x-5} - x = 2 + \sqrt{x-5}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2 + \sqrt{x-5} - \sqrt{x-5}$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

Giá trị $x = -2$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 5$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 5

Giải các phương trình

a) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}}$; b) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{x+1}}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = x + 2 \Rightarrow x = 1.$$

Giá trị $x = 1$ không thoả mãn điều kiện $x > 3$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x > -1$. Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x+1} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Giá trị $x = -2$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại. Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện và nghiệm đúng phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$.

C. BÀI TẬP

1. Viết điều kiện của các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+1} = \dfrac{1}{x}$;

b) $\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}} = 3x^2 + x + 1$;

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$;

d) $\dfrac{2x+3}{x^2-4} = \sqrt{x+1}$.

2. Xác định tham số m để các cặp phương trình sau tương đương

a) $x + 2 = 0$ và $\dfrac{mx}{x+3} + 3m - 1 = 0$;

b) $x^2 - 9 = 0$ và $2x^2 + (m-5)x - 3(m+1) = 0$.

3. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x+1} + x = \sqrt{x+1} + 2$;

b) $x - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-3} + 3$;

c) $x^2 - \sqrt{2-x} = 3 + \sqrt{x-4}$;

d) $x^2 + \sqrt{-x-1} = 4 + \sqrt{-x-1}$.

4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$; b) $\dfrac{x^2+3x+4}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4}$;

c) $\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{3x-2}} = \sqrt{3x-2}$; d) $2x+3+\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

5. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau tương đương

a) $3x-2=0$ và $(m+3)x-m+4=0$;

b) $x+2=0$ và $m(x^2+3x+2)+m^2x+2=0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Giải và biện luận phương trình*

$$ax+b=0. \quad (1)$$

Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
$a = 0$	$b \neq 0$	Phương trình (1) vô nghiệm.
	$b = 0$	Phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x.

Khi $a \neq 0$ phương trình (1) được gọi là *phương trình bậc nhất* một ẩn.

2. *Giải và biện luận phương trình bậc hai*

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0). \quad (2)$$

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	Phương trình (2) có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$	Phương trình (2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$.
$\Delta < 0$	Phương trình (2) vô nghiệm.

3. *Định lí Vi-ét*

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

4. *Phương trình trùng phương* $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$ có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt $t = x^2, (t \geq 0)$.

5. Có thể khử dấu giá trị tuyệt đối trong *phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối* nhờ sử dụng định nghĩa

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Đặc biệt, đối với phương trình $|f(x)| = |g(x)|$, ta có

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

hoặc

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

6. Khi giải *phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức bậc hai* ta thường bình phương hai vế để khử dấu căn thức và đưa tới một phương trình hệ quả.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $m^2(x+1)-1=(2-m)x$;

b) $\dfrac{(2m-1)x+2}{x-2}=m+1$.

Giải

a)

$$m^2(x+1)-1=(2-m)x$$

$$\Leftrightarrow (m^2+m-2)x=1-m^2$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m+2)x=-(m-1)(m+1).$$

Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{m+1}{m+2}$.

Nếu $m=1$ thì mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình.

Nếu $m=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq 2$. Khi đó ta có

$$\frac{(2m-1)x+2}{x-2}=m+1 \Rightarrow (2m-1)x+2=(m+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow (m-2)x=-2(m+2). \qquad (3)$$

Với $m \neq 2$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-2(m+2)}{m-2}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{-2(m+2)}{m-2} \neq 2$$

hay

$$-2m-4 \neq 2m-4 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Với $m=2$ phương trình (3) trở thành $0.x=-8$, phương trình này vô nghiệm, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Kết luận. Khi $m=2$ hoặc $m=0$ phương trình vô nghiệm.

Khi $m \neq 2$ và $m \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{-2(m+2)}{m-2}$.

BÀI 2

Cho phương trình bậc hai

$$x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 2m = 0.$$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt ;

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm và tích của chúng bằng 8 ? Tìm các nghiệm trong trường hợp đó.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi biệt thức $\Delta > 0$. Ta có

$$\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m) = -4m + 9.$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 9 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}.$$

Vậy khi $m < \frac{9}{4}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Phương trình có hai nghiệm khi $m \leq \frac{9}{4}$. Theo định lí Vi-ét ta có

$$m^2 - 2m = 8 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4. \end{array}\right.$$

Với $m = 4 > \frac{9}{4}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m = -2$ phương trình trở thành $x^2 - 7x + 8 = 0$ và có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Vậy với $m = -2$ phương trình đã cho có hai nghiệm và tích của chúng bằng 8.

Hai nghiệm đó là $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

BÀI 3

Cho phương trình $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$.

a) Xác định m để phương trình có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = \frac{13}{4}$?

Giải

a) Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq 0$ và $\Delta = 0$. Ta có

$$\Delta = (m^2 - 3)^2 - 4m^2 = m^4 - 10m^2 + 9.$$

Phương trình trùng phương $m^4 - 10m^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm $m = \pm 1$ và $m = \pm 3$.

Với $m = 1$ hoặc $m = -3$ phương trình đã cho có nghiệm kép $x = 1$.

Với $m = -1$ hoặc $m = 3$ phương trình đã cho có nghiệm kép $x = -1$.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là

$$m \neq 0 \text{ và } \Delta = m^4 - 10m^2 + 9 \geq 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3 - m^2}{m}.$$

Theo đề bài ta phải có $\dfrac{3 - m^2}{m} = \dfrac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 13m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Với $m = -4$ thì $\Delta = 105$;

Với $m = \dfrac{3}{4}$ thì $\Delta = \dfrac{945}{256}$.

Cả hai giá trị tìm được của m đều thoả mãn điều kiện $\Delta \geq 0$.

Vậy khi $m = -4$ hoặc $m = \dfrac{3}{4}$ thì tổng hai nghiệm của phương trình là $\dfrac{13}{4}$.

BÀI 4

Giải các phương trình sau

a) $|2x - 3| = x - 5$;

b) $|2x + 5| = |3x - 2|$;

c) $\dfrac{|3x - 1|}{x + 2} = |x - 3|$;

d) $|4x + 1| = x^2 + 2x - 4$.

Giải

a) *Cách 1*. Khi $x \geq \frac{3}{2}$ ta có $|2x - 3| = 2x - 3$.

Lúc đó phương trình trở thành $2x - 3 = x - 5$, suy ra $x = -2$.

Giá trị $x = -2$ không thoả mãn điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$ nên bị loại.

Khi $x < \frac{3}{2}$ ta có $|2x - 3| = -2x + 3$.

Lúc đó phương trình trở thành $-2x + 3 = x - 5$, suy ra $x = \frac{8}{3}$.

Giá trị $x = \frac{8}{3}$ không thoả mãn điều kiện $x < \frac{3}{2}$ nên bị loại.

Kết luận. Phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được phương trình hệ quả. Ta có

$$|2x - 3| = x - 5 \Rightarrow (2x - 3)^2 = (x - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 10x + 25$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 16 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{8}{3}$.

Thử lại, ta thấy cả hai giá trị $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{8}{3}$ đều không phải là nghiệm của phương trình đã cho nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được phương trình tương đương

$$|2x + 5| = |3x - 2| \Leftrightarrow (2x + 5)^2 = (3x - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 25 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 32x - 21 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 7$, $x_2 = -\frac{3}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 7$ và $x_2 = -\frac{3}{5}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -2$.

Ta chia khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Với $x \geq 3$ thì $|x - 3| = x - 3$ và $|3x - 1| = 3x - 1$.

Với điều kiện đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{3x - 1}{x + 2} = x - 3. \qquad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 3x - 1 = x^2 - x - 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$

Vì $x \geq 3$ nên chỉ có $x_2 = 5$ là nghiệm của phương trình.

Với $\frac{1}{3} \leq x < 3$ thì $|x - 3| = -x + 3$ và $|3x - 1| = 3x - 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{3x - 1}{x + 2} = -x + 3. \qquad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 3x - 1 = -x^2 + x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = -1 + 2\sqrt{2}, x_4 = -1 - 2\sqrt{2}.$

Vì $\frac{1}{3} \leq x < 3$ nên chỉ có giá trị $x_3 = -1 + 2\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình.

Với $x < \frac{1}{3}$ thì $|x - 3| = -x + 3$ và $|3x - 1| = -3x + 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{-3x + 1}{x + 2} = -x + 3. \qquad (3)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow -3x + 1 = -x^2 + x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_5 = -1$, $x_6 = 5$.

Vì $x < \frac{1}{3}$ nên chỉ có giá trị $x_5 = -1$ là nghiệm của phương trình.

Kết luận. Phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 5$, $x = 2\sqrt{2} - 1$, $x = -1$.

d) Với $x \geq -\frac{1}{4}$ thì $|4x + 1| = 4x + 1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$4x + 1 = x^2 + 2x - 4. \qquad (*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{6}$, $x_2 = 1 - \sqrt{6}$.

Vì $x \geq -\frac{1}{4}$ nên chỉ có $x_1 = 1 + \sqrt{6}$ là nghiệm của phương trình.

Với $x < -\frac{1}{4}$ thì $|4x + 1| = -4x - 1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$-4x - 1 = x^2 + 2x - 4. \qquad (**)$$

Ta có (**) $\Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = -3 + 2\sqrt{3}$, $x_4 = -3 - 2\sqrt{3}$.

Vì $x < -\frac{1}{4}$ nên chỉ có giá trị $x_4 = -3 - 2\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1 + \sqrt{6}$ và $x = -3 - 2\sqrt{3}$.

BÀI 5

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x - 9} = 2x - 5$; b) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 3x - 1$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x \geq \frac{9}{4}$. Ta có

$$\sqrt{4x-9} = 2x - 5 \Rightarrow 4x - 9 = (2x-5)^2$$
$$\Rightarrow 4x - 9 = 4x^2 - 20x + 25$$
$$\Rightarrow 2(2x^2 - 12x + 17) = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$.

Giá trị $x_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại.

Thay $x_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$ vào phương trình ban đầu ta thấy giá trị của hai vế bằng nhau.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$.

b) Điều kiện của phương trình là $x^2 - 7x + 10 \geq 0$.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = (3x-1)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$\Rightarrow 8x^2 + x - 9 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{9}{8}$.

Cả hai giá trị 1 và $-\frac{9}{8}$ đều thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho.

Thử lại ta thấy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

BÀI 6

Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $|4x - 3m| = 2x + m$; b) $|3x - m| = |2x + m + 1|$;

c) $\frac{(m+3)x + 2(3m+1)}{x+1} = (2m-1)x + 2$.

Giải

a) Ta xét hai trường hợp

Với $x \geq \frac{3m}{4}$ phương trình đã cho trở thành

$$4x - 3m = 2x + m \Leftrightarrow 2x = 4m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Ta có $2m \geq \frac{3m}{4} \Leftrightarrow m \geq 0.$

Vậy với $m \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 2m$.

Với $x < \frac{3m}{4}$ phương trình đã cho trở thành

$$-4x + 3m = 2x + m \Leftrightarrow 6x = 2m \Leftrightarrow x = \frac{m}{3}.$$

Ta có $\frac{m}{3} < \frac{3m}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{4} - \frac{m}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{5m}{12} > 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Vậy với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = \frac{m}{3}$.

Kết luận. Với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = 2m$ và $x = \frac{m}{3}$.

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

b) Ta có

$$|3x - m| = |2x + m + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - m = 2x + m + 1 & (1) \\ 3x - m = -2x - m - 1. & (2) \end{array}\right.$$

Ta thấy

$(1) \Leftrightarrow x = 2m + 1,$

$(2) \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}.$

Hai nghiệm này trùng nhau khi $2m + 1 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}.$

Kết luận. Với $m \neq -\frac{3}{5}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = 2m + 1 \text{ và } x = -\frac{1}{5}.$$

Với $m = -\frac{3}{5}$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{1}{5}$.

Ghi chú. Vì hai vế của phương trình là những biểu thức không âm nên ta cũng có thể bình phương hai vế để được một phương trình tương đương.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -1$. Khi đó ta có

$$\frac{(m+3)x + 2(3m+1)}{x+1} = (2m-1)x + 2$$

$$\Leftrightarrow (m+3)x + 2(3m+1) = [(2m-1)x + 2](x+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+3)x + 2(3m+1) = (2m-1)x^2 + (2m+1)x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x^2 + (m-2)x - 6m = 0. \qquad (*)$$

Với $m = \frac{1}{2}$ phương trình (*) trở thành

$$-\frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Giá trị $x = -2$ thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho.

Với $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (*) là một phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta = (m-2)^2 + 24m(2m-1)$$

$$= 49m^2 - 28m + 4$$

$$= (7m-2)^2 \geq 0.$$

Khi $m \neq \frac{2}{7}$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{2 - m \pm (7m-2)}{2(2m-1)}.$$

Ta đặt $x_1 = \dfrac{3m}{2m-1}$, $x_2 = -2$.

Giá trị $\dfrac{3m}{2m-1} \neq -1$ khi và chỉ khi $3m \neq -2m + 1$ hay $m \neq \dfrac{1}{5}$.

Khi $m = \dfrac{2}{7}$ phương trình (*) có nghiệm kép $x = -2$.

Kết luận

Khi $m = \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = \dfrac{1}{5}$ phương trình có một nghiệm $x = -2$.

Khi $m = \dfrac{2}{7}$ phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

Khi $m \neq \dfrac{1}{2}$, $m \neq \dfrac{1}{5}$ và $m \neq \dfrac{2}{7}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{3m}{2m-1} \text{ và } x_2 = -2.$$

C. BÀI TẬP

6. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình sau

a) $m(m-6)x + m = -8x + m^2 - 2$;

b) $\dfrac{(m-2)x+3}{x+1} = 2m - 1$;

c) $\dfrac{(2m+1)x - m}{x-1} = x + m$;

d) $\dfrac{(3m-2)x-5}{x-m} = -3$.

7. Cho phương trình

$$(m+2)x^2 + (2m+1)x + 2 = 0.$$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm bằng -3.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép ? Tìm nghiệm kép đó.

8. Cho phương trình

$$9x^2 + 2(m^2 - 1)x + 1 = 0.$$

a) Chứng tỏ rằng với $m > 2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt âm.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 + x_2 = -4$.

9. Giải các phương trình

a) $|x - 3| = |2x - 1|$;

b) $|3x + 2| = x + 1$;

c) $\dfrac{|5x - 2|}{x + 3} = |x - 2|$;

d) $|3x - 5| = 2x^2 + x - 3$.

10. Giải các phương trình

a) $\sqrt{3x - 4} = x - 3$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2x - 1$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x + 7} = x + 2$;

d) $\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5}$.

11. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình sau

a) $|3x + 2m| = x - m$;

b) $|2x + m| = |x - 2m + 2|$;

c) $mx^2 + (2m - 1)x + m - 2 = 0$;

d) $\dfrac{\sqrt{4x - 2}}{2x - 1} = m - 1$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng

$$ax + by = c,$$

trong đó a, b, c là các số thực đã cho và a, b không đồng thời bằng 0.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

trong đó cả hai phương trình đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Có hai cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc.

a) *Phương pháp thế.* Từ một phương trình của hệ biểu thị một ẩn qua ẩn kia rồi thay vào phương trình còn lại.

b) *Phương pháp cộng.* Biến đổi cho hệ số của một ẩn trong hai phương trình là hai số đối nhau rồi cộng từng vế hai phương trình lại.

3. Dạng tam giác của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \qquad\quad b_2y + c_2z = d_2 \\ \qquad\qquad\quad c_3z = d_3, \end{cases} \qquad (1)$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1x \qquad\qquad\quad = d_1 \\ a_2x + b_2y \qquad = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Cách giải. Từ phương trình cuối của hệ (1) tính được z, thay vào phương trình thứ hai tính được y rồi thay vào phương trình đầu tính được x.

Từ phương trình đầu của hệ (2) tính được x, thay vào phương trình thứ hai tính được y rồi thay vào phương trình thứ ba tính được z.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Cách giải. Dùng phương pháp Gau-xơ khử dần ẩn số để đưa về hệ phương trình dạng tam giác.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -5x + 3y = 4\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 7x + 3y = 8\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x - \dfrac{2}{5}y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{4}{5}y = -\dfrac{1}{3}\ ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,4x - 0,3y = 0,6 \\ -0,3x - 0,2y = -1,3. \end{cases}$

Giải

a) Từ phương trình thứ nhất suy ra

$$x = \frac{4y + 2}{3}.$$

Thay biểu thức của x vào phương trình thứ hai ta được

$$-5\left(\frac{4y+2}{3}\right) + 3y = 4 \Rightarrow -\frac{11}{3}y = \frac{22}{3} \Rightarrow y = -2.$$

Từ đó

$$x = \frac{4(-2) + 2}{3} = -2.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-2\ ;\ -2)$.

b) Ta có

$$\begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -28x + 35y = -21 \\ 28x + 12y = 32. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được $47y = 11 \Leftrightarrow y = \dfrac{11}{47}$.

Thay $y = \dfrac{11}{47}$ vào một trong hai phương trình của hệ đã cho ta được $x = \dfrac{49}{47}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\dfrac{49}{47}\ ;\ \dfrac{11}{47}\right)$.

c) Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x - \dfrac{2}{5}y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{4}{5}y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{4}{5}y = 1 \\ -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{12}{5}y = 1. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được $-\dfrac{16}{5}y = 2$ suy ra $y = -\dfrac{5}{8}$.

Thay $y = -\dfrac{5}{8}$ vào một trong hai phương trình đã cho ta được $x = \dfrac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{5}{8}\right)$.

d) Ta có

$$\begin{cases} 0,4x - 0,3y = 0,6 \\ -0,3x - 0,2y = -1,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,2x - 0,9y = 1,8 \\ -1,2x - 0,8y = -5,2. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được $-1,7y = -3,4$ suy ra $y = 2$.

Thay $y = 2$ vào một trong hai phương trình của hệ, ta được $x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3\,;2)$.

BÀI 2

Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\dfrac{4}{5}$ số ban đầu trừ đi 10.

Giải

Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y thì số phải tìm là $10x + y$. Điều kiện bài toán là x, y nguyên và $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Số ban đầu là $10x + y$ thì số viết theo thứ tự ngược lại là $10y + x$.

Theo giả thiết số viết theo thứ tự ngược lại phải nhỏ hơn số ban đầu, cho nên phải có $x > y$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 10y = \dfrac{4}{5}(10x + y) - 10. \end{cases}$$

Thay $x = y + 3$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$11y = 55 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 8.$$

Vậy số phải tìm là 85.

BÀI 3

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ -4x + 2y + 5z = -6 \\ 2x + 5y + 3z = 8. \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình đầu với 2 rồi cộng từng vế với phương trình thứ hai, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ \quad\ - 4y + 9z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 8. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình đầu với -1 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ \quad\ - 4y + 9z = 2 \\ \qquad 8y + z = 4. \end{cases}$$

Như vậy, ta đã khử được ẩn x trong hai phương trình cuối. Để khử ẩn y trong phương trình thứ ba, ta nhân hai vế của phương trình thứ hai với 2 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba ta được hệ phương trình có dạng tam giác

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ \quad\ - 4y + 9z = 2 \\ \qquad\qquad 19z = 8. \end{cases}$$

Từ phương trình cuối suy ra $z = \frac{8}{19}$. Thay giá trị này của z vào phương trình thứ hai, ta được $y = \frac{17}{38}$. Cuối cùng, thay các giá trị của y và z vừa tìm được vào phương trình đầu ta tìm được $x = \frac{171}{76}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x ; y ; z) = \left(\frac{171}{76} ; \frac{17}{38} ; \frac{8}{19}\right).$$

BÀI 4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = -2 \\ 5x - 3y + 2z = 10 \\ 2x - 2y - 3z = -9. \end{cases}$$

Giải

Nhận xét. Đối với hệ phương trình này, việc khử ẩn x không đơn giản lắm. Tuy nhiên, nếu chú ý đến hệ số của z ở ba phương trình, ta thấy dễ khử ẩn z ở hai phương trình cuối.

Nhân hai vế của phương trình đầu với 2 rồi cộng từng vế với phương trình thứ hai. Nhân hai vế của phương trình đầu với -3 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = -2 \\ -x + y = 6 \\ 11x - 8y = -3. \end{cases}$$

Đến đây, ta thấy dễ khử ẩn x (hoặc ẩn y) trong phương trình thứ ba. Chẳng hạn, nhân hai vế của phương trình thứ hai với 8 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba, ta được

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = -2 \\ -x + y = 6 \\ 3x = 45. \end{cases}$$

Hệ phương trình này có dạng tam giác. Giải lần lượt từ phương trình thứ ba lên ta được $x = 15$, $y = 21$, $z = -1$.

Đáp số: $(x ; y ; z) = (15 ; 21 ; -1)$.

BÀI 5

Ba cô Lan, Hương và Thuý cùng thêu một loại áo giống nhau. Số áo của Lan thêu trong 1 giờ ít hơn tổng số áo của Hương và Thuý thêu trong 1 giờ là 5 áo. Tổng số áo của Lan thêu trong 4 giờ và Hương thêu trong 3 giờ nhiều hơn số áo của Thuý thêu trong 5 giờ là 30 áo. Số áo của Lan thêu trong 2 giờ cộng với số áo của Hương thêu trong 5 giờ và số áo của Thuý thêu trong 3 giờ tất cả được 76 áo. Hỏi trong 1 giờ mỗi cô thêu được mấy áo ?

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số áo của Lan, Hương, Thuý thêu trong 1 giờ. Điều kiện là x, y, z nguyên dương.

Từ giả thiết của bài toán ta có

$$\begin{cases} x = y + z - 5 \\ 4x + 3y - 5z = 30 \\ 2x + 5y + 3z = 76 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -5 \\ 4x + 3y - 5z = 30 \\ 2x + 5y + 3z = 76. \end{cases}$$

Đưa về dạng tam giác, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - z = -5 \\ 7y - z = 50 \\ 6z = 36. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(x ; y ; z) = (9 ; 8 ; 6)$.

Kết luận. Trong một giờ, Lan thêu được 9 áo, Hương thêu được 8 áo, Thuý thêu được 6 áo.

C. BÀI TẬP

12. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 5x + 3y = -7 \\ 2x - 4y = 6 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 14y = 17 \\ 2x + 4y = 5 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{7}y = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - \dfrac{5}{7}y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$; d) $\begin{cases} -0,2x + 0,5y = 1,7 \\ 0,3x + 0,4y = 0,9. \end{cases}$

13. Một công ti có 85 xe chở khách gồm hai loại, xe chở được 4 khách và xe chở được 7 khách. Dùng tất cả số xe đó, tối đa công ti chở một lần được 445 khách. Hỏi công ti đó có mấy xe mỗi loại ?

14. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 2x - y + 3z = 18 \\ -3x + 3y + 2z = -9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 4x - y + 3z = 10. \end{cases}$

15. Giải các hệ phương trình sau bằng máy tính bỏ túi

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{3}y = \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{7}y = \dfrac{2}{9} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3,7x + 4,3y = -2,5 \\ -5,1x + 2,7y = 4,8. \end{cases}$

16. Giải các hệ phương trình sau bằng máy tính bỏ túi

a) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12 \\ -4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 0,3x - 4,7y + 2,3z = 4,9 \\ -2,1x + 3,2y + 4,5z = 7,6 \\ 4,2x - 2,7y + 3,7z = 5,7. \end{cases}$

17. Một chủ cửa hàng bán lẻ mang 1 500 000 đồng đến ngân hàng đổi tiền xu để trả lại cho người mua. Ông ta đổi được tất cả 1 450 đồng tiền xu các loại 2000 đồng, 1000 đồng và 500 đồng. Biết rằng số tiền xu loại 1 000 đồng bằng hai lần hiệu của số tiền xu loại 500 đồng với số tiền xu loại 2000 đồng. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu đồng tiền xu ?

18. Tìm giá trị của m để các hệ phương trình sau vô nghiệm

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - my = 5 \\ x + y = 7. \end{cases}$

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

19. Hãy viết điều kiện của mỗi phương trình

a) $\sqrt{-3x+2} = \dfrac{2}{x+1}$;

b) $\sqrt{x-2} + x = 3x^2 + 1 - \sqrt{-x-4}$;

c) $\dfrac{3x+5}{\sqrt{3x^2+6x+11}} = \sqrt{2x+1}$;

d) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2-9} = x+2$.

20. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau tương đương

a) $3x - 1 = 0$ và $\dfrac{3mx+1}{x-2} + 2m - 1 = 0$;

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ và $mx^2 - 4x - m + 4 = 0$.

21. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $2m(x-2) + 4 = (3-m^2)x$;

b) $\dfrac{(m+3)x}{2x-1} = 3m+2$;

c) $\dfrac{8mx}{x+3} = (4m+1)x + 1$;

d) $\dfrac{(2-m)x}{x-2} = (m-1)x - 1$.

22. Cho phương trình

$$3x^2 + 2(3m-1)x + 3m^2 - m + 1 = 0.$$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm ?

b) Giải phương trình khi $m = -1$.

23. Cho phương trình

$$(m+1)x^2 + (3m-1)x + 2m - 2 = 0.$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 + x_2 = 3$. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

24. Giải các phương trình

a) $|3x-1| = 2x-5$;

b) $|2x+1| = |4x-7|$;

c) $|5x+2| + |3x-4| = 4x+5$;

d) $\dfrac{|2x+7|}{x-1} = |3x-1|$.

25. Giải các phương trình

a) $\sqrt{5x+3} = 3x - 7$; b) $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 3x + 1$;

c) $\dfrac{\sqrt{4x^2 + 7x - 2}}{x + 2} = \sqrt{2}$; d) $\sqrt{2x^2 + 3x - 4} = \sqrt{7x + 2}$.

26. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $|2x - 5m| = 2x - 3m$; b) $|3x + 4m| = |4x - 7m|$;

c) $(m+1)x^2 + (2m-3)x + m + 2 = 0$;

d) $\dfrac{x^2 - (m+1)x - \dfrac{21}{4}}{x - 3} = 2x + m$.

27. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} -7x + 3y = -5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -0{,}5x + 0{,}4y = 0{,}7 \\ 0{,}3x - 0{,}2y = 0{,}4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{3}y = \dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{9}y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

28. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 7y + z = 5 \\ -3x + 3y - 2z = -7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = 4. \end{cases}$

29. Tìm các giá trị của a và b để các hệ phương trình sau có vô số nghiệm

a) $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases}$; b) $\begin{cases} ax + 2y = a \\ 3x - 4y = b + 1. \end{cases}$

30. Một gia đình có bốn người lớn và ba trẻ em mua vé xem xiếc hết 370 000 đồng. Một gia đình khác có hai người lớn và hai trẻ em cũng mua vé xem xiếc tại rạp đó hết 200 000 đồng. Hỏi giá vé người lớn và giá vé trẻ em là bao nhiêu ?

31. Nếu lấy một số có hai chữ số chia cho tích hai chữ số của nó thì được thương là 2 và dư là 18. Nếu lấy tổng bình phương các chữ số của số đó cộng với 9 thì được số đã cho. Hãy tìm số đó.

32. Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thuỷ điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở 7,5 tấn. Nếu dùng tất cả xe 7,5 tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại ?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Biểu thức vế trái có nghĩa khi $x > 1$ và biểu thức vế phải có nghĩa khi $x > -3$. Từ đó suy ra điều kiện của phương trình là $x > 1$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$, $x \neq 2$ và $x \neq -2$. Vì $x > -1$ thì $x \neq -2$ suy ra điều kiện của phương trình là $x \geq -1$ và $x \neq 2$.

2. a) Phương trình $x + 2 = 0$ có nghiệm $x = -2$.

Phương trình $\frac{mx}{x+3} + 3m - 1 = 0$ có nghiệm $x = -2$ khi $-2m + 3m - 1 = 0$ suy ra $m = 1$.

Với $m = 1$, phương trình trở thành $\frac{x}{x+3} + 2 = 0$ và có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Vậy hai phương trình tương đương khi $m = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 9 = 0$ có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Giá trị $x = 3$ là nghiệm của phương trình

$$2x^2 + (m-5)x - 3(m+1) = 0 \qquad (1)$$

khi $18 + 3(m-5) - 3(m+1) = 0$.

Đẳng thức trên thoả mãn với mọi m.

Giá trị $x = -3$ là nghiệm của phương trình (1) khi

$$18 - 3(m-5) - 3(m+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Khi $m = 5$ phương trình (1) trở thành

$$2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Vậy với $m = 5$ hai phương trình đã cho tương đương.

3. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$. Ta có

$$\sqrt{x+1} + x = \sqrt{x+1} + 2 \Rightarrow x = 2.$$

Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) Điều kiện của phương trình là $x \leq 3$ và $x \geq 3$ hay $x = 3$.

Giá trị $x = 3$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \leq 2$ và $x \geq 4$. Không có số thực nào thoả mãn đồng thời hai điều kiện này.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện của phương trình là $x \leq -1$. Ta có

$$x^2 + \sqrt{-x-1} = 4 + \sqrt{-x-1} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Chỉ có giá trị $x_2 = -2$ thoả mãn điều kiện $x \leq -1$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

4. a) Điều kiện của phương trình là $x > 1$. Ta có

$$\frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 3x^2 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Cả hai giá trị $x = 1$, $x = -1$ đều không thoả mãn điều kiện $x > 1$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x > -4$. Ta có

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4} \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Cả hai giá trị $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$ đều thoả mãn điều kiện $x > -4$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$.

c) Điều kiện của phương trình là $x > \frac{2}{3}$. Ta có

$$\frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{3x-2}} = \sqrt{3x-2} \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 3x - 2$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $x = \frac{4}{3}$ thoả mãn điều kiện $x > \frac{2}{3}$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$. Ta có

$$2x + 3 + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2+3}{x-1}$$
$$\Rightarrow (2x+3)(x-1) + 4 = x^2 + 3$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Giá trị $x = 1$ bị loại do vi phạm điều kiện $x \neq 1$ và giá trị $x = -2$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

5. a) Phương trình $3x - 2 = 0$ có nghiệm $x = \frac{2}{3}$, thay $x = \frac{2}{3}$ vào phương trình

$(m+3)x - m + 4 = 0$, ta có

$$(m+3)\frac{2}{3} - m + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Với $m = 18$ phương trình $(m+3)x - m + 4 = 0$ trở thành $21x = 14$ hay $x = \frac{2}{3}$.

Vậy hai phương trình tương đương khi $m = 18$.

b) Phương trình $x + 2 = 0$ có nghiệm $x = -2$. Thay $x = -2$ vào phương trình

$$m(x^2 + 3x + 2) + m^2x + 2 = 0, \text{ ta có}$$

$$-2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Khi $m = 1$ phương trình thứ hai trở thành

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Khi $m = -1$ phương trình thứ hai trở thành

$$-x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x\,(x + 2) = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 0$, $x = -2$.

Vậy hai phương trình đã cho tương đương khi $m = 1$.

6. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(m^2 - 6m + 8)x = m^2 - m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m - 4)x = (m + 1)(m - 2).$$

Kết luận

Với $m \neq 2$ và $m \neq 4$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m + 1}{m - 4}$;

Với $m = 2$, mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình ;

Với $m = 4$, phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq -1$. Ta có

$$\frac{(m - 2)x + 3}{x + 1} = 2m - 1$$

$$\Rightarrow (m - 2)x + 3 = (2m - 1)(x + 1)$$

$$\Rightarrow (m + 1)x = 4 - 2m. \qquad (1)$$

Với $m = -1$ phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Với $m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{4 - 2m}{m + 1}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện $x \neq -1$ khi và chỉ khi $\dfrac{4 - 2m}{m + 1} \neq -1$ hay $-2m + 4 \neq -m - 1 \Rightarrow m \neq 5$.

Kết luận

Với $m = -1$ hoặc $m = 5$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq -1$ và $m \neq 5$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{4 - 2m}{m + 1}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\frac{(2m + 1)x - m}{x - 1} = x + m$$

$$\Leftrightarrow (2m + 1)x - m = (x + m)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = m + 2.$$

Giá trị $x = m + 2$ thoả mãn điều kiện của phương trình khi $m \neq -1$.

Kết luận

Vậy với $m = -1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$;

Với $m \neq -1$ phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = m + 2$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq m$. Khi đó ta có

$$\frac{(3m - 2)x - 5}{x - m} = -3$$

$$\Leftrightarrow (3m - 2)x - 5 = -3x + 3m$$

$$\Leftrightarrow (3m + 1)x = 3m + 5.$$

Với $m \neq -\dfrac{1}{3}$ nghiệm của phương trình cuối là $x = \dfrac{3m + 5}{3m + 1}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện của phương trình khi và chỉ khi

$$\frac{3m + 5}{3m + 1} \neq m \Rightarrow 3m + 5 \neq 3m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \text{ và } m \neq \frac{5}{3}.$$

Kết luận

Với $m = -\dfrac{1}{3}$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = \dfrac{5}{3}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq -\dfrac{1}{3}$, $m \neq -1$ và $m \neq \dfrac{5}{3}$ phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{3m + 5}{3m + 1}$.

7. a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $m \neq -2$ và $\frac{2}{m+2} < 0$, suy ra $m < -2$.

Tổng của hai nghiệm bằng -3 khi $-\frac{2m+1}{m+2} = -3 \Rightarrow m = -5$ thoả mãn điều kiện $m < -2$

Đáp số : $m = -5$.

b) Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq -2$ và $\Delta = 0$.

$$\Delta = (2m+1)^2 - 8(m+2) = 4m^2 - 4m - 15\ ;$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{3}{2}.$$

Khi $m = \frac{5}{2}$ nghiệm kép của phương trình là $x = -\frac{2m+1}{m+2} = -\frac{2}{3}$.

Khi $m = -\frac{3}{2}$ nghiệm kép của phương trình là $x = 2$.

8. a) Ta có

$\Delta' = (m^2-1)^2 - 9 = (m^2+2)(m^2-4) = (m^2+2)(m+2)(m-2)$.

Với $m > 2$ thì $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Vì $x_1x_2 = \frac{1}{9} > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu. Hơn nữa

$x_1 + x_2 = -\frac{2(m^2-1)}{9} < 0$ với mọi $m > 2$ nên hai nghiệm đều âm.

b) Ta có $\frac{-2(m^2-1)}{9} = -4 \Leftrightarrow m^2 = 19 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{19}$.

Với $m = \pm\sqrt{19}$ thì $\Delta' > 0$.

Đáp số : $m = \pm\sqrt{19}$.

9. a) *Đáp số* : $x = -2, x = \frac{4}{3}$.

b) *Đáp số* : $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{3}{4}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -3$. Ta chia trục số thành ba khoảng $\left(-\infty\ ; \frac{2}{5}\right)$; $\left[\frac{2}{5}\ ; 2\right)$; $[2\ ; +\infty)$ để khử dấu giá trị tuyệt đối.

i) Với $x \in (-\infty ; \frac{2}{5})$ phương trình đã cho trở thành

$$\frac{-5x+2}{x+3} = -x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$, nhưng chỉ có giá trị $x_2 = 2 - \sqrt{8} \in \left(-\infty ; \frac{2}{5}\right)$, giá trị $x_1 = 2 + \sqrt{8}$ bị loại.

ii) $x \in \left[\frac{2}{5} ; 2\right)$ phương trình đã cho trở thành

$$\frac{5x-2}{x+3} = -x + 2 \Rightarrow x^2 + 6x - 8 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{17}$ nhưng chỉ có giá trị $x_3 = -3 + \sqrt{17} \in \left[\frac{2}{5} ; 2\right)$, giá trị $x_4 = -3 - \sqrt{17}$ bị loại.

iii) Với $x \in [2 ; +\infty)$ phương trình đã cho trở thành

$$\frac{5x-2}{x+3} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{8}$ nhưng chỉ có giá trị $x_5 = 2 + \sqrt{8} \in [2 ; +\infty)$, giá trị $x_6 = 2 - \sqrt{8}$ bị loại.

Kết luận. Phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x = 2 \pm \sqrt{6} \text{ và } x = -3 + \sqrt{17}.$$

d) Khử dấu giá trị tuyệt đối ta có

$$2x^2 + x - 3 = \begin{cases} 3x - 5 \text{ khi } x \geq \frac{5}{3} \\ 5 - 3x \text{ khi } x < \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \text{ khi } x \geq \frac{5}{3} & (1) \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \text{ khi } x < \frac{5}{3}. & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) vô nghiệm.

Giải phương trình (2) ta có $x_1 = -1 - \sqrt{5}$; $x_2 = -1 + \sqrt{5}$.

Đáp số : $x = -1 - \sqrt{5}$; $x = -1 + \sqrt{5}$.

10. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq \frac{4}{3}$.

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$3x - 4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 13 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{2}$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện $x \geq \frac{4}{3}$ nhưng khi thay vào phương trình ban đầu thì giá trị $\frac{9 - \sqrt{29}}{2}$ bị loại (vế trái dương nhưng vế phải âm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$.

b) Điều kiện của phương trình là $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2x + 3 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Khi thay các giá trị này vào phương trình ban đầu thì giá trị $\frac{1 - \sqrt{7}}{3}$ bị loại.

Đáp số : $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

c) Điều kiện của phương trình là $2x^2 + 3x + 7 > 0$.

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 7} = x + 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 7 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0.$$

Phương trình cuối vô nghiệm, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện của phương trình là $3x^2 - 4x - 4 \geq 0$ và $2x + 5 \geq 0$.

$$\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 2x + 5$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn các điều kiện và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$, $x = 3$.

11. a) Với $x \geq -\frac{2m}{3}$ phương trình đã cho trở thành

$$3x + 2m = x - m \Leftrightarrow 2x = -3m \Leftrightarrow x = -\frac{3m}{2}.$$

Ta có

$$-\frac{3m}{2} \geq -\frac{2m}{3} \Leftrightarrow -9m \geq -4m$$
$$\Leftrightarrow 5m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Với $x < -\frac{2m}{3}$ phương trình đã cho trở thành

$$-3x - 2m = x - m \Leftrightarrow 4x = -m \Leftrightarrow x = -\frac{m}{4}.$$

Ta có

$$-\frac{m}{4} < -\frac{2m}{3} \Leftrightarrow -3m < -8m$$
$$\Leftrightarrow 5m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết luận

Với $m > 0$ phương trình vô nghiệm ;

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm là $x = 0$;

Với $m < 0$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{3m}{2}$ và $x_2 = -\frac{m}{4}$.

b) $$|2x + m| = |x - 2m + 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x + m = x - 2m + 2 & (1) \\ 2x + m = -x + 2m - 2. & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x = -3m + 2$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 3x = m - 2 \Leftrightarrow x = \frac{m - 2}{3}$.

Vậy với mọi giá trị của m phương trình có nghiệm là

$$x_1 = -3m + 2 \text{ và } x_2 = \frac{m-2}{3}.$$

c) $m = 0$ phương trình trở thành

$$-x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$m \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình bậc hai, có $\Delta = 4m + 1$.

Với $m < -\frac{1}{4}$ phương trình vô nghiệm ;

Với $m \geq -\frac{1}{4}$ nghiệm của phương trình là

$$x_{1,2} = \frac{1 - 2m \pm \sqrt{4m+1}}{2m}.$$

d) Điều kiện của phương trình là $x > \frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó vế trái dương, nên vế phải cũng dương hay $m > 1$.
Lúc đó ta có

$$\frac{\sqrt{4x-2}}{2x-1} = m - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2(2x-1)} = (m-1)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)}\left[\sqrt{2} - (m-1)\sqrt{2x-1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\sqrt{2x-1} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2(2x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(m-1)^2 + 2}{2(m-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}.$$

Giá trị $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}$ thoả mãn điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

Kết luận. Với $m \leq 1$ phương trình vô nghiệm.

Với $m > 1$ nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}$.

12. a) *Đáp số :* $x = -\frac{5}{13}$, $y = -\frac{22}{13}$.

b) Hệ phương trình vô nghiệm.

c) *Đáp số* : $x = \frac{11}{21}$, $y = \frac{13}{45}$.

d) *Đáp số* : $x = -1$, $y = 3$.

13. Gọi x là số xe 4 chỗ, y là số xe 7 chỗ. Điều kiện là x và y nguyên dương.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 85 \\ 4x + 7y = 445 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 35. \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện của bài toán)}$$

Vậy công ti có 50 xe 4 chỗ và 35 xe 7 chỗ.

14.

a) $$\begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 2x - y + 3z = 18 \\ -3x + 3y + 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 3y + z = -6 \\ 6z = 21. \end{cases}$$

Đáp số : $(x\,;\,y\,;\,z) = \left(\frac{13}{6}\,;\,-\frac{19}{6}\,;\,\frac{7}{2}\right)$.

b) $$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 4x - y + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ -5y - z = -16 \\ 0y + 0z = -2. \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm.

15. *Đáp số* : a) $(x\,;\,y) = \left(\frac{1412}{2169}\,;\,-\frac{161}{1205}\right)$; b) $(x\,;\,y) \approx (-0{,}86\,;\,0{,}16)$.

16. *Đáp số* : a) $(x_1\,;\,x_2\,;\,x_3) \approx (-2{,}52\,;\,3{,}2\,;\,-1{,}35)$;

b) $(x\,;\,y\,;\,z) \approx (-0{,}29\,;\,-0{,}22\,;\,1{,}71)$.

17. Gọi x, y, z lần lượt là số đồng tiền xu loại 2000 đồng, 1000 đồng, 500 đồng.

Điều kiện là x, y, z nguyên dương.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1450 \\ 2000x + 1000y + 500z = 1500000 \\ y = 2(z - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1450 & (1) \\ 4x + 2y + z = 3000 & (2) \\ 2x + y - 2z = 0. & (3) \end{cases}$$

Trừ từng vế tương ứng của phương trình (2) với phương trình (1) ta được

$$3x + y = 1550. \qquad (4)$$

Cộng từng vế tương ứng của các phương trình (1), (2) và (3) ta có

$$7x + 4y = 4450. \qquad (5)$$

Giải hệ gồm hai phương trình (4) và (5) ta được

$$x = 350,\ y = 500.$$

Thay các giá trị của x, y vào phương trình (1) ta được $z = 600$.

Vậy cửa hàng đổi được 350 đồng tiền xu loại 2000 đồng, 500 đồng tiền xu loại 1000 đồng và 600 đồng tiền xu loại 500 đồng.

18. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow (m + 3)x = 11.$

Phương trình cuối vô nghiệm khi $m = -3$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi $m = -3$.

b) $\begin{cases} 2x - my = 5 \\ x + y \quad\ = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - my = 5 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \Rightarrow (m + 2)y = 9.$

Phương trình cuối vô nghiệm khi $m = -2$.

Vậy với $m = -2$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

19. a) $x \le \frac{2}{3}$ và $x \ne -1$.

b) $x \ge 2$ và $x \le -4$. Không có số thực x nào thoả mãn điều kiện của phương trình.

c) $3x^2 + 6x + 11 > 0$ và $x \ge -\frac{1}{2}\cdot$ Vì ta có $3x^2 + 6x + 11 = 3(x + 1)^2 + 8 > 0$ với mọi x, nên điều kiện của phương trình là $x \ge -\frac{1}{2}\cdot$

d) $x \ge -4$ và $x \ne 3$, $x \ne -3$.

20. a) Hai phương trình tương đương khi $m = \frac{8}{7}\cdot$

b) Hai phương trình tương đương khi $m = -\frac{4}{3}\cdot$

21. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(m-1)(m+3)x = 4(m-1).$$

Với $m \neq 1$ và $m \neq -3$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{m+3}$;

Với $m = 1$ mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình ;

Với $m = -3$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq \dfrac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$\frac{(m+3)x}{2x-1} = 3m+2 \quad \Leftrightarrow (m+3)x = (3m+2)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow (5m+1)x = 3m+2.$$

Nếu $m \neq -\dfrac{1}{5}$ thì phương trình cuối có nghiệm $x = \dfrac{3m+2}{5m+1}$.

Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho khi

$$\frac{3m+2}{5m+1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6m+4 \neq 5m+1 \Leftrightarrow m \neq -3.$$

Nếu $m = -\dfrac{1}{5}$ phương trình cuối vô nghiệm.

Kết luận

Với $m = -\dfrac{1}{5}$ hoặc $m = -3$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m \neq -\dfrac{1}{5}$ và $m \neq -3$ nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{3m+2}{5m+1}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -3$. Khi đó ta có

$$\frac{8mx}{x+3} = (4m+1)x+1 \Leftrightarrow 8mx = [(4m+1)x+1](x+3)$$

$$\Leftrightarrow (4m+1)x^2 + 4(m+1)x + 3 = 0. \qquad (1)$$

Với $m = -\dfrac{1}{4}$ phương trình (1) trở thành

$$3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $m \neq -\dfrac{1}{4}$ thì phương trình (1) là một phương trình bậc hai có

$$\Delta' = (2m-1)^2 \geq 0.$$

Lúc đó phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1 = -\frac{3}{4m+1},\ x_2 = -1.$$

Ta có $-\frac{3}{4m+1} \neq -3 \Leftrightarrow 4m + 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0.$

Kết luận

Với $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{4}$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

Với $m \neq 0$ và $m \neq -\frac{1}{4}$ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = -1 \text{ và } x = -\frac{3}{4m+1}.$$

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 2$.

Khi đó ta có $\frac{(2-m)x}{x-2} = (m-1)x - 1 \Leftrightarrow (2-m)x = (x-2)[(m-1)x-1]$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - (m+1)x + 2 = 0. \quad (2)$$

Với $m = 1$ phương trình (2) có dạng

$$-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $m \neq 1$ thì phương trình (2) là một phương trình bậc hai có

$$\Delta = (m-3)^2 \geq 0.$$

Lúc đó phương trình (2) có hai nghiệm

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{m-1}.$$

Ta có $\frac{2}{m-1} \neq 2 \Leftrightarrow m - 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2.$

Kết luận

Với $m = 1$ hoặc $m = 2$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = 1 \text{ và } x = \frac{2}{m-1}.$$

22. a) Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0$.

Xét $\Delta' = (3m-1)^2 - 3(3m^2 - m + 1) = -3m - 2$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3m - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

b) Khi $m = -1$ phương trình đã cho trở thành $3x^2 - 8x + 5 = 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{3}$.

23. Với $m \neq -1$ ta có $\Delta = (m-3)^2 \geq 0$, do đó phương trình luôn luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Xét $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1-3m}{m+1} = 3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Lúc đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 4$.

24. a) Với điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$ phương trình có dạng

$$3x - 1 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = -4.$$

Giá trị này không thoả mãn điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$ nên bị loại.

Với điều kiện $x < \frac{1}{3}$ phương trình có dạng $-3x + 1 = 2x - 5$.

Ta có $$-3x + 1 = 2x - 5 \Leftrightarrow 5x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}.$$

Giá trị này cũng không thoả mãn điều kiện $x < \frac{1}{3}$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta có

$$|2x+1| = |4x-7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 4x - 7 \\ 2x + 1 = -4x + 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

c) Chia trục số thành ba khoảng $\left(-\infty ; -\frac{2}{5}\right)$, $\left[-\frac{2}{5} ; \frac{4}{3}\right)$, $\left[\frac{4}{3} ; +\infty\right)$.

i) Với $x \in \left(-\infty ; -\frac{2}{5}\right)$ phương trình có dạng

$$-5x - 2 - 3x + 4 = 4x + 5. \qquad (1)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow 12x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Giá trị $-\frac{1}{4} \notin \left(-\infty ; -\frac{2}{5}\right)$ nên bị loại.

ii) Với $x \in \left[-\frac{2}{5} ; \frac{4}{3}\right)$ phương trình có dạng

$$5x + 2 - 3x + 4 = 4x + 5. \qquad (2)$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Giá trị $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{2}{5} ; \frac{4}{3}\right)$ nên là nghiệm của phương trình

iii) Với $x \in \left[\frac{4}{3} ; +\infty\right)$ phương trình có dạng

$$5x + 2 + 3x - 4 = 4x + 5. \qquad (3)$$

$$(3) \quad \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$$

Giá trị $\frac{7}{4} \in \left[\frac{4}{3} ; +\infty\right)$ nên là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{7}{4}$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$.

i) Với $x < -\frac{7}{2}$ phương trình có dạng

$$\frac{-2x - 7}{x - 1} = -3x + 1. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Cả hai giá trị này đều lớn hơn $-\frac{7}{2}$ nên bị loại.

ii) Với $-\frac{7}{2} \leq x < \frac{1}{3}$ phương trình có dạng

$$\frac{2x+7}{x-1} = -3x + 1. \qquad (2)$$

$$(2) \quad \Rightarrow 3x^2 - 2x + 8 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm.

iii) Với $x \geq \frac{1}{3}$ phương trình có dạng

$$\frac{2x+7}{x-1} = 3x - 1. \qquad (3)$$

$$(3) \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Giá trị $1 - \sqrt{3} < \frac{1}{3}$ nên bị loại, giá trị $1 + \sqrt{3}$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt{3}$.

25. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -\frac{3}{5}$. Ta có

$$\sqrt{5x+3} = 3x - 7 \Rightarrow 5x + 3 = (3x-7)^2$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 - 47x + 46 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \frac{47 + \sqrt{553}}{18}$, $x_2 = \frac{47 - \sqrt{553}}{18}$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, tuy nhiên khi thay vào phương trình đã cho thì giá trị x_2 bị loại.

Đáp số : $x = \frac{47 + \sqrt{553}}{18}$.

b) Điều kiện của phương trình là $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$. Ta có

$$\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 3x + 1 \quad \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 + 8x + 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, nhưng thử vào phương trình đã cho thì giá trị $x_2 = -1$ bị loại.

Đáp số : $x = -\frac{1}{3}$.

c) Điều kiện của phương trình là $4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ và $x \neq -2$. Ta có

$$\frac{\sqrt{4x^2 + 7x - 2}}{x + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 2(x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -2$.

Chỉ có giá trị $x_1 = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Đáp số : $x = \frac{5}{2}$.

d) Điều kiện của phương trình là $2x^2 + 3x - 4 \geq 0$ và $7x + 2 \geq 0$. Ta có

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 4} = \sqrt{7x + 2} \Rightarrow 2x^2 + 3x - 4 = 7x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, nhưng giá trị $x_2 = -1$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại, giá trị $x_1 = 3$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

26. a) Với $x \geq \frac{5m}{2}$ phương trình đã cho trở thành

$$2x - 5m = 2x - 3m \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thì mọi $x \geq 0$ đều là nghiệm của phương trình.

Với $x < \frac{5m}{2}$ phương trình đã cho trở thành

$$-2x + 5m = 2x - 3m$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Vì $x < \frac{5m}{2}$ nên $2m < \frac{5m}{2} \Leftrightarrow m > 0.$

Kết luận

Với $m > 0$ phương trình có nghiệm là $x = 2m$.

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm là mọi số thực không âm.

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

b) Ta có

$$|3x + 4m| = |4x - 7m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 4m = 4x - 7m \\ 3x + 4m = -4x + 7m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11m \\ x = \dfrac{3m}{7}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 11m$ và $x = \dfrac{3m}{7}$ với mọi giá trị của m.

c) Với $m = -1$ phương trình đã cho trở thành

$$-5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Với $m \neq -1$ phương trình đã cho là một phương trình bậc hai, có biệt thức $\Delta = -24m + 1$.

Nếu $m \leq \dfrac{1}{24}$ thì $\Delta \geq 0$, phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{1 - 24m}}{2(m + 1)}.$$

Kết luận

Với $m > \dfrac{1}{24}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \leq \dfrac{1}{24}$ và $m \neq -1$ phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{1 - 24m}}{2(m + 1)}.$$

Với $m = -1$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{5}$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 3$. Ta có

$$\frac{x^2 - (m + 1)x - \dfrac{21}{4}}{x - 3} = 2x + m \Rightarrow x^2 - (m + 1)x - \frac{21}{4} = (x - 3)(2x + \mathrm{m})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 5)x + \frac{21}{4} - 3m = 0.$$

Phương trình cuối luôn có nghiệm $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7-4m}{2}$.

Ta có $\frac{7-4m}{2} \neq 3 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{4}$.

Kết luận

Với $m \neq \frac{1}{4}$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{7-4m}{2}$.

Với $m = \frac{1}{4}$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

27. a) *Đáp số :* $(x ; y) = (2 ; 3)$.

b) Hệ phương trình tương đương với một phương trình $-2x + y = -3$, do đó vô số nghiệm

$$(x ; y) = (a ; 2a - 3),\ a \text{ tuỳ ý.}$$

c) *Đáp số :* $(x ; y) = (15 ; 20{,}5)$.

d) *Đáp số :* $(x ; y) = \left(-\frac{14}{11} ; -\frac{48}{55}\right)$.

28. a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 7y + z = 5 \\ -3x + 3y - 2z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 3y + 7z = 1 \\ -32z = -4. \end{cases}$

Đáp số : $(x ; y ; z) = \left(\frac{55}{24} ; \frac{1}{24} ; \frac{1}{8}\right)$.

b) $\begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ -5y + 10z = 14 \\ -5y + 10z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ -5y + 10z = 14 \\ 0y + 0z = -4. \end{cases}$

Phương trình cuối vô nghiệm, suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

29. a) $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2ay = 10 \\ 6x + 3y = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2ay = 10 \\ (3 - 2a)y = 3b - 10. \end{cases}$

Phương trình $(3 - 2a)y = 3b - 10$ vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 3b - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô số nghiệm khi $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{10}{3}$.

b) $\begin{cases} ax + 2y = a \\ 3x - 4y = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 4y = 2a \\ 3x - 4y = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 4y = 2a \\ (3 + 2a)x = b + 1 + 2a. \end{cases}$

Phương trình $(3 + 2a)x = b + 1 + 2a$ vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 + 2a = 0 \\ b + 1 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô số nghiệm khi $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = 2$.

30. Gọi x (đồng) là giá vé người lớn, y (đồng) là giá vé trẻ em (điều kiện $x > 0$, $y > 0$). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y = 370\,000 \\ 2x + 2y = 200\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100\,000 \\ -y = -30\,000. \end{cases}$$

Suy ra $y = 30\,000$, $x = 70\,000$.

Vậy giá vé người lớn là 70 000 đồng, giá vé trẻ em là 30 000 đồng.

31. Gọi a là chữ số hàng chục, b là chữ số hàng đơn vị. Điều kiện a, b nguyên, $1 \le a \le 9$ và $0 \le b \le 9$. Ta có

$$\begin{cases} 10a + b = 2ab + 18 \\ a^2 + b^2 + 9 = 10a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 9 = 2ab + 18$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = 9 \Rightarrow a - b = \pm 3.$$

Trường hợp 1

$$a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình ta được

$$11b + 30 = 2(b + 3)b + 18 \Rightarrow 2b^2 - 5b - 12 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $b_1 = 4$, $b_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Giá trị $b_2 = -\dfrac{3}{2}$ không thoả mãn điều kiện $0 \le b \le 9$ nên bị loại.

Vậy $b = 4$, suy ra $a = 7$.

Trường hợp 2

$$a - b = -3 \Rightarrow a = b - 3.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình ta được

$$11b - 30 = 2(b - 3)b + 18 \Rightarrow 2b^2 - 17b + 48 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy số phải tìm là 74.

32. Gọi x là số xe tải chở 3 tấn, y là số xe tải chở 5 tấn và z là số xe tải chở 7,5 tấn. Điều kiện x, y, z nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ 22{,}5z = 6x + 15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ -2x - 5y + 7{,}5z = 0. \end{cases}$$

Cộng từng vế phương trình thứ hai với phương trình thứ ba ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ x + 15z = 290. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với -5 rồi cộng từng vế với phương trình thứ hai ta được

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ -2x + 2{,}5z = 5 \\ x + 15z = 290. \end{cases}$$

Từ phương trình cuối suy ra $x = 290 - 15z$.

Thay giá trị tìm được của x vào phương trình thứ hai ta được

$$32{,}5z = 585 \text{ hay } z = 18.$$

Từ đó suy ra $x = 20$, $y = 19$. Các giá trị của x, y, z vừa tìm được thoả mãn điều kiện của bài toán.

Vậy có 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để so sánh hai số, hai biểu thức A và B ta xét dấu của hiệu $A - B$

$$A \le B \Leftrightarrow A - B \le 0$$

$$A < B \Leftrightarrow A - B < 0.$$

2. Để chứng minh một bất đẳng thức ta thường sử dụng các tính chất cho trong bảng sau

Điều kiện	Nội dung	Tên gọi
	$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$	Bắc cầu
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0,\ c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một luỹ thừa
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

3. Các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

$\lvert x\rvert \ge 0, \lvert x\rvert \ge x, \lvert x\rvert \ge -x$	
$\lvert x\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ $\lvert x\rvert \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$	$(a > 0)$
$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \le \lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	

4. Bất đẳng thức Cô-si

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad (a \ge 0, b \ge 0).$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

5. Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Xét hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D. Ta định nghĩa

a) M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M. \end{cases}$$

b) m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m. \end{cases}$$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Chứng minh rằng $2xyz \le x^2 + y^2z^2, \ \forall x, y, z.$

Giải

Xét hiệu $x^2 + y^2z^2 - 2xyz = (x - yz)^2 \ge 0.$

Vậy $x^2 + y^2z^2 \ge 2xyz.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x - yz)^2 = 0 \Leftrightarrow x = yz.$

Chú ý. Có thể chứng minh bất đẳng thức đã cho bằng phương pháp *biến đổi tương đương* như sau

$$x^2 + y^2z^2 \geq 2xyz \Leftrightarrow x^2 - 2xyz + y^2z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - yz)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

BÀI 2

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$, $\forall a \geq 1$.

Giải

Cách 1. Hai vế bất đẳng thức cần chứng minh đều dương, nên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 < \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} < (a+1) + (a-1) - 2\sqrt{a^2-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-1} < 2a - \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2-1) < \left(2a - \frac{1}{a}\right)^2 \text{ (vì } 2a \geq 2 > \frac{1}{a},\ \forall a \geq 1 \Rightarrow 2a - \frac{1}{a} > 0,\ \forall a \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^2} \text{ (đúng).}$$

Cách 2. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a}} < \dfrac{(\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a-1})^2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a-1} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a-1} < \sqrt{a+1} \text{ (đúng).}$$

BÀI 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

Giải

Cách 1. Vì $\frac{1}{x} > 0$ và $\frac{1}{1-x} > 0,\ \forall x \in (0\,;1)$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si hai lần ta có

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 2.\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{1-x}} = 2.\frac{1}{\sqrt{x.(1-x)}} \geq 2.\frac{1}{\frac{x+1-x}{2}} = 4.$$

$\Rightarrow y \geq 4,\ \forall x \in (0\,;1)$.

Xảy ra đẳng thức $y = 4$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} \\ x = 1-x \\ x \in (0\,;1) \end{cases}$ hay $x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ bằng 4 khi $x = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \geq \frac{1}{\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2} = 4.$

$\Rightarrow y \geq 4,\ \forall x \in (0\,;1)$.

Xảy ra đẳng thức $y = 4$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1-x \\ x \in (0\,;1) \end{cases}$ hay $x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ bằng 4 khi $x = \frac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP

Trong các bài tập từ 1 đến 10, cho a, b, c, d là những số dương ; x, y, z là những số thực tuỳ ý. Chứng minh rằng

1. $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

2. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$.

3. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$.

5. $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

6. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \geq \dfrac{16}{a+b+c+d}$.

7. $a^2b + \dfrac{1}{b} \geq 2a$.

8. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

9. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$.

10. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$.

11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} \quad \text{với } 0 < x < 1.$$

12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x^3 - x^4$ với $0 \leq x \leq 4$.

13. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sau trên tập xác định của nó

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}.$$

14. Chứng minh rằng $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$, $\forall x, y, z$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Điều kiện* của một bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thoả mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa.

2. Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là *tương đương* với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

3. Các phép biến đổi bất phương trình

Kí hiệu D là tập các số thực thoả mãn điều kiện của bất phương trình $P(x) < Q(x)$.

a) Phép cộng

Nếu $f(x)$ xác định trên D thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x).$$

b) Phép nhân

Nếu $f(x) > 0, \forall x \in D$ thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x);$$

Nếu $f(x) < 0, \forall x \in D$ thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x).$$

c) Phép bình phương

Nếu $P(x) \geq 0$ và $Q(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x).$$

4. ***Chú ý.*** Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình, điều kiện của bất phương trình thường bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình đã cho ta phải tìm các giá trị của ẩn đồng thời thoả mãn bất phương trình mới và điều kiện của bất phương trình đã cho.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Viết điều kiện của các bất phương trình sau

a) $\sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$;   b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{x^2-3x+2}} - 2x^2 \leq 1$.

Giải

a) Điều kiện của bất phương trình là $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

b) Điều kiện của bất phương trình là $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ hay $x \neq 1$ và $x \neq 2$.

BÀI 2

Xét xem hai bất phương trình sau có tương đương hay không ?

$$x^2 \leq x \quad \text{và} \quad x \leq 1.$$

Giải

Hai bất phương trình không tương đương, vì $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình $x^2 \leq x$ nhưng lại là nghiệm của bất phương trình $x \leq 1$.

BÀI 3

Chứng minh rằng bất phương trình sau vô nghiệm

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \geq -10.$$

Giải

Điều kiện của bất phương trình là

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện này, vì vậy bất phương trình vô nghiệm.

BÀI 4

Giải bất phương trình $\dfrac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} < 2$.

Giải

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5>0 \\ x-4<2 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 6.$$

C. BÀI TẬP

Trong các bài tập từ 15 đến 19, hãy viết điều kiện của mỗi bất phương trình và chỉ ra các cặp bất phương trình tương đương.

15. $2x-3-\dfrac{1}{x-5} < x-4-\dfrac{1}{x-5}$ và $2x-3<x-4$.

16. $x+3-\dfrac{1}{x+7} < 2-\dfrac{1}{x+7}$ và $x+3<2$.

17. $(18+x-2x^2)(4x+8) < (18+x-2x^2)(1-x)$ và $4x+8<1-x$.

18. $3x+1<x+3$ và $(3x+1)^2<(x+3)^2$.

19. $\dfrac{x+5}{x-1}<0$ và $(x+5)(x-1)<0$.

Trong các bài tập từ 20 đến 25, xét xem cặp bất phương trình nào là tương đương.

20. $x^2 \geq x$ và $x \geq 1$.

21. $x^4 \geq x^2$ và $x^2 \geq 1$.

22. $\dfrac{1}{x} \leq 1$ và $x \geq 1$.

23. $\sqrt{1-x} \leq x$ và $1-x \leq x^2$.

24. $\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq x$ và $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} \geq x$.

25. $(2-x)^2(x+1) > 2(2-x)^2$ và $x+1 > 2$.

Chứng minh rằng các bất phương trình sau vô nghiệm

26. $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}\left(\sqrt{x}+2\right)} < \dfrac{4-x^2}{(x-4)(x+5)}$.

27. $\sqrt{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2$.

28. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt[4]{x^6+1}$.

29. $4x^6 + 3 > (x^4+2)^2$.

Giải các bất phương trình và hệ bất phương trình sau

30. $x + \sqrt{x} > \left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$.

31. $\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(2\sqrt{1-x}-5\right) > \sqrt{1-x} - 3$.

32. $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$.

33. $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$.

34. $\begin{cases} -2x + \dfrac{3}{5} > \dfrac{3(2x-7)}{3} \\ x - \dfrac{1}{2} < \dfrac{5(3x-1)}{2}. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{3-x}{3} \leq \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x-1}{3} \\ 3 - \dfrac{2x+1}{5} > x + \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

36. Giải và biện luận bất phương trình theo tham số m

$$mx - m^2 > 2x - 4.$$

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

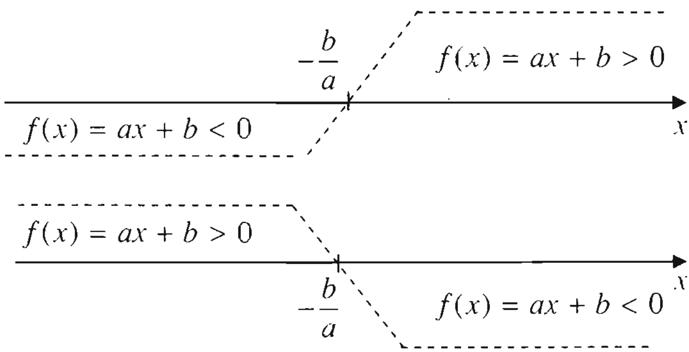
a) Bảng xét dấu

x		$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$a > 0$		$-$	0	$+$	
	$a < 0$		$+$	0	$-$	

b) Sử dụng trục số

Nếu $a > 0$ thì

Nếu $a < 0$ thì



2. Khử dấu giá trị tuyệt đối

a) Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

x		$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$\|ax + b\|$	$a > 0$		$-(ax + b)$	0	$ax + b$	
	$a < 0$		$ax + b$	0	$-(ax + b)$	

b) Đồng nhất thức $|x|^2 = x^2, \forall x$.

c) Hai cặp bất đẳng thức tương đương (điều kiện $a > 0$)

$$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a\ ;$$

$$|x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -a. \end{array}\right.$$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Giải bất phương trình $|2x - 1| \le x + 2$.

Giải

Nếu $x + 2 < 0$ hay $x < -2$ thì bất phương trình vô nghiệm. Nếu $x \ge -2$ thì

$$|2x - 1| \le x + 2 \Leftrightarrow -(x + 2) \le 2x - 1 \le (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ -1 \le 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le x \le 3.$$

BÀI 2

Giải bất phương trình

$$|x - 1| \le 2|-x - 4| + x - 2.$$

Giải

Khử dấu giá trị tuyệt đối

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$\lvert x - 1\rvert$		$-(x - 1)$		$-(x - 1)$	0	$x - 1$	
$2\lvert -x - 4\rvert$		$2(-x - 4)$	0	$-2(-x - 4)$		$-2(-x - 4)$	

a) Với $x \leq -4$ bất phương trình trở thành

$$-x + 1 \leq -2x - 8 + x - 2 \text{ hay } 1 \leq -10,$$

do đó trong khoảng $(-\infty\ ;\ -4]$, bất phương trình vô nghiệm.

b) Với $-4 < x \leq 1$ bất phương trình trở thành

$$-x + 1 \leq 2x + 8 + x - 2. \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$.

Vậy trong khoảng $(-4\ ;\ 1]$, bất phương trình có nghiệm là

$$-\frac{5}{4} \leq x \leq 1.$$

c) Với $x > 1$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$$x - 1 \leq 2x + 8 + x - 2. \quad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x \geq -7$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}.$$

Vậy mọi $x > 1$ đều là nghiệm của bất phương trình.

Tổng hợp các kết quả ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$-\frac{5}{4} \leq x \leq 1 \text{ và } x > 1 \text{ hay } -\frac{5}{4} \leq x < +\infty.$$

C. BÀI TẬP

Xét dấu các biểu thức sau

37. $f(x) = (-2x + 3)(x - 2)(x + 4)$.

38. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)}$.

39. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1} - \dfrac{1}{x + 2}$.

40. $f(x) = (4x - 1)(x + 2)(3x - 5)(-2x + 7)$.

Giải các bất phương trình sau

41. $\dfrac{3}{2-x} < 1.$

42. $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1.$

43. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x-2}.$

44. $|x-3| > -1.$

45. $|5-8x| \leq 11.$

46. $|x+2| + |-2x+1| \leq x+1.$

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình

$$ax + by \leq c \qquad (1)$$

trong đó a và b là hai số không đồng thời bằng 0.

Bước 1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng (Δ) : $ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0\,;\,y_0) \notin (\Delta)$ (ta thường lấy gốc toạ độ O)

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

2. Bỏ bờ miền nghiệm của bất phương trình (1) ta được miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Miền nghiệm của các bất phương trình $ax + by \geq c$ và $ax + by > c$ được xác định tương tự.

3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by \leq c \\ a'x + b'y \leq c'. \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $(\Delta) : ax + by = c$ và $(\Delta') : a'x + b'y = c'$.

Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình và tìm giao của chúng.

4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng $F = ax + by$, trong đó x, y nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho.

Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Miền nghiệm nhận được thường là một miền đa giác. Tính giá trị của F ứng với $(x ; y)$ là toạ độ các đỉnh của miền đa giác này rồi so sánh các kết quả từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

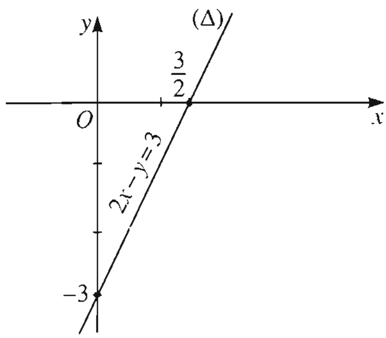
Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình

$$2x - y \leq 3.$$

Giải

Vẽ đường thẳng (Δ) có phương trình $2x - y = 3$.

Ta thấy $c = 3 > 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ (Δ), chứa gốc toạ độ (phần mặt phẳng không bị tô đen (kể cả bờ)) (h.43).



Hình 43

BÀI 2

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình

$$(H)\begin{cases} x + y + 2 \le 0 \\ x - y - 1 \le 0 \\ 2x - y + 1 \ge 0\,; \end{cases}$$

b) Tìm x, y thoả mãn (H) sao cho $F = 2x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Vẽ ba đường thẳng $x + y = -2$, $x - y = 1$, $2x - y = -1$.

Tìm toạ độ giao điểm của ba cặp đường thẳng bằng cách giải ba hệ phương trình

(a) $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}\,; \end{cases}$

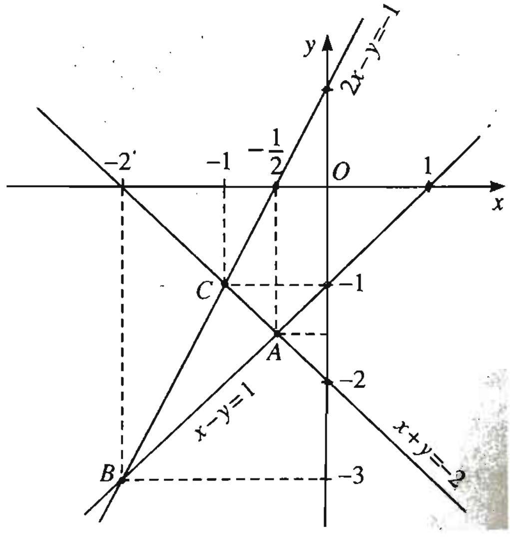
(b) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3\,; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$

Ta được ba giao điểm

$A\left(-\dfrac{1}{2}\,; -\dfrac{3}{2}\right)$; $B(-2\,; -3)$; $C(-1\,; -1)$.

Vì điểm $O(0\,;\,0)$ có toạ độ không thoả mãn bất phương trình đầu và thoả mãn hai bất phương trình cuối của hệ nên miền nghiệm của hệ (H) là miền tam giác ABC (kể cả biên) (h.44).



Hình 44

b) Lập bảng

	$A\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$	$B(-2;-3)$	$C(-1;-1)$
$F = 2x + 3y$	$-\frac{11}{2}$	-13	-5

Do đó $F = 2x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất bằng -5 tại $x = -1$, $y = -1$; $F = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -13 tại $x = -2$, $y = -3$.

C. BÀI TẬP

47. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình sau

a) $3 + 2y > 0$; b) $2x - 1 < 0$; c) $x - 5y < 2$;

d) $2x + y > 1$; e) $-3x + y + 2 \leq 0$; f) $2x - 3y + 5 \geq 0$.

48. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình sau

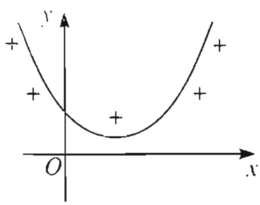
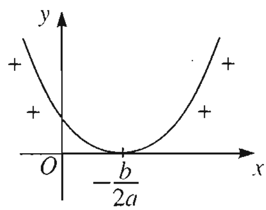
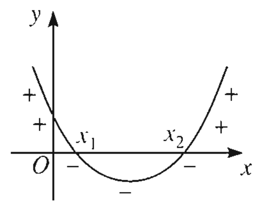
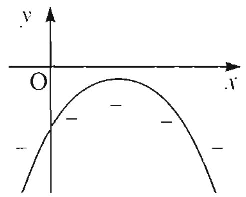
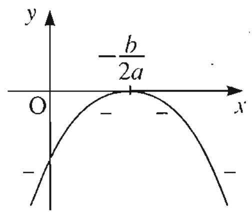
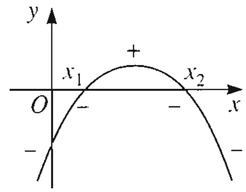
a) $\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ -3x + 5 < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3 - y < 0 \\ 2x - 3y + 1 > 0. \end{cases}$

49. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8a. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 000 000 đồng trên mỗi a, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 000 000 đồng trên mỗi a. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180 ?

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ và dấu của $f(x)$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

2. Một số điều kiện tương đương

Nếu $ax^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai $(a \neq 0)$ thì

1) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$;

2) $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\dfrac{c}{a} < 0$;

3) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$;

4) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm âm khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$;

5) $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;

6) $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$;

7) $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;

8) $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Giải bất phương trình $\dfrac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 9x + 14} \geq 0.$ (1)

Giải

Tam thức $x^2 - 9x + 14$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = 7$.

Tam thức $x^2 + 9x + 14$ có hai nghiệm phân biệt $x_3 = -7, x_4 = -2$.

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình (1)

	$-\infty$		-7		-2		2		7		$+\infty$
$x^2 - 9x + 14$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$x^2 + 9x + 14$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
Vế trái của (1)		+	‖	−	‖	+	0	−	0	+	

Từ bảng trên suy ra nghiệm bất phương trình đã cho là

$$(-\infty ; -7) \cup (-2 ; 2] \cup [7 ; +\infty).$$

BÀI 2

Xét phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có

a) Hai nghiệm phân biệt ;

b) Hai nghiệm trái dấu ;

c) Các nghiệm dương ;

d) Các nghiệm âm.

Giải

Xét $$\Delta' = (m-1)^2 - m(4m-1)$$

$$= -3m^2 - m + 1 \text{ (nếu } m \neq 0).$$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$ và $\Delta' > 0$

hay $$\begin{cases} 3m^2 + m - 1 < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

tức là $$\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < m < 0 \text{ hoặc } 0 < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

b) Phương trình có các nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\dfrac{4m-1}{m} < 0$

hay $m(4m-1) < 0$ tức là $0 < m < \dfrac{1}{4}$.

c) Phương trình có các nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$

hay $\begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ \dfrac{4m-1}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > \dfrac{1}{4} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 1. \end{cases}$

Vậy $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m < 0.$

d) Giải tương tự c), ta được kết quả $\dfrac{1}{4} < m \leq \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}.$

BÀI 3

Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$mx^2 - 4(m-1)x + m - 5 \leq 0.$$

Giải

a) Nếu $m = 0$ thì bất phương trình trở thành $4x - 5 \leq 0$, bất phương trình chỉ nghiệm đúng với $x \leq \dfrac{5}{4}$.

b) Nếu $m \neq 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 4(m-1)^2 - m(m-5) \leq 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} 3m^2 - 3m + 4 \leq 0 \\ m < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Không có giá trị nào của m thoả mãn (*).

Kết luận. Không có giá trị nào của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

C. BÀI TẬP

50. Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $2x^2 + 5x + 2$;
b) $4x^2 - 3x - 1$;
c) $-3x^2 + 5x + 1$;
d) $3x^2 + x + 5$.

Giải các bất phương trình sau

51. a) $x^2 - 2x + 3 > 0$; b) $x^2 + 9 > 6x$.

52. a) $6x^2 - x - 2 \geq 0$; b) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$.

53. a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 10} < 0$; b) $\dfrac{10 - x}{5 + x^2} > \dfrac{1}{2}$.

54. a) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + 2 > \dfrac{x - 1}{x}$; b) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{x + 3} < \dfrac{3}{x + 2}$.

Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x (các bài tập 55, 56)

55. a) $5x^2 - x + m > 0$; b) $mx^2 - 10x - 5 < 0$.

56. a) $\dfrac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$; b) $m(m + 2)x^2 + 2mx + 2 > 0$.

57. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm

a) $5x^2 - x + m \leq 0$; b) $mx^2 - 10x - 5 \geq 0$.

58. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

a) $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0$;

b) $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

59. Chứng minh rằng

$$(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2, \ \forall x, y.$$

60. Chứng minh rằng

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0, \ \forall x, y.$$

61. Chứng minh rằng

$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 16abc$, với a, b, c là ba số dương tuỳ ý.

62. Chứng minh rằng

$$a + b + c \le \frac{1}{2}\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

với a, b, c là những số dương tuỳ ý.

63. Cho a, b, c là ba số thực thoả mãn điều kiện $a^3 > 36$ và $abc = 1$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - ax - 3bc + \frac{a^2}{3}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) > 0$, $\forall x$;

b) Từ câu a) suy ra $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

64. Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số m

$$(m - 1).\sqrt{x} \le 0.$$

65. Tìm a và b để bất phương trình

$$(x - 2a + b - 1)(x + a - 2b + 1) \le 0$$

có tập nghiệm là đoạn $[0 ; 2]$.

66. Tìm a và b $(b > -1)$ để hai bất phương trình sau tương đương

$$(x - a + b)(x + 2a - b - 1) \le 0 \qquad (1)$$

và $$|x + a - 2| \le b + 1. \qquad (2)$$

67. a) Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị các hàm số sau

$$y = f(x) = |x + 3| - 1 \; ;$$

$$y = g(x) = |2x - m| \; ;$$

trong đó m là tham số.

Xác định hoành độ các giao điểm của mỗi đồ thị với trục hoành.

b) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi giá trị của x

$$|2x - m| > |x + 3| - 1.$$

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3(x - y) + y^3(y - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + y^2 + xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) \geq 0$ (đúng).

2. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 - 12y + 3(z^2 - 2z) + 14 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + 3(z - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng).

3. $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab}) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - 2\sqrt{ab}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (đúng).

4. Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ và $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra

$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ hay $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$.

5. Từ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $c + d \geq 2\sqrt{cd}$ suy ra

$$a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

$$\geq 2.2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}$$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

6. Từ $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$

suy ra $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$

hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$.

7. $a^2b+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a^2b.\frac{1}{b}} = 2a.$

8. Từ $a+b \geq 2\sqrt{ab},\ b+c \geq 2\sqrt{bc},\ c+a \geq 2\sqrt{ca}$

suy ra $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$

9. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{(a+b).2\sqrt{ab}}.$

10. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+1+1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$$\geq 3+2+2+2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

11. $y = \frac{4(x+1-x)}{x}+\frac{9(x+1-x)}{1-x}$

$$= 4+9+\frac{4(1-x)}{x}+9\cdot\frac{x}{1-x} \geq 13+2\sqrt{4\cdot\frac{(1-x)}{x}\cdot 9\cdot\frac{x}{1-x}} = 25$$

$\Rightarrow y \geq 25,\ \forall x \in (0\,;\,1).$

Đẳng thức $y = 25$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{4(1-x)}{x} = \frac{9x}{1-x} = 6 \\ x \in (0\,;\,1) \end{cases} \text{ hay } x = \frac{2}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 25 đạt tại $x = \frac{2}{5}$.

12. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4-x)$

$$\Rightarrow 3y = x.x.x(12-3x) \leq \left(\frac{x+x}{2}\right)^2\left(\frac{x+12-3x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 48y \leq [2x(12-2x)]^2 \leq \left(\frac{2x+12-2x}{2}\right)^4 = 6^4$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{6^4}{48} = 27,\ \forall x \in [0\,;\,4].$$

$$y = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 12 - 3x \\ 2x = 12 - 2x \\ x \in [0\,;\,4] \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 27 đạt được khi $x = 3$.

13. Vế phải có nghĩa khi $1 \le x \le 5$.

Ta có $y^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \ge 4, \forall x \in [1\,;\,5] \\ y^2 \le 4 + (x-1) + (5-x) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge 2 \\ y \le 2\sqrt{2} \end{cases} \forall x \in [1\,;\,5].$$

Hơn nữa $\quad y = 2 \Leftrightarrow (x-1)(5-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

$$y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2\sqrt{2}$ khi $x = 3$, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2 khi $x = 1$ hoặc $x = 5$.

14. $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \le |x - y| + |y - z|$.

Trong các bài tập từ bài **15** *đến bài* **25**, *kí hiệu bất phương trình đầu là* (1), *bất phương trình sau là* (2).

15. Điều kiện của bất phương trình (1) là $x - 5 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 5$; điều kiện của bất phương trình (2) là x tuỳ ý.

Hai bất phương trình tương đương với nhau vì cùng có tập nghiệm là

$$x < -1.$$

16. Điều kiện của bất phương trình (1) là $x + 7 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -7$; điều kiện của bất phương trình (2) là x tuỳ ý.

Hai bất phương trình không tương đương vì $x = -7$ là một nghiệm của bất phương trình (2) mà không là nghiệm của bất phương trình (1).

17. Hai bất phương trình cùng có điều kiện là x tuỳ ý.

Hai bất phương trình không tương đương vì $x = -3$ là nghiệm của bất phương trình (2) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

18. Bất phương trình (1) và bất phương trình (2) cùng có điều kiện là x tuỳ ý nhưng hai bất phương trình này không tương đương vì $x = -2$ là nghiệm bất phương trình (1) mà không là nghiệm của bất phương trình (2).

19. Điều kiện của bất phương trình (1) là $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Điều kiện của bất phương trình (2) là x tuỳ ý. Với điều kiện $x \neq 1$ thì $(x-1)^2 > 0$ nên nhân hai vế bất phương trình (1) với $(x-1)^2$ ta có

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x+5}{x-1}(x-1)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x+5)(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2)$ (vì $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình (2)).

20. Không tương đương, vì $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình (1) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (2).

21. Không tương đương, vì $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình (1) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (2).

22. Không tương đương, vì $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình (1) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (2).

23. Không tương đương, vì $x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình (2) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

24. Không tương đương, vì $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình (1) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (2).

25. Không tương đương, vì $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình (2) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

26. Điều kiện của bất phương trình là

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x - 10 > 0 \\ x \geq 0 \\ (x-4)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > 10 \\ x \neq 4 \text{ và } x \neq -5. \end{cases}$$

Không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện trên nên bất phương trình vô nghiệm.

27. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \geq 2,\ \forall x.$$

nên bất phương trình đã cho vô nghiệm.

28. $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 1}.\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$

$= 2\sqrt[4]{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = 2\sqrt[4]{x^6 + 1},\ \forall x.$

nên bất phương trình đã cho vô nghiệm.

29. Có $4x^6 + 3 < 4(x^6 + 1) = 4(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

$$\leq 4\left(\frac{x^2 + 1 + x^4 - x^2 + 1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4x^6 + 3 < (x^4 + 2)^2,\ \forall x.$$

Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

30. $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x} > 2x - 3 + \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3.$$

Đáp số : $0 \leq x < 3$.

31. $(\sqrt{1 - x} + 3)(2\sqrt{1 - x} - 5) > \sqrt{1 - x} - 3$

$\Leftrightarrow \quad 2(1 - x) - 15 + \sqrt{1 - x} > \sqrt{1 - x} - 3$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ -2x - 13 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5.$

Đáp số : $x < -5$.

32. $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x > -1. \end{cases}$

Đáp số : $-1 < x < 4$; $4 < x < +\infty$.

33. $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x > 3. \end{cases}$

Đáp số : $x > 3$.

34. Giải bất phương trình thứ nhất

$$-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3} \Leftrightarrow -30x + 9 > 15(2x-7)$$

$$\Leftrightarrow 60x < 15.7 + 9 \Leftrightarrow x < \frac{19}{10}.$$

Giải bất phương trình thứ hai

$$x - \frac{1}{2} < \frac{5(3x-1)}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 < 15x - 5 \Leftrightarrow x > \frac{4}{13}.$$

Đáp số : $\frac{4}{13} < x < \frac{19}{10}$.

35. Giải bất phương trình đầu $\frac{3x+1}{2} - \frac{3-x}{3} \leq \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{9x + 3 - 6 + 2x}{6} \leq \frac{3x + 3 - 8x + 4}{12}$$

$$\Leftrightarrow 22x - 6 \leq -5x + 7 \Leftrightarrow 27x \leq 13 \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{27}.$$

Giải bất phương trình sau $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{15 - 2x - 1}{5} > \frac{3x+4}{3} \Leftrightarrow 42 - 6x > 15x + 20$$

$$\Leftrightarrow 21x < 22 \Leftrightarrow x < \frac{22}{21}.$$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x \le \dfrac{13}{27} \\ x < \dfrac{22}{21}. \end{cases}$

Đáp số: $x \le \dfrac{13}{27}$.

36. $mx - m^2 > 2x - 4 \Leftrightarrow (m-2)x > (m-2)(m+2)$.

Nếu $m > 2$ thì $m - 2 > 0$, bất phương trình có nghiệm là $x > m + 2$;

Nếu $m < 2$ thì $m - 2 < 0$, bất phương trình có nghiệm là $x < m + 2$;

Nếu $m = 2$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$, bất phương trình vô nghiệm.

37. $f(x) = (-2x+3)(x-2)(x+4)$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		+		+	0	−		−	
$x-2$		−		−		−	0	+	
$x+4$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

38. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		−		−	0	+		+	
$x-1$		−		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		−	||	+	0	−	||	+	

39. $f(x) = \dfrac{3(x+2)-(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} = \dfrac{x+7}{(2x-1)(x+2)}$

x	$-\infty$		-7		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

40. $f(x) = (4x-1)(x+2)(3x-5)(-2x+7)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x+7$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

41. $\dfrac{3}{2-x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2+x}{2-x} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} < 0. \qquad (1)$$

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
vế trái của (1)		$-$	0	$+$	||	$-$	

Đáp số : $x < -1$, $x > 2$.

42. $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-3}{x^2-4} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0. \qquad (1)$$

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Vế trái của (1)		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Đáp số : $-2 < x \leq -1$, $x > 2$.

43. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{x+2+x-1}{(x+2)(x-1)} > \dfrac{1}{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0. \qquad (1)$$

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Vế trái của (1)		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Đáp số : $-2 < x < 0$; $1 < x < 2$; $4 < x < +\infty$.

44. Vì $|x - 3| \geq 0, \forall x$ nên $|x - 3| > -1, \forall x$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

45. $|5 - 8x| \leq 11 \Leftrightarrow |8x - 5| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 8x - 5 \leq 11$

$$\Leftrightarrow -11 + 5 \leq 8x \leq 11 + 5 \Leftrightarrow \frac{-3}{4} \leq x \leq 2.$$

Đáp số : $\frac{-3}{4} \leq x \leq 2$.

46. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái bất phương trình ta có

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert x + 2\rvert$		$-(x + 2)$	0	$x + 2$		$x + 2$	
$\lvert -2x + 1\rvert$		$(-2x + 1)$		$(-2x + 1)$	0	$-(-2x + 1)$	

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -2 \\ -(x + 2) + (-2x + 1) \leq x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x \leq \frac{1}{2} \\ (x + 2) + (-2x + 1) \leq x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (x + 2) - (-2x + 1) \leq x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -2 \\ 4x \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} -2 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq 0. \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

47. a) Điểm $O(0\,;\,0)$ có toạ độ thoả mãn bất phương trình, do đó miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $3 + 2y = 0$ chứa O (bỏ bờ).

b) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x - 1 = 0$ chứa O (bỏ bờ).

c) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $-x + 5y = -2$ chứa O (bỏ bờ).

d) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x + y = 1$ không chứa O (bỏ bờ).

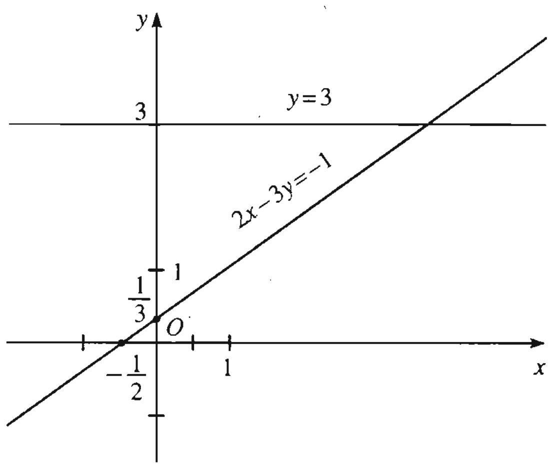
e) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $-3x + y = -2$ không chứa O.

f) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x - 3y = -5$ chứa điểm O.

48. a) $\begin{cases} 2x - 1 \le 0 \\ -3x + 5 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$ vô nghiệm.

b) Miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị tô đen (không kể bờ) (h. 45).



Hình 45

49. Gọi x là diện tích trồng đậu, y là diện tích trồng cà, (đơn vị $a = 100\ \text{m}^2$), điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$, ta có $x + y \le 8$.

Số công cần dùng là $20x + 30y \le 180$ hay $2x + 3y \le 18$.

Số tiền thu được là

$$F = 3\,000\,000x + 4\,000\,000y \text{ (đồng)}$$

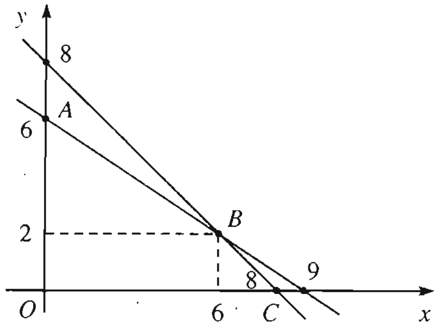
hay $$F = 3x + 4y \text{ (triệu đồng)}.$$

Ta cần tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình

$$(H)\begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

sao cho $F = 3x + 4y$ đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn tập nghiệm của (H) ta được miền tứ giác $OABC$ với $A(0\ ;\ 6)$, $B(6\ ;\ 2)$, $C(8\ ;\ 0)$ và $O(0\ ;\ 0)$ (h. 46)



Hình 46

Xét giá trị của F tại các đỉnh O, A, B, C và so sánh ta suy ra $x = 6$, $y = 2$ (toạ độ điểm B) là diện tích cần trồng mỗi loại để thu được nhiều tiền nhất là $F = 26$ (triệu đồng).

Đáp số : Trồng 6a đậu, 2a cà, thu hoạch 26 000 000 đồng.

50.

a)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$4x^2 - 3x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{37}}{6}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{6}$		$+\infty$
$-3x^2 + 5x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Tam thức $3x^2 + x + 5$ có biệt thức $\Delta = -59 < 0$ và hệ số $a = 3 > 0$.

Vậy $3x^2 + x + 5 > 0,\ \forall x$.

51. a) $x^2 - 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 > 0$ (đúng với mọi x) ;

b) $x^2 + 9 > 6x \quad \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0$ (đúng với mọi $x \neq 3$).

52. a) $6x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{2}{3}$;

b) $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3$.

53. a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+3x-10} < 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 2.$$

b) $\dfrac{10-x}{5+x^2} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 20 - 2x > 5 + x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3.$$

54. a) $\dfrac{x+1}{x-1} + 2 > \dfrac{x-1}{x} \quad \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x-1} > \dfrac{x-1}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - x - (x-1)^2}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x > 1.$$

b) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x+3+2x+2}{(x+1)(x+3)} < \dfrac{3}{x+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x+5)(x+2) - 3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3 \text{ hoặc } -2 < x < -1 \text{ hoặc } x > 1.$$

Đáp số : $x < -3$ hoặc $-2 < x < -1$ hoặc $x > 1$.

55. a) $5x^2 - x + m > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = 1 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}$.

b) Khi $m = 0$, bất phương trình trở thành $-10x - 5 < 0$, không nghiệm đúng với mọi x.

Do đó bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 25 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -5.$$

56. a) $$\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 2 > -x^2 + 3x - 4 \text{ (do } x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 3)x + 2 > 0.$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi $\Delta < 0$

$$(m + 3)^2 - 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < m + 3 < 4 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

b) + Nếu $m = 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x ;

+ Nếu $m = -2$ thì bất phương trình trở thành $-4x + 2 > 0$, không nghiệm đúng với mọi x.

+ Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m(m + 2) > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m(m + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m + 2) > 0 \\ -m^2 - 4m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -4 ; m > 0.$$

Đáp số : $m < -4 ; m \geq 0$.

57. a) Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$5x^2 - x + m > 0$ nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow 1 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Đáp số : $m > \frac{1}{20}$.

b) Cần tìm m để

$$mx^2 - 10x - 5 < 0, \forall x \qquad (1)$$

Nếu $m = 0$ thì bất phương trình (1) trở thành $-10x - 5 < 0$ không nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $m \neq 0$ thì bất phương trình (1) nghiệm đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 25 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -5.$$

Đáp số : $m < -5$.

58. a) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-3)^2 - 4(m-5)(m^2+m+1) > 0 \\ \dfrac{-(2m-3)}{m^2+m+1} > 0 & (1) \\ \dfrac{m-5}{m^2+m+1} > 0. & (2) \end{cases}$$

Vì $m^2 + m + 1 > 0$ nên bất phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $m < \dfrac{3}{2}$ và

bất phương trình (2) $\Leftrightarrow$ $m > 5$.

Do đó không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - (2 - 2m + 9m^2) > 0 \\ \dfrac{6m}{1} > 0 \\ \dfrac{9m^2 - 2m + 2}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ m > 0 \\ 9m^2 - 2m + 2 > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Đáp số : $m > 1$.

59. $(x^2 - y^2)^2 - 4xy(x - y)^2 = (x - y)^2\left[(x + y)^2 - 4xy\right]$

$= (x - y)^2(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2,\ \forall\, x, y.$

60. $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 = (x + y)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0,\ \forall x, y.$

61. $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{a}.2\sqrt{b}.2\sqrt{ac}.2\sqrt{bc} = 16abc.$

62. Theo bài **7** ta có

$$a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a, \text{ do đó}$$

$$a \leq \frac{1}{2}\left(a^2b + \frac{1}{b}\right).$$

Tương tự
$$b \leq \frac{1}{2}\left(b^2c + \frac{1}{c}\right)$$

$$c \leq \frac{1}{2}\left(c^2a + \frac{1}{a}\right).$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức này ta được điều phải chứng minh.

63. a) $f(x)$ có

$$\Delta = a^2 - 4\left(-3bc + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{-a^2}{3} + 12bc = \frac{-a^2}{3} + \frac{12abc}{a} = \frac{-a^2}{3} + \frac{12}{a}$$

$$= \frac{36 - a^3}{3a} < 0 \text{ (do giả thiết } a^3 > 36\text{)}$$

$\Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x.$

b) $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + (b + c)^2 - 2bc > bc + a(b + c)$

$\Leftrightarrow (b + c)^2 - a(b + c) - 3bc + \dfrac{a^2}{3} > 0$

$\Leftrightarrow f(b + c) > 0$ đúng vì $f(x) > 0,\ \forall x.$

64. Điều kiện của bất phương trình là $x \geq 0$.

Nếu $m \leq 1$ thì $m - 1 \leq 0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$;

Nếu $m > 1$ thì $m - 1 > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Trả lời. Nếu $m \leq 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $[0 ; +\infty)$.

Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\{0\}$.

65. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là đoạn $[2a - b + 1 ; -a + 2b - 1]$ (nếu $2a - b + 1 \leq -a + 2b - 1$) hoặc là đoạn $[-a + 2b - 1 ; 2a - b + 1]$ (nếu $-a + 2b - 1 \leq 2a - b - 1$)

Do đó để tập nghiệm của bất phương trình đã cho là đoạn $[0 ; 2]$, điều kiện cần và đủ là

$$(1)\ \begin{cases} 2a - b + 1 = 2 \\ -a + 2b - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (2)\ \begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ -a + 2b - 1 = 2. \end{cases}$$

Giải hệ (1) ta được $a = b = 1$. Giải hệ (2) ta được $a = \frac{1}{3}, b = \frac{5}{3}$.

Đáp số : $a = b = 1$ hoặc $a = \frac{1}{3}, b = \frac{5}{3}$.

66. (1) $\Leftrightarrow x \in [\alpha ; \beta]$, trong đó

$$\begin{cases} \alpha = a - b \\ \beta = -2a + b + 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \alpha = -2a + b + 1 \\ \beta = a - b. \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow -(b + 1) \leq x + a - 2 \leq b + 1$

$\Leftrightarrow -b - a + 1 \leq x \leq -a + b + 3$

$\Leftrightarrow x \in [-b - a + 1 ; -a + b + 3]$.

(1) và (2) tương đương khi và chỉ khi $[\alpha ; \beta] = [-b - a + 1 ; -a + b + 3]$

tức là $\begin{cases} \alpha = -b - a + 1 \\ \beta = -a + b + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (3)\ \begin{cases} a - b = -b - a + 1 \\ -2a + b + 1 = -a + b + 3 \end{cases} \quad \text{hoặc (4)} \begin{cases} -2a + b + 1 = -b - a + 1 \\ a - b = -a + b + 3 \end{cases}$$

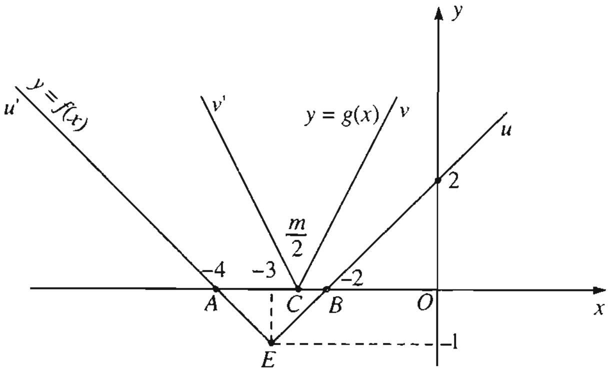
Hệ phương trình (3) vô nghiệm. Hệ phương trình (4) có nghiệm duy nhất $a = 3,\ b = \dfrac{3}{2}$.

Đáp số : $a = 3,\ b = \dfrac{3}{2}$.

67. a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường gấp khúc $u'Eu$, cắt Ox tại $A(-4\ ;\ 0)$ và $B(-2\ ;\ 0)$.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ là đường gấp khúc $v'Cv$, cắt Ox tại $C\left(\dfrac{m}{2}\ ;\ 0\right)$.

Khi m thay đổi, điểm C chạy trên Ox ; tia Cv luôn song song với đường thẳng $y = 2x$; tia Cv' luôn song song với đường thẳng $y = -2x$.



Hình 47

b) Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y = g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hay C nằm giữa A và B nghĩa là $-4 < \dfrac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow -8 < m < -4$.

Đáp số : $-8 < m < -4$.

Chương V. THỐNG KÊ

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó, ta có

   Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i.

   Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i.

2. Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k < n$). Xét lớp thứ i ($i = 1, 2, ..., k$) trong k lớp đó, ta có

   Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là **tần số của lớp** đó.

   Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i.

➤ **Chú ý.** Trong các bảng phân bố tần suất, tần suất được tính ở dạng tỉ số phần trăm.

B. BÀI TẬP MẪU

Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C (đơn vị : giây)

6,3	6,2	6,5	6,8	6,9	8,2	8,6
6,6	6,7	7,0	7,1	7,2	8,3	8,5
7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	8,4	8,1
7,1	7,3	7,5	7,5	7,6	8,7	
7,6	7,7	7,8	7,5	7,7	7,8	

Bảng 1

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp và bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp

[6,0 ; 6,5) ; [6,5 ; 7,0) ; [7,0 ; 7,5) ; [7,5 ; 8,0) ; [8,0 ; 8,5) ; [8,5 ; 9,0].

b) Trong lớp 10A, số học sinh chạy 50 m hết từ 7 giây đến dưới 8,5 giây chiếm bao nhiêu phần trăm ?

Giải

a) Từ các số liệu thống kê đã cho, ta xác định được :

Tần số của các lớp

$n_1 = 2$; $n_2 = 5$; $n_3 = 10$;

$n_4 = 9$; $n_5 = 4$; $n_6 = 3$.

Tần suất của các lớp

$f_1 \approx 6{,}06\%$; $f_2 \approx 15{,}15\%$; $f_3 \approx 30{,}30\%$;

$f_4 \approx 27{,}27\%$; $f_5 \approx 12{,}12\%$; $f_6 = 9{,}10\%$.

Từ đó ta có bảng phân bố tần số ghép lớp

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C

Lớp thời gian chạy (giây)	Tần số
[6,0 ; 6,5)	2
[6,5 ; 7,0)	5
[7,0 ; 7,5)	10
[7,5 ; 8,0)	9
[8,0 ; 8,5)	4
[8,5 ; 9,0]	3
Cộng	33

Bảng 2

Bảng phân bố tần suất ghép lớp

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C

Lớp thời gian chạy (giây)	Tần suất (%)
[6,0 ; 6,5) [6,5 ; 7,0) [7,0 ; 7,5) [7,5 ; 8,0) [8,0 ; 8,5) [8,5 ; 9,0]	6,06 15,15 30,30 27,27 12,12 9,10
Cộng	100 (%)

Bảng 3

b) 30,30% + 27,27% + 12,12% = 69,69%.

Trả lời : 69,69%.

C. BÀI TẬP

1. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị : phút)

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

Bảng 4

a) Hãy lập bảng phân bố tần số, bảng phân bố tần suất ;

b) Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm ?

2. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Chiều cao của 120 học sinh lớp 11 ở trường Trung học phổ thông M
(đơn vị : cm)

Nam				Nữ			
175	163	146	150	172	141	155	150
176	162	147	151	172	142	156	154
176	161	149	152	172	142	157	152
177	165	148	153	175	150	158	152
176	169	152	155	175	154	159	153
170	144	168	160	170	150	144	160
170	143	167	160	170	152	144	165
170	142	166	160	170	152	143	159
165	141	174	161	170	160	143	165
166	144	173	162	170	160	140	159
175	156	161	172	175	160	145	168
175	157	162	171	176	161	146	159
176	160	158	170	176	162	147	168
176	164	159	170	175	164	148	159
175	163	160	170	176	165	149	168

Bảng 5

a) Với các lớp

[135 ; 145) ; [145 ; 155) ; [155 ; 165) ; [165 ; 175) ; [175 ; 185].

Hãy lập

Bảng phân bố tần số ghép lớp (đồng thời theo chiều cao của nam và của nữ).

Bảng phân bố tần suất ghép lớp (đồng thời theo chiều cao của nam và của nữ) ;

b) Trong số học sinh có chiều cao chưa đến 155 cm (của 120 học sinh được khảo sát), học sinh nam đông hơn hay học sinh nữ đông hơn ?

3. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của bạn A trong 35 ngày

21	22	24	19	23	26	25
22	19	23	20	23	27	26
22	20	24	21	24	28	25
21	20	23	22	23	29	26
23	21	26	21	24	28	25

Bảng 6

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp

[19 ; 21) ; [21 ; 23) ; [23 ; 25) ; [25 ; 27) ; [27 ; 29].

b) Trong 35 ngày được khảo sát, những ngày bạn A có thời gian đi đến trường từ 21 phút đến dưới 25 phút chiếm bao nhiêu phần trăm ?

4. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp

Kết quả đo của 55 học sinh lớp 8, khi đo tổng các góc trong của một ngũ giác lồi

Lớp số đo (độ)	Tần số
[535 ; 537)	6
[537 ; 539)	10
[539 ; 541)	25
[541 ; 543)	9
[543 ; 545]	5
Cộng	55

Bảng 7

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp như ở bảng 7.

b) Nêu nhận xét về kết quả đo của 55 học sinh kể trên.

5. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Nhiệt độ trung bình (^oC) của tháng 5 ở địa phương A từ 1961 đến 1990

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

Bảng 8

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau

[25 ; 26) ; [26 ; 27) ; [27 ; 28) ; [28 ; 29) ; [29 ; 30].

b) Trong 30 năm được khảo sát, những năm có nhiệt độ trung bình của tháng 5 (ở địa phương A) từ 28^oC đến 30^oC chiếm bao nhiêu phần trăm ?

§2. BIỂU ĐỒ

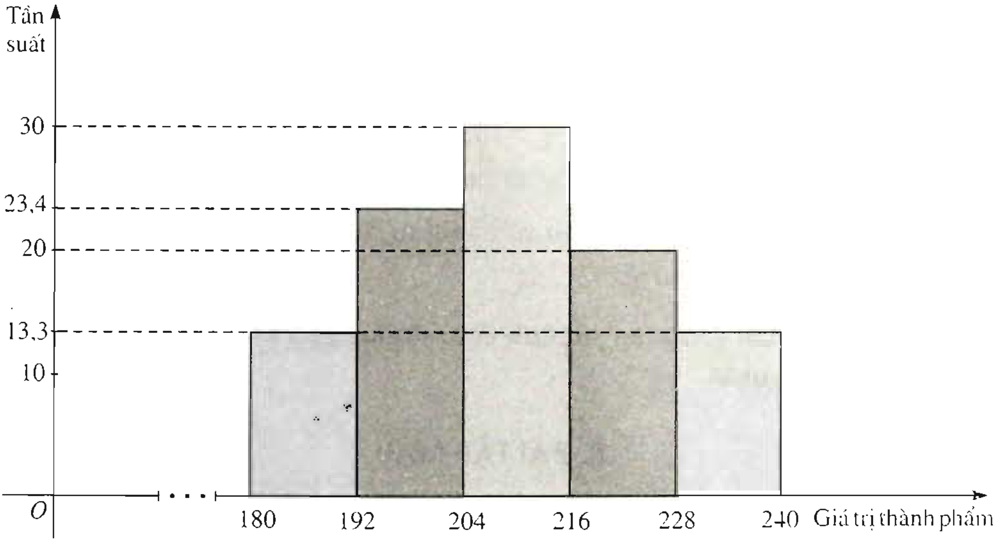
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách vẽ biểu đồ tần suất, tần số hình cột

a) Cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột

Để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp và trình bày các số liệu thống kê, có thể vẽ biểu đồ tần suất hình cột như sau.

Chọn hệ trục toạ độ vuông góc Oxf với đơn vị trên trục hoành Ox là đơn vị của dấu hiệu X được nghiên cứu, đơn vị trên trục tung Of là 1%. Để đồ thị cân đối, đôi khi phải cắt bỏ một đoạn nào đó của trục hoành (hoặc của trục tung), chẳng hạn như ở hình vẽ dưới đây, trên trục hoành, một phần của đoạn [0 ; 180] đã bị cắt bỏ ; phần "..." biểu diễn cho phần bị cắt bỏ.



Hình 48. Biểu đồ tần suất hình cột về giá trị thành phẩm trong mỗi ngày sản xuất quy ra tiền (nghìn đồng) của 30 ngày được khảo sát ở phân xưởng A.

Trên trục hoành, đặt các khoảng có các mút biểu diễn cho các mút của các lớp ở bảng phân bố tần suất (độ dài của các khoảng bằng bề rộng của các lớp). Ta gọi các khoảng và các lớp này là tương ứng với nhau. Lấy các khoảng đó làm cạnh đáy, vẽ các hình chữ nhật có độ dài của các đường cao bằng tần suất của các lớp tương ứng và nằm về phía chiều dương của trục tung.

Các hình chữ nhật vừa vẽ được lập thành một biểu đồ tần suất hình cột.

b) Cách vẽ biểu đồ tần số hình cột tương tự, trong đó thay trục tần suất bởi trục tần số.

2. Cách vẽ đường gấp khúc tần suất, tần số

a) Giá trị đại diện

Trong bảng phân bố ghép lớp, ta gọi số trung bình cộng của hai mút lớp thứ i là *giá trị đại diện* của lớp đó, kí hiệu là c_i.

b) Cách vẽ đường gấp khúc tần suất

Cũng có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp bằng cách vẽ đường gấp khúc tần suất như sau.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxf (hệ toạ độ Oxf đã nói ở trên), xác định các điểm $(c_i ; f_i)$ $i = 1, 2, 3, ..., k$, trong đó, c_i và f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần suất của các lớp của bảng phân bố (gồm k lớp). Vẽ các đoạn thẳng nối điểm $(c_i ; f_i)$ với điểm $(c_{i+1} ; f_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, ..., k - 1$, ta thu được một đường gấp khúc, gọi là đường gấp khúc tần suất.

c) Cách vẽ đường gấp khúc tần số tương tự, trong đó thay trục tần suất bởi trục tần số.

3. Đọc biểu đồ tần suất, tần số hình cột ; đường gấp khúc tần suất, tần số ; biểu đồ hình quạt.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Mô tả bảng 3 (§1) bằng cách vẽ

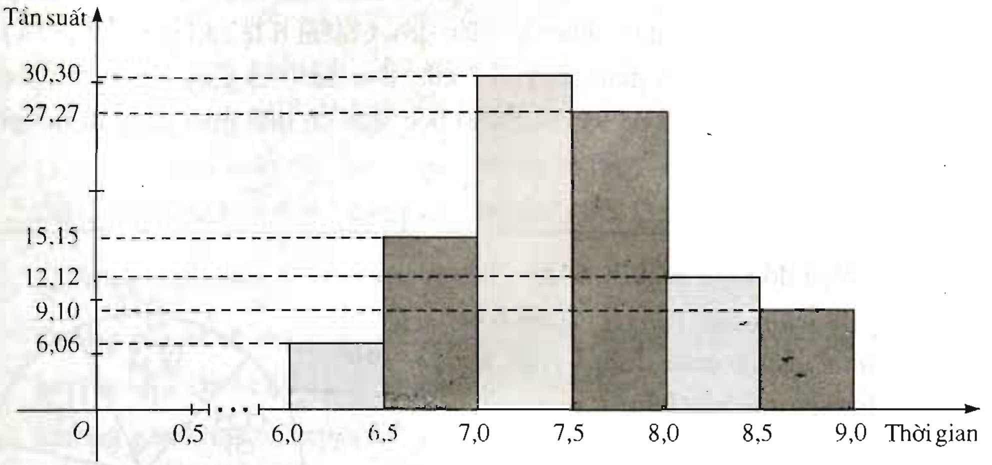
a) Biểu đồ tần suất hình cột ;

b) Đường gấp khúc tần suất ;

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột đã vẽ được ở câu a), hãy nêu nhận xét về thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C.

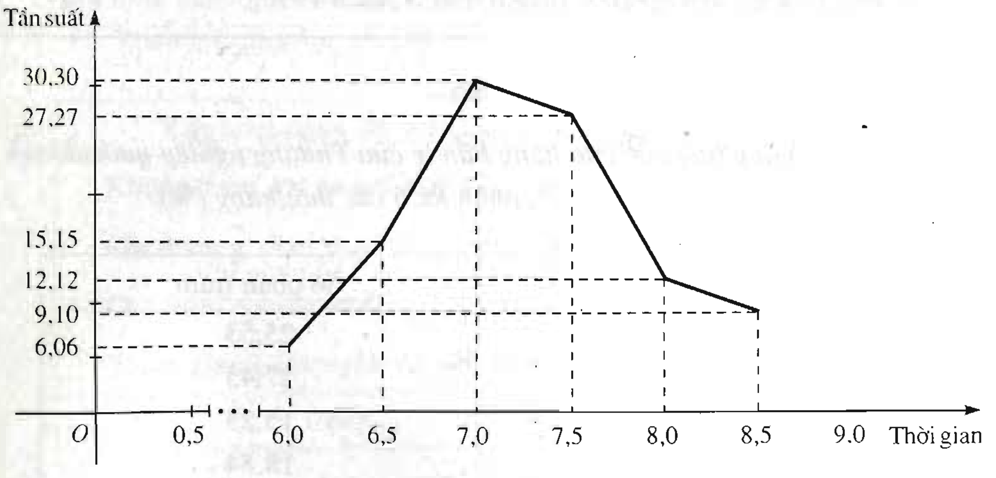
Giải

a)



Hình 49. Biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (giây) chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C

b)



Hình 50. Đường gấp khúc tần suất về thời gian (giây) chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C.

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột, ta có nhận xét sau :

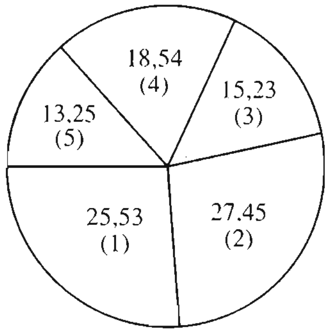
Trong số các học sinh của lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C, chiếm tỉ lệ thấp nhất (6,06%) là những học sinh có thời gian chạy từ 6 giây đến dưới 6,5 giây (ứng với cột thấp nhất của biểu đồ). Chiếm tỉ lệ cao nhất (30,30%) là những học sinh có thời gian chạy từ 7 giây đến dưới 7,5 giây (ứng với cột cao nhất của biểu đồ). Đại đa số (84,84%) học sinh có thời gian chạy từ 6,5 giây đến dưới 8,5 giây.

BÀI 2

Cho biểu đồ hình quạt (h. 51)

Cơ cấu mạng lưới các cửa hàng bán lẻ của Thương nghiệp quốc doanh tỉnh N năm 1990, phân theo các mặt hàng (%).

(1) Lương thực
(2) Thực phẩm
(3) Dược phẩm
(4) Công nghệ
(5) Sách



Hình 51

Dựa vào biểu đồ hình quạt đã cho, hãy lập bảng trình bày cơ cấu mạng lưới các cửa hàng bán lẻ của Thương nghiệp quốc doanh tỉnh N, năm 1990.

Giải

Cơ cấu mạng lưới các cửa hàng bán lẻ của Thương nghiệp quốc doanh tỉnh N năm 1990, phân theo các mặt hàng (%).

Các mặt hàng	Số phần trăm
Lương thực	25,53
Thực phẩm	27,45
Dược phẩm	15,23
Công nghệ	18,54
Sách	13,25
Cộng	100 (%)

C. BÀI TẬP

6. a) Mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp đã lập được ở bài tập số 3, bằng cách vẽ biểu đồ tần số hình cột ; vẽ đường gấp khúc tần số.

b) Mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập được ở bài tập số 3 bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột ; vẽ đường gấp khúc tần suất.

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột đã vẽ được ở câu b), nêu nhận xét về thời gian đi từ nhà đến trường của bạn A trong 35 ngày được khảo sát.

7. a) Trong cùng một hệ trục tọa độ, hãy vẽ

Đường gấp khúc tần suất mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp lập được ở bài tập số 2 theo chiều cao của học sinh nam ;

Đường gấp khúc tần suất mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp lập được ở bài tập số 2 theo chiều cao của học sinh nữ.

b) Dựa vào các đường gấp khúc tần suất đã vẽ được ở câu a), hãy so sánh các phân bố theo chiều cao của học sinh nam và học sinh nữ.

8. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp

Tình hình tham gia hoạt động ngoài giờ lên lớp của 73 học sinh lớp 10 trường Trung học phổ thông B (trong thời gian một tháng)

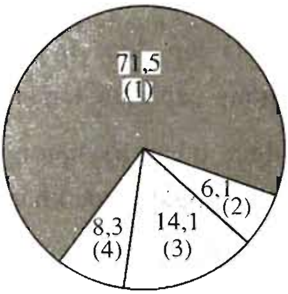
Các hoạt động đã tham gia	Tần số
Không tham gia hoạt động nào	2
Chỉ tham gia thể dục	28
Chỉ tham gia văn nghệ	20
Tham gia cả văn nghệ lẫn thể dục	23
Cộng	73

Bảng 9

Vẽ biểu đồ tần số hình cột để mô tả bảng 9.

9. Cho các biểu đồ hình quạt (hình 52, 53)

Cơ cấu chi tiêu của người dân Việt Nam, phân theo các khoản chi (%)



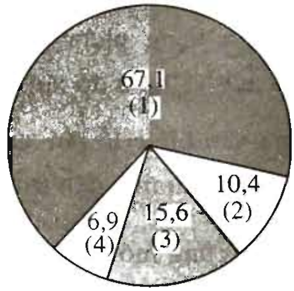
Hình 52

(1) Ăn

(2) Mặc

(3) Mua sắm

(4) Chi khác



Hình 53

Dựa vào các biểu đồ hình quạt đã cho, lập bảng trình bày cơ cấu chi tiêu của nhân dân Việt Nam trong năm 1975 và năm 1989.

§3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số trung bình cộng (hay số trung bình)

Công thức tính

a) Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$
$$= \frac{1}{n}\left(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k\right)$$
$$= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k,$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i ; n là số các số liệu thống kê $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$.

b) Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i,$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; n là số các số liệu thống kê $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$.

2. Số trung vị

Số trung vị M_e của một dãy gồm n số liệu thống kê được sắp thứ tự không giảm (hoặc không tăng) là

Số đứng giữa dãy (số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$), nếu n lẻ ;

Trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy (trung bình cộng của số hạng thứ $\frac{n}{2}$ và số hạng thứ $\frac{n}{2} + 1$), nếu n chẵn.

3. Mốt

Mốt M_0 là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.

Nếu trong bảng phân bố tần số có hai giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì ta có hai giá trị đó là hai mốt.

4. Chọn đại diện cho các số liệu thống kê

a) Trường hợp tính được cả ba số : trung bình, trung vị, mốt, và các số liệu thống kê là cùng loại, đồng thời số lượng các số liệu đủ lớn ($n \geq 30$) thì ta ưu tiên chọn số trung bình làm đại diện cho các số liệu thống kê (về quy mô và độ lớn). Khi đó số trung vị hoặc mốt được sử dụng để bổ sung thêm những thông tin cần thiết.

b) Trường hợp không tính được số trung bình thì người ta chọn số trung vị hoặc mốt làm đại diện cho các số liệu thống kê (về quy mô và độ lớn).

c) Những trường hợp sau đây, không nên dùng số trung bình để đại diện cho các số liệu thống kê (có thể dùng số trung vị hoặc mốt) :

Số các số liệu thống kê quá ít (bé hơn hoặc bằng 10),

Giữa các số liệu thống kê có sự chênh lệch nhau quá lớn,

Đường gấp khúc tần suất không đối xứng, và nhiều trường hợp khác.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

a) Tính số trung bình của các số liệu thống kê cho ở bảng 1 bằng hai cách (sử dụng bảng phân bố tần số, bảng phân bố tần suất).

b) Giả sử cũng trong trường Trung học phổ thông C, thời gian trung bình chạy 50 m của học sinh lớp 10B là 7,3 giây.

So sánh thời gian chạy 50 m của học sinh ở hai lớp 10A, 10B trong lần thi chạy kể trên.

Giải

a) *Cách 1*

Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp (bảng 2) ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{33}(2 \times 6{,}25 + 5 \times 6{,}75 + 10 \times 7{,}25 + 9 \times 7{,}75 + 4 \times 8{,}25 + 3 \times 8{,}75)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{33}(12{,}50 + 33{,}75 + 72{,}50 + 69{,}75 + 33{,}00 + 26{,}25)$$

$$\overline{x} \approx 7{,}5 \text{ (giây).}$$

Cách 2

Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp (bảng 3), ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(6{,}06 \times 6{,}25 + 15{,}15 \times 6{,}75 + 30{,}30 \times 7{,}25 + 27{,}27 \times 7{,}75 + 12{,}12 \times 8{,}25 + 9{,}10 \times 8{,}75)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(37{,}875 + 102{,}2625 + 219{,}675 + 211{,}3425 + 99{,}99 + 79{,}625)$$

$$\overline{x} \approx 7{,}5 \text{ (giây)}$$

b) $\overline{x}_A > \overline{x}_B$, nên trong lần thi chạy kể trên, học sinh lớp 10B chạy nhanh hơn học sinh lớp 10A.

BÀI 2

Cho

Bảng xếp loại học lực của học sinh lớp 10A
trường Trung học phổ thông T. năm học 2002 – 2003

Học lực	Tần số
Kém	3
Yếu	12
Trung bình	13
Khá	11
Giỏi	6
Cộng	45

Bảng 10

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt của bảng 10 (nếu tính được).
b) Chọn giá trị đại diện cho học lực của học sinh lớp 10A.

Giải

a) Bảng phân bố tần số đã cho gồm 45 số liệu, mỗi số liệu là một xếp loại học lực. Có tất cả 5 xếp loại học lực được sắp thành dãy không giảm, từ học lực thấp nhất là "Kém" đến học lực cao nhất là "Giỏi". Số liệu đứng giữa là số liệu thứ 23.

Số liệu này thuộc xếp loại học lực "Trung bình". Suy ra số trung vị M_e là học lực "Trung bình".

Trong bảng phân bố tần số đã cho, xếp loại học lực "Trung bình" có tần số lớn nhất nên mốt M_0 là học lực "Trung bình". Kết quả này có nghĩa là trong lớp 10A, nhiều nhất là những học sinh có xếp loại học lực "Trung bình".

b) Dựa vào kết quả của câu a), ta chọn xếp loại học lực "Trung bình" làm đại diện cho học lực của học sinh lớp 10A.

C. BÀI TẬP

10. a) Bằng hai cách khác nhau, tính số trung bình của dãy số liệu về chiều cao của các học sinh nam và nữ cho ở bảng 5.

b) So sánh chiều cao của học sinh nam với chiều cao của học sinh nữ trong nhóm học sinh được khảo sát.

c) Tính chiều cao trung bình của tất cả 120 học sinh đã được khảo sát.

11. a) Tính số trung bình của các số liệu thống kê cho ở bảng 6, bảng 7 và bảng 8.

b) Nêu ý nghĩa của các số trung bình đã tính được.

12. Cho bảng phân bố tần số

Mức thu nhập trong năm 2000 của 31 gia đình trong một bản ở vùng núi cao

Mức thu nhập (triệu đồng)	Tần số
4	1
4,5	1
5	3
5,5	4
6	8
6,5	5
7,5	7
13	2
Cộng	31

Bảng 11

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê đã cho.

b) Chọn giá trị đại diện cho các số liệu thống kê đã cho.

13. Cho

Bảng xếp loại lao động của học sinh lớp 10A năm học 2000 – 2001

Loại lao động	Tần số
A	10
B	16
C	16
D	7
Cộng	49

Bảng 12

1. Tính số trung bình, số trung vị, mốt của bảng 12 (nếu tính được).

2. Chọn giá trị đại diện cho các giá trị thống kê đã cho về quy mô và độ lớn.

§4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức tính

Có thể tính *phương sai* theo ba cách sau :

Cách 1. Tính theo tần số

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$$ đối với bảng phân bố tần số,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i - \overline{x})^2$$ đối với bảng phân bố tần số ghép lớp.

Cách 2. Tính theo tần suất

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2$$ đối với bảng phân bố tần suất,

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(c_i - \overline{x})^2$$ đối với bảng phân bố tần suất ghép lớp.

Trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i trong bảng phân bố tần số, tần suất (hay là tần số, tần suất của lớp thứ i trong bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp) ; n là số các số liệu thống kê $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê ; c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i.

Cách 3. Sử dụng công thức $s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

2. Ý nghĩa và cách sử dụng phương sai

Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình).

Khi hai dãy số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau, dãy có phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng ít.

3. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn s là căn bậc hai của phương sai s^2

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Độ lệch chuẩn cũng được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình).

Cách sử dụng độ lệch chuẩn hoàn toàn giống như cách sử dụng phương sai.

Khi cần chú ý đến đơn vị đo, ta dùng độ lệch chuẩn s (vì s có cùng đơn vị đo với dấu hiệu X được nghiên cứu).

B. BÀI TẬP MẪU

a) Tính phương sai (theo 3 cách) và tính độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho ở bảng 1.

b) Giả sử xét thêm lớp 10D cũng thuộc trường Trung học phổ thông C có thành tích chạy 50 m trung bình là 7,5 giây, có phương sai là 0,5.

So sánh thành tích chạy 50 m kể trên của hai lớp 10A và 10D.

Giải

a) Tính phương sai

Cách 1. Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp (bảng 2)

$$s^2 = \frac{1}{33}[2.(6,25 - 7,5)^2 + 5.(6,75 - 7,5)^2 + 10.(7,25 - 7,5)^2 + 9.(7,75 - 7,5)^2 + 4.(8,25 - 7,5)^2 + 3.(8,75 - 7,5)^2]$$

$$s^2 = \frac{1}{33}(3,13 + 2,81 + 0,63 + 0,56 + 2,25 + 4,69)$$

$$s^2 \approx 0,43.$$

Cách 2. Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp (bảng 3)

$$s^2 = \frac{1}{100}[6,06.(6,25 - 7,5)^2 + 15,15.(6,75 - 7,5)^2 + 30,30.(7,25 - 7,5)^2 + 27,27.(7,75 - 7,5)^2 + 12,12.(8,25 - 7,5)^2 + 9,10.(8,75 - 7,5)^2]$$

$$s^2 = \frac{1}{100}[9,46875 + 8,521875 + 1,89375 + 1,704375 + 6,8175 + 14,21875]$$

$s^2 \approx 0,43.$

Cách 3. Sử dụng công thức $s^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{33}(2.6,25^2 + 5.6,75^2 + 10.\ 7,25^2 + 9.7,75^2 + 4.\ 8,25^2 + 3.8,75^2)$$

$\overline{x^2} \approx 56,79.$

$(\overline{x})^2 = (7,507575)^2 \approx 56,36$ suy ra

$$s^2 \approx 56,79 - 56,36 \approx 0,43.$$

Như vậy, cả ba cách tính đều cho ta cùng một kết quả (bỏ qua sai số không đáng kể).

Tính độ lệch chuẩn

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{0,43} \Rightarrow s_x \approx 0,66.$$

b) Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \overline{x}_A = \overline{x}_D = 7,5 \text{ (giây)} \\ s_D^2 = 0,5 ; \end{cases}$$

và $s_A^2 = 0,43$ do đó $s_D^2 > s_A^2$.

Suy ra thành tích chạy 50 m của học sinh ở hai lớp nhanh như nhau, nhưng thành tích của các học sinh ở lớp 10A đồng đều hơn.

C. BÀI TẬP

14. a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của dãy số liệu về chiều cao của các học sinh nam và các học sinh nữ cho ở bảng 5 ;

b) Giả sử trường trung học phổ thông M còn có một nhóm học sinh nam lớp 10 chuyên toán (kí hiệu là nhóm T) có chiều cao trung bình là $\overline{x} = 163$ cm, có độ lệch chuẩn là $s = 13$. So sánh chiều cao của ba nhóm học sinh đã cho (nhóm nam, nhóm nữ, nhóm T).

15. Hai xạ thủ cùng tập bắn, mỗi người đã bắn 30 viên đạn vào bia. Kết quả được ghi lại ở các bảng sau

Điểm số của xạ thủ A

8	9	10	9	9	10	8	7	6	8
10	7	10	9	8	10	8	9	8	6
10	9	7	9	9	9	6	8	6	8

Bảng 13

Điểm số của xạ thủ B

9	9	10	6	9	10	8	8	5	9
9	10	6	10	7	8	10	9	10	9
9	10	7	7	8	9	8	7	8	8

Bảng 14

a) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho ở bảng 13, bảng 14.

b) Xét xem trong lần tập bắn này, xạ thủ nào bắn chụm hơn ?

16. Người ta điều tra sản phẩm của hai tổ đóng gói các túi đường (có khối lượng quy định là 2 kg). Kết quả điều tra cho các số liệu thống kê ghi ở hai bảng sau

Khối lượng của 40 túi đường được đóng gói bởi tổ A (đơn vị là kg)

1,95	2,09	1,91	1,99	1,93	2,07	2,15	1,96	1,93	1,94
1,94	2,05	2,02	1,97	1,91	1,95	2,05	2,04	2,03	2,00
2,02	1,94	1,92	1,97	2,00	2,02	2,04	2,05	2,02	2,02
1,94	2,01	1,99	1,95	2,03	2,06	1,91	2,14	1,90	2,25

Bảng 15

Khối lượng của 40 túi đường được đóng gói bởi tổ B (đơn vị là kg)

1,77	1,79	1,80	1,69	1,76	1,69	1,69	1,93	1,94	1,98
2,07	1,98	1,96	1,97	2,06	1,96	1,96	1,91	1,93	2,06
1,97	2,07	2,06	2,08	1,91	1,95	2,05	1,93	1,94	2,02
2,22	2,31	1,80	2,30	2,30	2,23	2,31	2,25	2,24	2,23

Bảng 16

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo sản phẩm của tổ A, với các lớp

[1,90 ; 1,98) ; [1,98 ; 2,06) ; [2,06 ; 2,14) ; [2,14 ; 2,22) ; [2,22 ; 2,30].

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo sản phẩm của tổ B, với các lớp

[1,5 ; 1,7) ; [1,7 ; 1,9) ; [1,9 ; 2,1) ; [2,1 ; 2,3) ; [2,3 ; 2,5].

c) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho ở bảng 15, bảng 16. Từ đó, xét xem trong lần điều tra này, sản phẩm của tổ nào có khối lượng đồng đều hơn ?

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

17. Cho các số liệu thống kê ghi ở bảng sau

Số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

4	12	18	23	29	31	37	40	46	52
5	13	19	24	30	32	38	41	47	53
6	14	21	25	32	33	39	42	48	54
9	15	20	26	32	34	32	43	49	55
8	10	21	27	32	35	40	44	50	56
11	17	22	28	30	36	41	45	51	59

Bảng 17

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp

[0 ; 10) ; [10 ; 20) ; [20 ; 30) ; [30 ; 40) ; [40 ; 50) ; [50 ; 60] ;

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột (mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp) ;

c) Nêu nhận xét về số người xem trong 60 buổi chiếu phim kể trên ;

d) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

18. Cho bảng phân bố tần số

Khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trứng gà

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	10
40	6
45	4
50	2
Cộng	30

Bảng 18

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt ;

b) Hãy chọn giá trị đại diện cho các số liệu thống kê đã cho về quy mô và độ lớn ;

c) Giả sử có rổ trứng gà thứ hai có $\overline{x}_2 = 36{,}5$ g, $s_2 = 10$ g, hãy xét xem trứng gà ở rổ nào có khối lượng đều hơn.

19. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp

Cân nặng của các học sinh lớp 10A và 10B, trường Trung học phổ thông L

Lớp cân nặng (kg)	Tần số	
	10A	10B
[30 ; 36)	1	2
[36 ; 42)	2	7
[42 ; 48)	5	12
[48 ; 54)	15	13
[54 ; 60)	9	7
[60 ; 66]	6	5
Cộng	38	46

Bảng 19

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp như ở bảng 19.

b) Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ hai đường gấp khúc tần suất về cân nặng của học sinh lớp 10A, lớp 10B.

Từ đó, so sánh cân nặng của học sinh lớp 10A với cân nặng của học sinh lớp 10B trường Trung học phổ thông L.

c) Số học sinh nặng không dưới 42 kg ở lớp 10A, lớp 10B chiếm bao nhiêu phần trăm ?

d) Tính số trung bình, độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở lớp 10A, lớp 10B.

Học sinh ở lớp 10A hay lớp 10B có khối lượng lớn hơn ?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a)

Bảng phân bố tần số

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54	Cộng
Tần số	4	5	20	10	8	3	50

Bảng phân bố tần suất

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54	Cộng
Tần suất (%)	8	10	40	20	16	6	100%

b) 76%.

2. a) Bảng phân bố tần số ghép lớp

Chiều cao của 120 học sinh lớp 11 ở trường Trung học phổ thông M

Lớp chiều cao (cm)	Tần số	
	Nam	Nữ
[135 ; 145)	5	8
[145 ; 155)	9	15
[155 ; 165)	19	16
[165 ; 175)	17	14
[175 ; 185]	10	7
Cộng	60	60

Bảng phân bố tần suất ghép lớp

Chiều cao của 120 học sinh lớp 11 trường Trung học phổ thông M

Lớp chiều cao (cm)	Tần suất (%)	
	Nam	Nữ
[135 ; 145)	8,33	13,33
[145 ; 155)	15,00	25,00
[155 ; 165)	31,67	26,67
[165 ; 175)	28,33	23,33
[175 ; 185]	16,67	11,67
Cộng	100 (%)	100 (%)

b) Trong số học sinh có chiều cao chưa đến 155 cm, học sinh nữ đông hơn học sinh nam.

3. a) Thời gian đi từ nhà đến trường của bạn *A* trong 35 ngày

Lớp thời gian (phút)	Tần số	Tần suất (%)
[19 ; 21)	5	14,29
[21 ; 23)	9	25,71
[23 ; 25)	10	28,57
[25 ; 27)	7	20,00
[27 ; 29]	4	11,43
Cộng	35	100 (%)

b) 54,28%.

4. a) Kết quả đo của 55 học sinh lớp 8, khi đo tổng các góc trong của một ngũ giác lồi.

Lớp số đo (độ)	Tần suất (%)
[535 ; 537)	10,91
[537 ; 539)	18,18
[539 ; 541)	45,45
[541 ; 543)	16,36
[543 ; 545]	9,10
Cộng	100 (%)

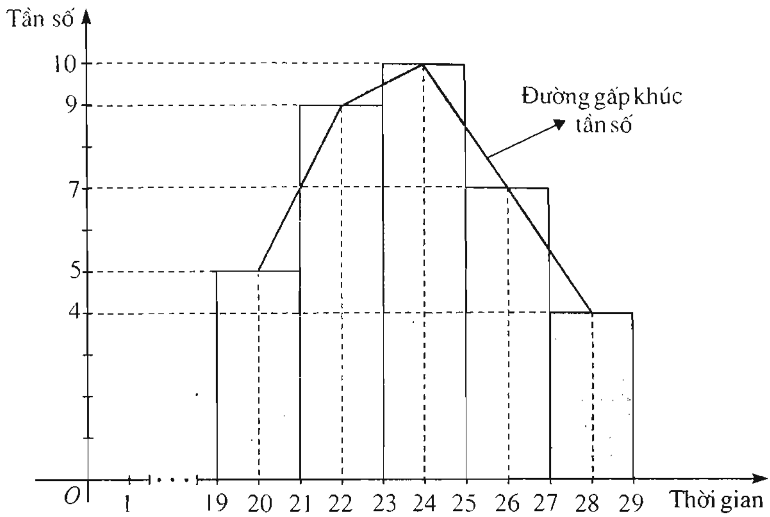
b) Kết quả đo của 55 học sinh kể trên có đặc điểm đáng chú ý nhất là phần lớn (79,99%) học sinh có kết quả đo thuộc vào khoảng từ 537 độ đến dưới 543 độ.

5. a) Nhiệt độ trung bình của tháng 5 ở địa phương *A* từ 1961 đến hết 1990

Lớp nhiệt độ (^oC)	Tần số	Tần suất (%)
[25 ; 26)	1	3,3
[26 ; 27)	5	16,7
[27 ; 28)	13	43,3
[28 ; 29)	9	30,0
[29 ; 30]	2	6,7
Cộng	30	100 (%)

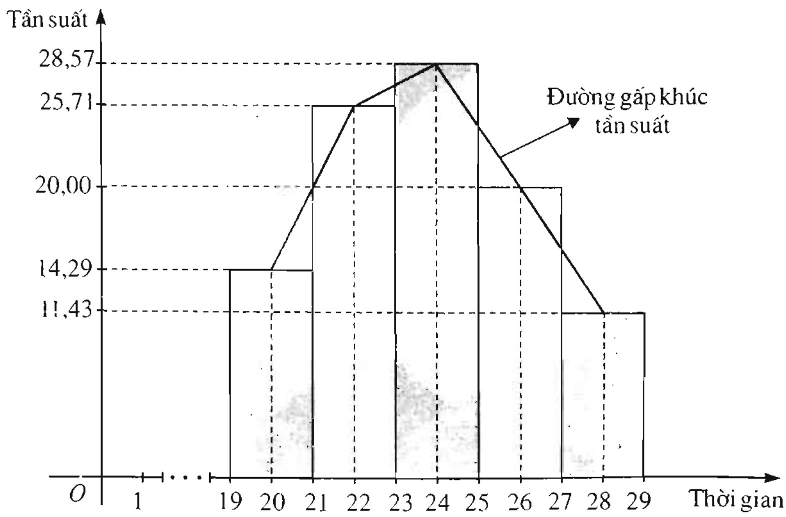
b) 36,7%.

6. a)



Hình 54. Biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số về thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của bạn A, trong 35 ngày được khảo sát.

b)



Hình 55. Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất về thời gian (phút) đi từ nhà đến trường của bạn A, trong 35 ngày được khảo sát.

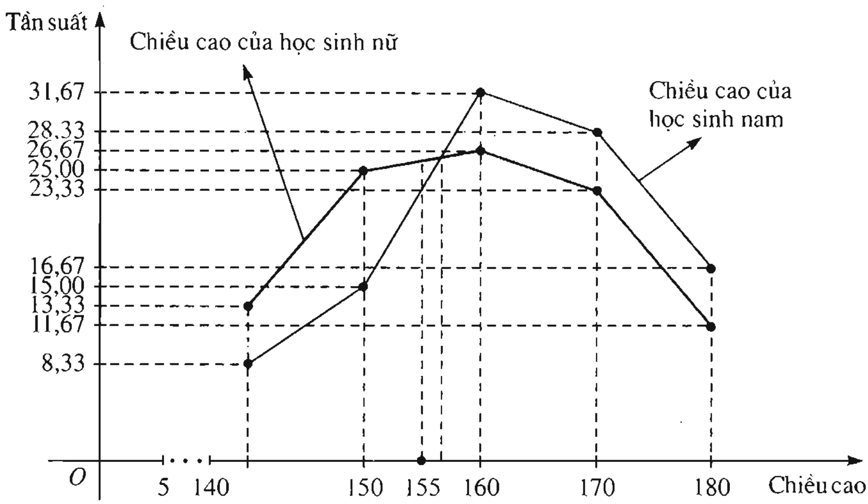
c) Trong 35 ngày đến trường của bạn A, ta thấy :

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (11,43%) là những ngày bạn *A* có thời gian đến trường từ 27 phút đến 29 phút (ứng với cột thấp nhất của biểu đồ).

Chiếm tỉ lệ cao nhất (28,57%) là những ngày bạn *A* có thời gian đến trường từ 23 phút đến dưới 25 phút (ứng với cột cao nhất của biểu đồ).

Đa số các ngày (74,28%), bạn *A* có thời gian đến trường từ 21 phút đến dưới 27 phút (ứng với 3 cột cao trội lên của biểu đồ).

7. a)

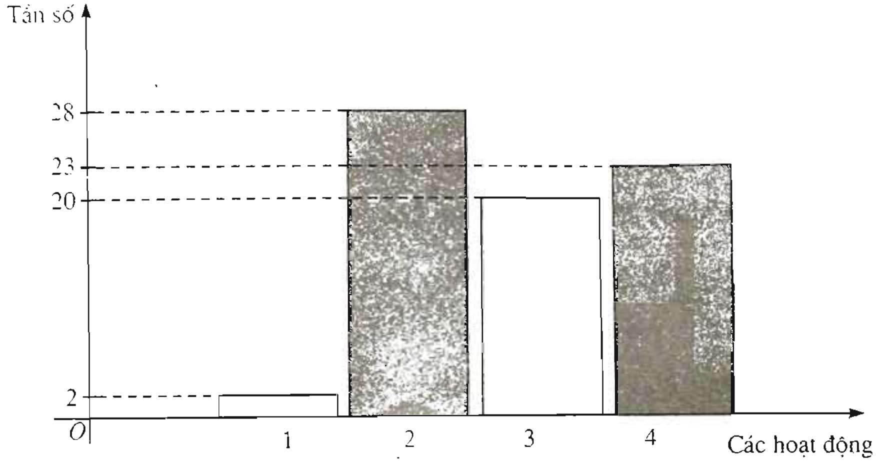


Hình 56. Đường gấp khúc tần suất về chiều cao (cm) của 60 học sinh nam, 60 học sinh nữ.

b) Với chiều cao dưới 155 cm, học sinh nữ chiếm tỉ lệ nhiều hơn (xem hình vẽ ở trên).

Với chiều cao trên 160 cm, học sinh nam chiếm tỉ lệ nhiều hơn.

8.



1. Không tham gia hoạt động nào.
2. Chỉ tham gia thể dục.
3. Chỉ tham gia văn nghệ.
4. Tham gia cả văn nghệ lẫn thể dục.

Hình 57. Biểu đồ tần số hình cột về tình hình tham gia hoạt động ngoài giờ lên lớp của 73 học sinh lớp 10 trường Trung học phổ thông B (trong thời gian một tháng).

9. *Cơ cấu chi tiêu của người dân Việt Nam, phân theo các khoản chi*

Các khoản chi	Số phần trăm	
	1975	1989
Ăn	71,5	67,1
Mặc	6,1	10,4
Mua sắm	14,1	15,6
Chi khác	8,3	6,9
Cộng	100 (%)	100 (%)

10. a) Tính chiều cao trung bình của học sinh nam

Cách 1. Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{60}(5 \times 140 + 9 \times 150 + 19 \times 160 + 17 \times 170 + 10 \times 180)$$

$$\overline{x} = 163.$$

Cách 2. Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(8,33 \times 140 + 15 \times 150 + 31,67 \times 160 + 28,33 \times 170 + 16,67 \times 180)$$

$\overline{x} = 163.$

Tính chiều cao trung bình của học sinh nữ

Cách 1. Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{60}(8 \times 140 + 15 \times 150 + 16 \times 160 + 14 \times 170 + 7 \times 180)$$

$\overline{x} = 159,5.$

Cách 2. Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(13,33 \times 140 + 25 \times 150 + 26,67 \times 160 + 23,33 \times 170 + 11,67 \times 180)$$

$\overline{x} = 159,5.$

b) Vì $\overline{x}_{nam} = 163 > \overline{x}_{nữ} = 159,5$; nên suy ra học sinh ở nhóm nam cao hơn học sinh ở nhóm nữ.

c) $\overline{x} = (60 \times 159,5 + 60 \times 163)\frac{1}{120} = (159,5 + 163)\frac{1}{2} \approx 161$ (cm).

1. a) 23,3 phút ; 540° ; 27,6°C.

b) Khi lấy số trung bình làm đại diện cho các số liệu thống kê về quy mô và độ lớn, có thể xem rằng mỗi ngày bạn A đi từ nhà đến trường đều mất 23,3 phút.

Tương tự, nêu ý nghĩa số trung bình của các số liệu thống kê cho ở bảng 7 và bảng 8.

2. a) Số trung bình $\overline{x} = 6,6$ triệu đồng. Số trung vị $M_e = 6$ triệu đồng. Mốt $M_O = 6$ triệu đồng.

b) Trong các số liệu thống kê đã cho có sự chênh lệch nhau quá lớn, nên ta không chọn số trung bình cộng mà chọn số trung vị $M_e = 6$ triệu đồng làm đại diện cho mức thu nhập trong năm 2000 của mỗi gia đình trong 31 gia đình được khảo sát.

13. a) Không tính được số trung bình.

Bảng phân bố đã cho có 49 số liệu, mỗi số liệu thống kê là một xếp loại lao động. Có tất cả 4 xếp loại lao động được sắp thành dãy không tăng từ xếp loại lao động cao nhất là "lao động loại A" đến xếp loại thấp nhất là "lao động loại D". Dựa vào dãy này, ta tìm được số trung vị M_e là xếp loại "lao động loại B".

Có hai mốt $M_0^{(1)}$ là xếp loại "lao động loại B" ; $M_0^{(2)}$ là xếp loại lao động loại C".

b) Ta chọn xếp loại "lao động loại B" để đại diện cho các giá trị thống kê đã cho về quy mô và độ lớn.

14. a) Dãy các số liệu chiều cao của các học sinh nam cho ở bảng 5 có

$$\overline{x}_1 \approx 163 \text{ (cm)} ; \; s_1^2 \approx 134{,}3 ; \; s_1 \approx 11{,}59.$$

Dãy các số liệu chiều cao của các học sinh nữ cho ở bảng 5 có

$$\overline{x}_2 \approx 159{,}5 \text{ (cm)} ; \; s_2^2 = 148 ; \; s_2 \approx 12{,}17.$$

b) Nhóm T có $\overline{x}_3 = 163$ (cm), $s_3^2 = 169$; $s_3 = 13$.

Học sinh ở nhóm nam và nhóm T có chiều cao như nhau và cùng lớn hơn chiều cao của học sinh ở nhóm nữ (vì $\overline{x}_1 = \overline{x}_3 > \overline{x}_2$)

Vì $\overline{x}_1 = \overline{x}_3 = 163$ (cm) và $s_1 < s_3$, nên chiều cao của các học sinh nam đồng đều hơn chiều cao của các học sinh nhóm T.

15. a) Điểm số của xạ thủ A có : $\overline{x} \approx 8{,}3$ điểm ; $s_1^2 \approx 1{,}6$; $s_1 \approx 1{,}27$ điểm.

Điểm số của xạ thủ B có $\overline{y} = 8{,}4$ điểm, $s_2^2 \approx 1{,}77$; $s_2 \approx 1{,}33$ điểm.

b) $\overline{x} \approx \overline{y} = 8{,}4$ điểm ; $s_2^2 > s_1^2$, như vậy mức độ phân tán của các điểm số (so với số trung bình) của xạ thủ A là bé hơn. Vì vậy, trong lần tập bắn này, xạ thủ A bắn chụm hơn.

16. a) *Khối lượng của 40 túi đường được đóng gói bởi tổ A*

Lớp khối lượng (kg)	Tần số	Tần suất (%)
[1,90 ; 1,98)	17	42,5
[1,98 ; 2,06)	17	42,5
[2,06 ; 2,14)	3	7,5
[2,14 ; 2,22)	2	5,0
[2,22 ; 2,30]	1	2,5
Cộng	40	100 (%)

b) *Khối lượng của 40 túi đường được đóng gói bởi tổ B.*

Lớp khối lượng (kg)	Tần số	Tần suất (%)
[1,5 ; 1,7)	3	7,5
[1,7 ; 1,9)	5	12,5
[1,9 ; 2,1)	23	57,5
[2,1 ; 2,3)	5	12,5
[2,3 ; 2,5]	4	10,0
Cộng	40	100 (%)

c) Tổ A có $\overline{x} \approx 2$ kg ; $s_1^2 \approx 0{,}006$; $s_1 \approx 0{,}08$ kg.

Tổ B có $\overline{y} \approx 2$ kg ; $s_2^2 \approx 0{,}04$; $s_2 \approx 0{,}19$ kg.

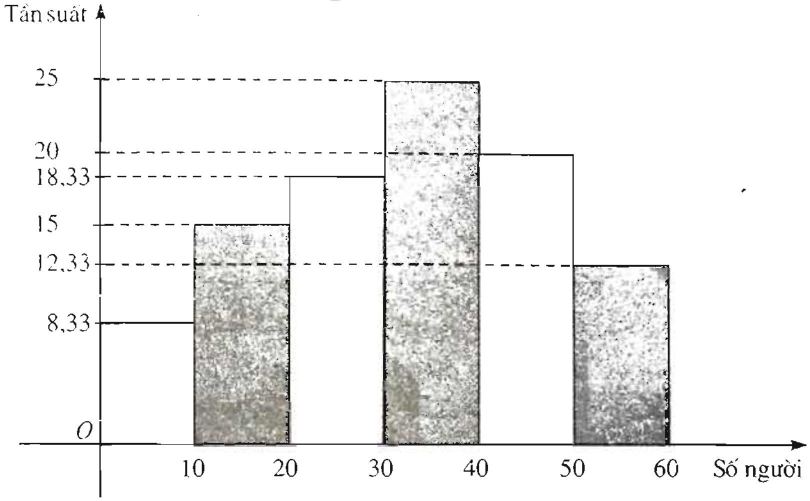
Sản phẩm của tổ *A* có khối lượng đồng đều hơn.

17. a)

Số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

Lớp người xem	Tần số	Tần suất (%)
[0 ; 10)	5	8,33
[10 ; 20)	9	15,00
[20 ; 30)	11	18,33
[30 ; 40)	15	25,00
[40 ; 50)	12	20,00
[50 ; 60]	8	13,34
Cộng	60	100 (%)

b)



Hình 58. Biểu đồ tần suất hình cột về số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

c) Trong 60 buổi được khảo sát

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (8,33%) là những buổi có dưới 10 người xem.

Chiếm tỉ lệ cao nhất (25%) là những buổi có từ 30 người đến dưới 40 người xem.

Đa số (78,33%) các buổi có từ 10 người đến dưới 50 người xem.

d) $\overline{x} \approx 32$ người ; $s^2 \approx 219{,}7$; $s \approx 15$ người.

18. a) $\overline{x} = 36{,}5$ g ; $s_1 = 6{,}73$

$M_e = 35$ g ; $M_o = 35$ g

b) Ta chọn số trung bình $\overline{x} = 36{,}5$ g để làm giá trị đại diện cho các số liệu thống kê đã cho về quy mô và độ lớn.

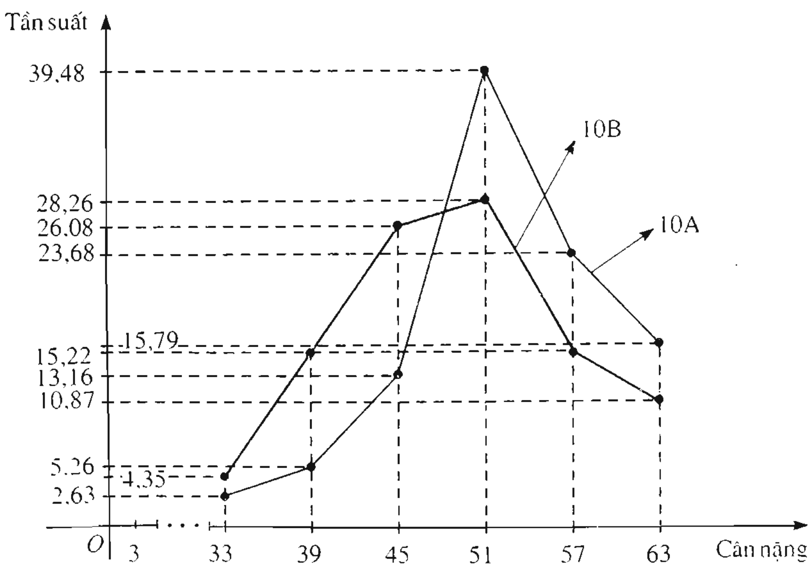
c) Rổ trứng thứ nhất và rổ trứng thứ hai có cùng đơn vị đo và $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 36{,}5$ g ; $s_1 = 6{,}73$ g < 10 g $= s_2$. Suy ra trứng gà ở rổ thứ nhất đồng đều hơn.

19.

a) *Cân nặng của các học sinh lớp 10A và 10B trường Trung học phổ thông L*

Lớp khối lượng (kg)	Tần suất (%)	
	10A	10B
[30, 36)	2,63	4,35
[36, 42)	5,26	15,22
[42, 48)	13,16	26,08
[48, 54)	39,48	28,26
[54, 60)	23,68	15,22
[60, 66]	15,79	10,87
Cộng	100 (%)	100 (%)

b)



Hình 59. Đường gấp khúc tần suất về cân nặng (kg) của học sinh lớp 10A, lớp 10B trường Trung học phổ thông L

Nhìn vào hai đường gấp khúc tần suất ở trên, ta có nhận xét

Trong những người có cân nặng không vượt quá 45 kg, các học sinh lớp 10B luôn chiếm tỉ lệ cao hơn. Còn trong những người có cân nặng không thấp hơn 51 kg, các học sinh lớp 10A luôn chiếm tỉ lệ cao hơn.

c) *Ở lớp 10A*

$$13,16\% + 39,48\% + 23,68\% + 15,79\% = 92,11\%$$

Ở lớp 10B

$$26,08\% + 28,26\% + 15,22\% + 10,87\% = 80,43\ \%$$

d) Ở lớp 10A, ta tính được

$$\overline{x}_1 = 52,4 \text{ kg} \; ; \; s_1 \approx 7,1 \text{ kg}$$

Ở lớp 10B, ta tính được

$$\overline{x}_2 = 49 \text{ kg} \; ; \; s_2 \approx 7,9 \text{ kg}$$

Vì $\overline{x}_1 > \overline{x}_2$, nên học sinh ở lớp 10A có khối lượng lớn hơn.

Chương VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa độ và rađian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \ 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^\circ \approx 0,0175$ rad và ngược lại, 1 rad $\approx 57^\circ 17'45''$.

2. Độ dài l của cung tròn có số đo α rad, bán kính R là $l = R\alpha$.

3. Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối B là

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu A, điểm cuối B. Mỗi giá trị k ứng với một cung.

Nếu viết số đo bằng độ thì ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = a^\circ + k360^\circ, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm $A(1\ ;\ 0)$ làm điểm đầu của cung vì vậy chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

5. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Đổi số đo của các cung sau ra rađian, với độ chính xác đến 0,0001

a) 20^o ; b) $40^o25'$; c) -27^o ; d) $-53^o30'$.

Hướng dẫn

Có hai cách đổi từ độ ra rađian

Cách 1. Dùng công thức $1^o \approx 0{,}0175$ rad. Chú ý rằng khi đó $30' = 0{,}5^o$; $25' = 0{,}4167^o$.

Cách 2. Dùng máy tính bỏ túi. Ví dụ đổi $40^o25'$ ra rađian. Chẳng hạn, với máy CASIO *fx–500 MS* thì ấn ba lần phím $\boxed{\text{MODE}}$ rồi ấn $\boxed{2}$ để màn hình hiện chữ $\boxed{\text{R}}$.

Sau đó ấn

$$\boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{{}^{o},,,}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{{}^{o},,,}\ \boxed{0}\ \boxed{{}^{o},,,}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}\blacktriangleright}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$$

cho kết quả 0,7054 (rad).

Đáp số : a) $20^o \approx 0{,}3490$; b) $40^o25' \approx 0{,}7054$;

c) $-27^o \approx -0{,}4712$; d) $-53^o30' \approx -0{,}9337$.

➤ **Chú ý.** Sử dụng hai cách đổi như trên có thể cho hai kết quả khác nhau.

BÀI 2

Đổi số đo của các góc sau ra độ, phút, giây

a) $\dfrac{\pi}{17}$; b) $\dfrac{2}{3}$; c) -5 ; d) $-\dfrac{2\pi}{7}$.

Hướng dẫn

Cũng như bài 1, có hai cách đổi từ rađian ra độ.

Cách 1. Dùng công thức 1 rad $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^o$.

Cách 2. Dùng máy tính bỏ túi. Ví dụ đổi $\frac{2}{3}$ rad ra độ. Chẳng hạn, với máy CASIO *fx–500 MS* thì ấn ba lần phím $\boxed{\text{MODE}}$ rồi ấn $\boxed{1}$ để màn hình hiện chữ $\boxed{\textbf{D}}$. Sau đó ấn liên tiếp

$$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}\blacktriangleright}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{{}^{\circ}{}'{}''}$$

Ta được $\frac{2}{3}$ rad $\approx 38^\circ 11'50''$.

Đáp số : a) $10^\circ 35'58''$; b) $38^\circ 11'50''$;

c) $-286^\circ 28'44''$; d) $-51^\circ 24'9''$.

BÀI 3

Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo

a) $\frac{\pi}{16}$; b) 25° ; c) 40° ; d) 3.

Lời giải

b) $\alpha = 25^\circ = 0{,}4363$ rad.

Độ dài cung 25° trên đường tròn bán kính 15 cm là

$$l = 15.0{,}4363 \approx 6{,}55 \text{ cm}.$$

Các phần còn lại giải tương tự.

Đáp số : a) 2,94 cm ; b) 6,55 cm ;

c) 10,47 cm ; d) 45 cm.

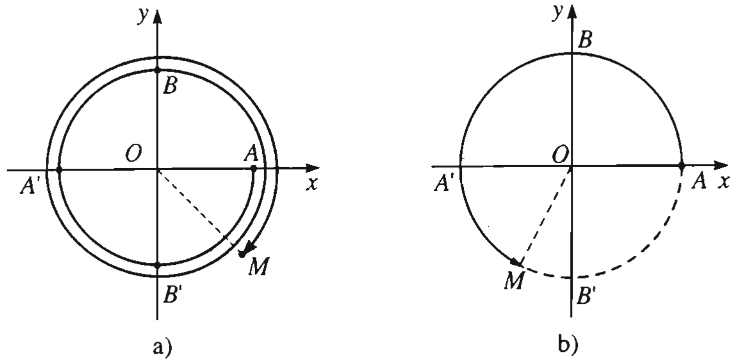
BÀI 4

Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các cung có số đo tương ứng là

a) $-\frac{17}{4}\pi$; b) 240° ; c) $\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn

Ta lấy điểm đầu của các cung là $A(1\ ;\ 0)$. Do đó biểu diễn các cung này là xác định điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo đã cho.



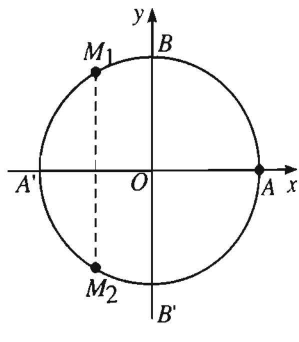
Hình 60

Đáp số :

a) sđ $\overset{\frown}{AM} = -\dfrac{17}{4}\pi$ (h.60a)) ;

b) sđ $\overset{\frown}{AM} = 240^{\circ}$ (h.60b)).

c) Số đo của cung là $k.\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó trước hết ta lấy $k = 0$ được cung có số đo bằng 0, điểm cuối M trùng với điểm A, sau đó lấy $k = 1$ được cung có số đo $\dfrac{2\pi}{3}$, điểm cuối M_1, rồi lấy $k = 2$ được cung có số đo $\dfrac{4\pi}{3}$, điểm cuối M_2. Ba cung này có điểm cuối khác nhau. Khi lấy $k = 3$ ta được cung có số đo $3.\dfrac{2\pi}{3} = 2\pi$ lại có điểm cuối trùng với A, lấy $k = 4$ được điểm cuối trùng với M_1,... (h.61).



Hình 61

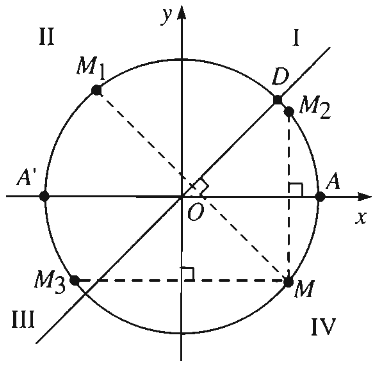
BÀI 5

Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM} = -40^{\circ}$. Gọi M_1, M_2, M_3 tương ứng là điểm đối xứng của M qua đường phân giác của góc phần tư thứ I, trục Ox và trục Oy. Tìm số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$.

Hướng dẫn

Trước hết nhận xét rằng đường phân giác của góc phần tư thứ I, trục Ox, trục Oy đều đi qua tâm O của đường tròn lượng giác nên đều là trục đối xứng của đường tròn này. Do đó M_1, M_2, M_3 đều thuộc đường tròn lượng giác.

Nếu gọi giao điểm của đường phân giác của góc phần tư thứ I với đường tròn lượng giác là D thì sđ $\overset{\frown}{MD}$ = sđ $\overset{\frown}{DM_1}$, từ đó suy ra sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_1}$. Tương tự, sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{AM_2}$ (M_2 đối xứng với M qua trục Ox) và sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{A'M_3}$ ($A'(-1\ ;\ 0)$ và M_3 đối xứng với M qua trục Oy) (h.62).



Hình 62

Giải

a) Ta có $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MD} = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DM_1} = 85^\circ$.

Do đó sđ $\overset{\frown}{AM_1}$ = sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{DM_1}$

$= 45^\circ + 85^\circ = 130^\circ$.

Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = 130^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{AM_2}$. Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_2} = 40^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{A'M_3} = 40^\circ$ suy ra sđ $\overset{\frown}{AM_3} = 40^\circ + 180^\circ = 220^\circ$.

Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_3} = 220^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. BÀI TẬP

1. Đổi số đo của các góc sau ra độ, phút, giây.

a) -4 ; b) $\dfrac{\pi}{13}$; c) $\dfrac{4}{7}$.

2. Đổi số đo của các cung sau ra rađian (chính xác đến 0,001).

a) 137° ; b) $-78^\circ35'$; c) 26°.

3. Một đường tròn có bán kính 25 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo

a) $\dfrac{3\pi}{7}$; b) 49° ; c) $\dfrac{4}{3}$.

4. Một hình lục giác đều $ABCDEF$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó và ngược chiều quay của kim đồng hồ) nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tính số đo bằng rađian của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AF}$.

5. Cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo là 15 rad. Tìm số lớn nhất trong các số đo của cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B, có số đo âm.

6. Tìm số x $(0 \le x < 2\pi)$ và số nguyên k sao cho $a = x + k2\pi$ trong các trường hợp

a) $a = 12{,}4\pi$; b) $a = -\dfrac{9}{5}\pi$; c) $a = \dfrac{13}{4}\pi$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Thế thì tung độ của điểm M là $\sin\alpha$, hoành độ của điểm M là $\cos\alpha$,

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (nếu $\cos\alpha \neq 0$), $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$).

2. $-1 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$, với mọi α.

3. $\tan\alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\cot\alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\cos\alpha \ge 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và IV.

6. $\sin\alpha \ge 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và II.

7. Từ dấu của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ suy ra dấu của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

Chú ý. Các biểu thức có mặt ở hai vế của các đẳng thức trong các mục dưới đây và trong các bài tập sau này đều được quy ước là có nghĩa.

8. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ ; \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ ;$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ ; \qquad \tan\alpha\cot\alpha = 1.$$

9. Giá trị lượng giác của các cung đối nhau

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\ ; \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\ ;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha\ ; \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

10. Giá trị lượng giác của các cung bù nhau

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha\ ; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\ ;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\ ; \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

11. Giá trị lượng giác của các cung hơn kém π

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha\ ; \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha\ ;$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha\ ; \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

12. Giá trị lượng giác của các cung phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha\ ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\ ;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha\ ; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\tan(\alpha + \pi)$; d) $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, xác định điểm cuối các cung $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \pi$ và $\alpha - \frac{\pi}{2}$ thuộc cung phần tư nào, từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác tương ứng.

Giải

a) Ta có $-\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2}$, do đó $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \pi$.

Vì vậy $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

b) Từ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$.

Vì vậy $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.

c) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \pi < 2\pi$ nên $\tan(\alpha + \pi) < 0$.

d) Vì $0 < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

BÀI 2

Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\cos\alpha = 0{,}8$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

c) $\tan\alpha = \frac{13}{8}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Hướng dẫn

Ứng với mỗi khoảng xác định của α đã cho, tìm xem dấu của các giá trị lượng giác của góc α là âm hay dương rồi từ các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản xác định các giá trị lượng giác đó.

Giải

a) Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$ mà $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$,

do đó $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Từ đó suy ra $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$, $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

b) Với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ thì $\sin\alpha < 0$, do đó

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$$

Từ đó suy ra $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\cot\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

c) Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$. Từ hệ thức $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ suy ra

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{64}{233} \text{ hay } \cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{233}}.$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha\tan\alpha = \frac{8}{\sqrt{233}}\cdot\frac{13}{8} = \frac{13}{\sqrt{233}},\ \cot\alpha = \frac{8}{13}.$$

d) Với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin\alpha > 0$. Từ hệ thức $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ ta được

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha} = \dfrac{49}{410}$.

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{410}}$; $\cos\alpha = \sin\alpha\cot\alpha = -\dfrac{19}{\sqrt{410}}$; $\tan\alpha = -\dfrac{7}{19}$.

BÀI 3

Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha\cos\alpha$;

b) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$;

c) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Hướng dẫn

Sử dụng các hằng đẳng thức đại số như

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \ldots$$

và các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản để biến đổi một vế thành vế kia.

Giải

a) $$\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$$

$$= \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$$

$$= 1 - \sin\alpha\cos\alpha.$$

b) $$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos\alpha$ ta được $\dfrac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}$.

c) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$

$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$$

$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^4\alpha$$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

BÀI 4

Rút gọn các biểu thức

a) $A = (1 + \cot\alpha)\sin^3\alpha + (1 + \tan\alpha)\cos^3\alpha$; b) $B = \dfrac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha}$;

c) $C = \dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$; d) $D = \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\cot\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$.

Hướng dẫn

Giống như việc chứng minh các đẳng thức lượng giác, việc rút gọn các biểu thức lượng giác cũng sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác và hằng đẳng thức đại số. Khi biến đổi ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để giản ước hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để khử nhau, đi tới những biểu thức gọn hơn.

Giải

a) $$A = \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin^3\alpha + \left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos^3\alpha$$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)\sin^2\alpha + (\cos\alpha + \sin\alpha)\cos^2\alpha$$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

b) $$B = \frac{2\cos^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)}{\cot^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha} = \sin^2\alpha.$$

c) $$C = \frac{\sin^2\alpha\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^2\alpha\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)} = \frac{\sin^2\alpha.\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha.\dfrac{(\sin^2\alpha - 1)}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin^4\alpha(-\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha(-\cos^2\alpha)} = \tan^6\alpha.$$

d) $$D = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\tan^2\alpha.$$

BÀI 5

Cho $\tan\alpha = \frac{3}{5}$, tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; b) $B = \dfrac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$;

c) $C = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

Hướng dẫn

Để tính giá trị các biểu thức này ta phải biến đổi chúng về một biểu thức theo $\tan\alpha$ rồi thay giá trị của $\tan\alpha$ vào biểu thức đã biến đổi.

Giải

a) Vì $\tan\alpha = \frac{3}{5}$ nên $\cos\alpha \neq 0$, chia tử và mẫu của biểu thức cho $\cos\alpha$, ta được

$$A = \frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} - 1} = -4.$$

b) Vì $\cos\alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\cos^2\alpha$, ta được

$$B = \frac{3\tan^2\alpha + 12\tan\alpha + 1}{\tan^2\alpha + \tan\alpha - 2} = \frac{3.\frac{9}{25} + 12.\frac{3}{5} + 1}{\frac{9}{25} + \frac{3}{5} - 2} = \frac{232}{-26} = -\frac{116}{13}.$$

c) Vì $\cos\alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\cos^2\alpha$, ta được

$$C = \frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25} - 1} = -\frac{15}{16}.$$

C. BÀI TẬP

7. Cho $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau

a) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

c) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

d) $\cot(\alpha + \pi)$.

8. Chứng minh rằng với mọi α, ta luôn có

a) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$;

b) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$;

c) $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha$;

d) $\cot\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$.

9. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu

a) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

b) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \dfrac{7}{3}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = -\dfrac{14}{9}, \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

10. Biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính

a) $A = \dfrac{2\tan\alpha - 3\cot\alpha}{\cos\alpha + \tan\alpha}$;

b) $B = \dfrac{\cos^2\alpha + \cot^2\alpha}{\tan\alpha - \cot\alpha}$.

11. Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính

a) $\sin\alpha + \cos\alpha$;

b) $\dfrac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$.

12. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \tan\alpha\tan\beta$;

b) $\tan 100^\circ + \dfrac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \dfrac{1}{\sin 10^\circ}$;

c) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

13. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = m$, hãy tính theo m

a) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$;

b) $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$.

14. Không dùng bảng số và máy tính, rút gọn các biểu thức

a) $A = \tan 18^\circ \tan 288^\circ + \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ$;

b) $B = \dfrac{1 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha}$.

15. Chứng minh rằng với mọi α làm cho biểu thức $\dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$ có nghĩa, biểu thức đó không thể là một số âm.

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Công thức cộng*

$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$;

$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$;

$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$;

$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$;

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$;

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$.

2. *Công thức nhân đôi*

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$;

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

3. *Công thức hạ bậc*

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2};\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}\ ;\ \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}.$$

4. *Công thức biến đổi tích thành tổng*

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right];$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right];$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right].$$

5. *Công thức biến đổi tổng thành tích*

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2};$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2};$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2};$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 8

Chứng minh rằng

a) $\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \frac{1}{4}\cos 3x;$

b) $\sin 5x - 2\sin x(\cos 4x + \cos 2x) = \sin x.$

Giải

a) Ta có

$$\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\cos x\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos x\cos 2x-\frac{1}{4}\cos x=\frac{1}{4}(\cos 3x+\cos x)-\frac{1}{4}\cos x=\frac{1}{4}\cos 3x.$$

b) $\sin 5x-2\sin x(\cos 4x+\cos 2x)=\sin 5x-2\sin x\cos 4x-2\sin x\cos 2x$

$=\sin 5x-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 3x-\sin x)=\sin x.$

BÀI 9

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và tổng thành tích để tính

a) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ$;

b) $\cos 14^\circ+\cos 134^\circ+\cos 106^\circ$.

Giải

a) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\cos 20^\circ$

$$=\frac{1-4\sin 10^\circ\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\sin 30^\circ-\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=2.$$

b) $\cos 14^\circ+\cos 134^\circ+\cos 106^\circ=\cos 14^\circ+2\cos 120^\circ\cos 14^\circ$

$=\cos 14^\circ-\cos 14^\circ=0.$

C. BÀI TẬP

16. Cho $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, tính $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

17. Cho $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\sin\beta=\dfrac{15}{17}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng.

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

18. Không dùng bảng số và máy tính, chứng minh rằng

a) $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ = \sin 40^\circ$;

b) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \tan\alpha$;

c) $\dfrac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = -\cot 15^\circ$;

d) $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

19. Chứng minh rằng các biểu thức sau là những hằng số không phụ thuộc α, β

a) $\sin 6\alpha \cot 3\alpha - \cos 6\alpha$;

b) $[\tan(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)]^2 - [\cot(180^\circ + \alpha) + \cot(270^\circ + \alpha)]^2$;

c) $(\tan\alpha - \tan\beta)\cot(\alpha - \beta) - \tan\alpha \tan\beta$;

d) $\left(\cot\dfrac{\alpha}{3} - \tan\dfrac{\alpha}{3}\right)\tan\dfrac{2\alpha}{3}$.

20. Không sử dụng bảng số và máy tính, hãy tính

a) $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}$;

b) $\cot 7{,}5^\circ + \tan 67{,}5^\circ - \tan 7{,}5^\circ - \cot 67{,}5^\circ$.

21. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}$;

b) $\dfrac{4\sin^2\alpha}{1 - \cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

c) $\dfrac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha}$;

d) $\dfrac{1 + \sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

22. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = AD$. Biết $\tan\widehat{BDC} = \frac{3}{4}$, tính các giá trị lượng giác của $\widehat{BAD}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

23. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng, đẳng thức nào sai ?

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$;

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$;

c) $\sin(x - \pi) = \sin x$;

d) $\cos(x - \pi) = \cos x$.

24. Tồn tại hay không góc α sao cho

a) $\sin\alpha = -1$;

b) $\cos\alpha = 0$;

c) $\sin\alpha = -0{,}9$;

d) $\cos\alpha = -1{,}2$;

e) $\sin\alpha = 1{,}3$;

g) $\cos\alpha = -2$?

25. Không dùng bảng số và máy tính, hãy xác định dấu của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ với

a) $\alpha = 135^\circ$;

b) $\alpha = 210^\circ$;

c) $\alpha = 334^\circ$;

d) $\alpha = 1280^\circ$;

e) $\alpha = -235^\circ$;

g) $\alpha = -1876^\circ$.

26. Hãy viết theo thứ tự tăng dần các giá trị sau (không dùng bảng số và máy tính)

a) $\sin 40^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 220^\circ$, $\sin 10^\circ$;

b) $\cos 15^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 138^\circ$.

27. Hãy xác định dấu của các tích (không dùng bảng số và máy tính)

a) $\sin 110^\circ \cos 130^\circ \tan 30^\circ \cot 320^\circ$;

b) $\sin(-50^\circ)\tan 170^\circ \cos(-91^\circ)\sin 530^\circ$.

28. Cho tam giác ABC. Hỏi tổng $\sin A + \sin B + \sin C$ âm hay dương ?

29. Tính các giá trị lượng giác của cung α, biết

a) $\sin\alpha = 0{,}6$ khi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\cos\alpha = -0{,}7$ khi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = 2$ khi $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = -3$ khi $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

30. Chứng minh rằng

a) $\sin(270^o - \alpha) = -\cos\alpha$;

b) $\cos(270^o - \alpha) = -\sin\alpha$;

c) $\sin(270^o + \alpha) = -\cos\alpha$;

d) $\cos(270^o + \alpha) = \sin\alpha$.

31. Rút gọn các biểu thức (không dùng bảng số và máy tính)

a) $\sin^2(180^o - \alpha) + \tan^2(180^o - \alpha)\tan^2(270^o + \alpha) + \sin(90^o + \alpha)\cos(\alpha - 360^o)$;

b) $\dfrac{\cos(\alpha - 90^o)}{\sin(180^o - \alpha)} + \dfrac{\tan(\alpha - 180^o)\cos(180^o + \alpha)\sin(270^o + \alpha)}{\tan(270^o + \alpha)}$;

c) $\dfrac{\cos(-288^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o$;

d) $\dfrac{\sin 20^o \sin 30^o \sin 40^o \sin 50^o \sin 60^o \sin 70^o}{\cos 10^o \cos 50^o}$.

32. Cho $0^o < \alpha < 90^o$.

a) Có giá trị nào của α sao cho $\tan\alpha < \sin\alpha$ hay không ?

b) Chứng minh rằng $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

33. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết

a) $\cos\alpha = 2\sin\alpha$ khi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\cot\alpha = 4\tan\alpha$ khi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

34. Chứng minh các đẳng thức

a) $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha = \tan\alpha \tan 2\alpha \tan 3\alpha$;

b) $\dfrac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \sin 4\alpha$;

c) $\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha} = \tan^2\alpha$;

d) $\dfrac{\cos\alpha\sin(\alpha-3) - \sin\alpha\cos(\alpha-3)}{\cos\left(3-\dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{2}\sin 3} = -\dfrac{2\tan 3}{\sqrt{3}}$.

35. Chứng minh rằng các biểu thức sau là những hằng số không phụ thuộc α

a) $A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

b) $B = 4(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - \cos 4\alpha$;

c) $C = 8(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$.

36. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\tan 2\alpha}{\tan 4\alpha - \tan 2\alpha}$;

b) $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$, với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$;

d) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. *Đáp số :*

a) $-4 \approx -229^\circ 10'59''$; b) $\dfrac{\pi}{13} \approx 13^\circ 50'21''$; c) $\dfrac{4}{7} \approx 32^\circ 44'26''$.

2. *Đáp số :*

a) $137^\circ \approx 2,391$; b) $-78^\circ 35' \approx -1,371$; c) $26^\circ \approx 0,454$.

3. *Đáp số :*

a) $l \approx 33,66$ cm ; b) $l \approx 21,380$ cm ; c) $l \approx 33,333$ cm.

4. (h.63)

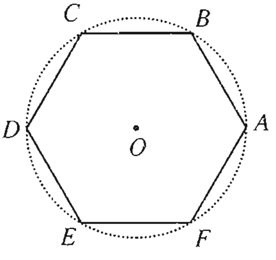
sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AC} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AD} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AE} = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AF} = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Hình 63

5. Ta có sđ $\overset{\frown}{AB} = 15 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$15 + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{15}{2\pi}.$$

Vậy với $k = -3$ ta được cung $\overset{\frown}{AB}$ có số đo âm lớn nhất là $15 - 6\pi$.

6. *Đáp số :*

a) $x = 0{,}4\pi$; $k = 6$; b) $x = \dfrac{\pi}{5}$; $k = -1$; c) $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $k = 1$.

7. a) Với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ thì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \dfrac{\pi}{2} < \pi$, do đó $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) < 0$.

b) $\dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} + \alpha < 2\pi$ nên $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$.

c) $0 < \dfrac{3\pi}{2} - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

d) $2\pi < \alpha + \pi < \dfrac{5\pi}{2}$ nên $\cot(\alpha + \pi) > 0$.

8. a) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

b) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

c) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha.$

d) $\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$

9. a) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha<0.$

Vậy $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4},$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15},\ \cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}.$

b) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\cos\alpha<0.$

Vậy $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{-\sqrt{5}}{3},$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cot\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$

c) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha>0,\ \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}.$

Vậy $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{49}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{58}},$

$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\frac{7}{\sqrt{58}},\ \cot\alpha=\frac{3}{7}.$

d) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\Rightarrow\sin\alpha<0,\ \sin^2\alpha=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}.$

Vậy $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{196}{81}}}=-\frac{9}{\sqrt{277}},$

$\cos\alpha=\sin\alpha\cot\alpha=\frac{14}{\sqrt{277}},\quad\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=-\frac{9}{14}.$

10. a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0.$

Ta có $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{7}},\ \cot\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3};$$

Vậy $$A = \frac{-\frac{6}{\sqrt{7}} + \sqrt{7}}{-\frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{3}{\sqrt{7}}} = -\frac{4}{19}.$$

b) $$B = \frac{\frac{7}{16} + \frac{7}{9}}{-\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\frac{7\times 25}{144}}{-\frac{2}{3\sqrt{7}}} = -\frac{175\sqrt{7}}{96}.$$

11. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $\tan\alpha > 0$.

Ta có $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6 \Leftrightarrow \tan\alpha - \frac{3}{\tan\alpha} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha - 6\tan\alpha - 3 = 0.$$

Vì $\tan\alpha > 0$ nên $\tan\alpha = 3 + 2\sqrt{3}$.

a) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{22+12\sqrt{3}}$

suy ra $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$, $\sin\alpha = -\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$.

Vậy $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$.

b) $$\frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(2 - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}$$

$$= \tan\alpha.\frac{2\cos\alpha - 1}{\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1} = \tan^2\alpha.\frac{2\cos\alpha - 1}{\sin\alpha + 1}$$

$$= (3 + 2\sqrt{3})^2.\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{22 + 12\sqrt{3}}} - 1}{-\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{22 + 12\sqrt{3}}} + 1} = (21 + 12\sqrt{3}).\frac{2 + \sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{22 + 12\sqrt{3}}}.$$

12. a) $$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\beta} - \dfrac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}} = \tan\alpha\tan\beta.$$

b) $$\tan 100^o + \frac{\sin 530^o}{1 + \sin 640^o} = \tan(90^o + 10^o) + \frac{\sin(360^o + 170^o)}{1 + \sin(720^o - 80^o)}$$

$$= -\cot 10^o + \frac{\sin 170^o}{1 - \sin 80^o} = -\frac{\cos 10^o}{\sin 10^o} + \frac{\sin 10^o}{1 - \cos 10^o}$$

$$= \frac{-\cos 10^o + \cos^2 10^o + \sin^2 10^o}{\sin 10^o(1 - \cos 10^o)} = \frac{1}{\sin 10^o}.$$

c) $$2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 1 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 1$$

$$= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + (\sin^4 x + \cos^4 x)$$

$$= 3(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

13. a) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha = m^2 - 2$;

b) $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)(\tan^2\alpha - \tan\alpha\cot\alpha + \cot^2\alpha)$

$= m(m^2 - 3).$

14. a) $A = \tan(90^o - 72^o)\tan(360^o - 72^o) + \sin32^o\sin(180^o - 32^o)$

$- \sin(360^o - 58^o)\sin(180^o - 58^o)$

$= \cot72^o(-\tan72^o) + \sin^2 32^o + \sin^2 58^o$

$= -1 + \sin^2 32^o + \cos^2 32^o$

$= -1 + 1 = 0.$

b) $$B = \frac{1 + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)}$$

$$= \frac{1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 - [(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)]}$$

$$= \frac{2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2}{3}(1 + \tan^2\alpha).$$

15. Ta có

$$\frac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)} = \frac{\sin^2\alpha(1 + \cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1 + \sin\alpha)}.$$

Vì $1 + \cos\alpha \geq 0$ và $1 + \sin\alpha \geq 0$ cho nên biểu thức đã cho không thể có giá trị là một số âm.

16. Ta có

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

$$= \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

17. Ta có

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}\ ;\ \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}.$$

Do đó

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{8}{17}\cdot\frac{8}{17} + \frac{15}{17}\cdot\frac{15}{17} = \frac{289}{289} = 1.$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ nên từ đó suy ra $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

18. a) $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ = (\sin 20^\circ - \sin 100^\circ) + 2\sin 40^\circ$

$$= 2\cos 60^\circ \sin(-40^\circ) + 2\sin 40^\circ$$

$$= -\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ = \sin 40^\circ.$$

b) $$\frac{\sin(45^\circ+\alpha) - \cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha) + \cos(45^\circ+\alpha)} = \frac{\sin(45^\circ+\alpha) - \sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha) + \sin(45^\circ-\alpha)}$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \sin\alpha}{2\sin 45^\circ \cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

c) $$A = \frac{3\cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = \frac{\cot^2 30^\circ \cot^2 15^\circ - 1}{\cot^2 30^\circ - \cot^2 15^\circ}$$

$$= \frac{\cot 30^\circ \cot 15^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 15^\circ}\cdot\frac{\cot 30^\circ \cot 15^\circ - 1}{\cot 30^\circ + \cot 15^\circ}.$$

Mặt khác ta có

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\sin\alpha\sin\beta$ ta được

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}.$$

Tương tự

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

Do đó

$$A = \cot(15^o - 30^o)\cot(15^o + 30^o) = -\cot15^o.$$

d) $\sin200^o\sin310^o + \cos340^o\cos50^o$

$$= \sin(180^o + 20^o)\sin(360^o - 50^o) + \cos(360^o - 20^o)\cos50^o$$

$$= (-\sin20^o)(-\sin50^o) + \cos20^o\cos50^o$$

$$= \cos50^o\cos20^o + \sin50^o\sin20^o$$

$$= \cos(50^o - 20^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

19. a) $\sin6\alpha\cot3\alpha - \cos6\alpha = 2\sin3\alpha\cos3\alpha\,.\,\frac{\cos3\alpha}{\sin3\alpha} - (2\cos^2 3\alpha - 1)$

$$= 2\cos^2 3\alpha - 2\cos^2 3\alpha + 1 = 1.$$

b) $[\tan(90^o - \alpha) - \cot(90^o + \alpha)]^2 - [\cot(180^o + \alpha) + \cot(270^o + \alpha)]^2$

$$= (\cot\alpha + \tan\alpha)^2 - (\cot\alpha - \tan\alpha)^2$$

$$= \cot^2\alpha + 2 + \tan^2\alpha - \cot^2\alpha + 2 - \tan^2\alpha = 4.$$

c) $(\tan\alpha - \tan\beta)\cot(\alpha - \beta) - \tan\alpha\tan\beta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)} - \tan\alpha\tan\beta$

$$= 1 + \tan\alpha\tan\beta - \tan\alpha\tan\beta = 1.$$

d) $\left(\cot\frac{\alpha}{3} - \tan\frac{\alpha}{3}\right)\tan\frac{2\alpha}{3} = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\right)\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}}$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} = \frac{\cos\frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2}\sin\frac{2\alpha}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{2\alpha}{3}} = 2.$$

20. a) $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$

$$=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{8}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\frac{7\pi}{8}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\cos\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+1-2\cos\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+1-2\cos\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}\right.$$

$$\left.+1-2\cos\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{8}\left(4+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}.$$

b) $\cot 7{,}5^{\circ}+\tan 67{,}5^{\circ}-\tan 7{,}5^{\circ}-\cot 67{,}5^{\circ}$

$$=\frac{\cos 7,5^{\circ}}{\sin 7,5^{\circ}}-\frac{\sin 7,5^{\circ}}{\cos 7,5^{\circ}}+\frac{\sin 67,5^{\circ}}{\cos 67,5^{\circ}}-\frac{\cos 67,5^{\circ}}{\sin 67,5^{\circ}}$$

$$=\frac{\cos^2 7,5^{\circ}-\sin^2 7,5^{\circ}}{\sin 7,5^{\circ}\cos 7,5^{\circ}}+\frac{\sin^2 67.5^{\circ}-\cos^2 67,5^{\circ}}{\sin 67,5^{\circ}\cos 67,5^{\circ}}$$

$$=\frac{\cos 15^{\circ}}{\frac{1}{2}\sin 15^{\circ}}-\frac{\cos 135^{\circ}}{\frac{1}{2}\sin 135^{\circ}}=\frac{2(\sin 135^{\circ}\cos 15^{\circ}-\cos 135^{\circ}\sin 15^{\circ})}{\sin 15^{\circ}\sin 135^{\circ}}$$

$$= \frac{2\sin(135^\circ - 15^\circ)}{\sin(45^\circ - 30^\circ)\sin(180^\circ - 45^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin 120^\circ}{(\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ)\sin 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 6 + 2\sqrt{3}.$$

21. a) $$\frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha + 1)}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\cos\alpha(2\cos\alpha + 1)} = \tan\alpha.$$

b) $$\frac{4\sin^2\alpha}{1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{16\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 16\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

c) $$\frac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

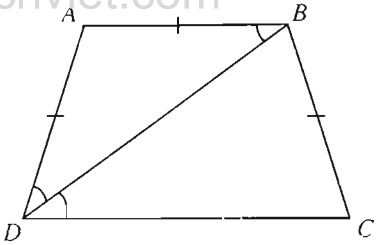
$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = -\cot\frac{\alpha}{2}.$$

d) $$\frac{1 + \sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha)}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

22. Ta có (h.64)

$$\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{BDC} = \widehat{ADB}.$$



Hình 64

Suy ra $\widehat{BAD} = \pi - 2\widehat{BDC}$.

Từ đó ta có

$$\tan\widehat{BAD} = -\tan 2\widehat{BDC} = -\frac{2\tan\widehat{BDC}}{1-\tan^2\widehat{BDC}} = -\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \widehat{BAD} < \pi$ nên $\cos\widehat{BAD} < 0$. Do đó

$$\cos\widehat{BAD} = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\widehat{BAD}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{576}{49}}} = -\frac{7}{25}.$$

$$\sin\widehat{BAD} = \cos\widehat{BAD}\tan\widehat{BAD} = \frac{-7}{25}\cdot\frac{-24}{7} = \frac{24}{25}.$$

23. *Đáp số :*

a) Đúng ; b) Sai ; c) Sai ; d) Sai.

24. *Đáp số :*

a) Có ; b) Có ; c) Có ;

d) Không, vì $-1{,}2 < -1$. e) Không, vì $1{,}3 > 1$;

g) Không, vì $-2 < -1$.

25. a) $\sin 135^\circ > 0$, $\cos 135^\circ < 0$; b) $\sin 210^\circ < 0$, $\cos 210^\circ < 0$.

c) $\sin 334^\circ < 0$, $\cos 334^\circ > 0$;

d) $\sin 1280^\circ = \sin(3.360^\circ + 200^\circ) = \sin 200^\circ < 0$,

$\cos 1280^\circ = \cos 200^\circ < 0$;

e) $\sin(-235^o) = \sin(-180^o - 55^o) = -\sin(-55^o) = \sin 55^o > 0$,

$\cos(-235^o) < 0$;

g) $\sin(-1876^o) = \sin(-1800^o - 76^o) = \sin(-76^o) = -\sin 76^o < 0$,

$\cos(-1876^o) = \cos(-76^o) = \cos 76^o > 0$.

26. a) $\sin 220^o < \sin 10^o < \sin 40^o < \sin 90^o$.

b) $\cos 138^o < \cos 90^o < \cos 15^o < \cos 0^o$.

27. a) Ta có

$$\sin 110^o > 0 \text{ ; } \cos 130^o < 0 \text{ ; } \tan 30^o > 0 \text{ ; } \cot 320^o < 0,$$

do đó tích của chúng dương.

b) $\sin(-50^o) < 0$; $\tan 170^o < 0$; $\cos(-91^o) < 0$; $\sin 530^o > 0$,

do đó tích của chúng âm.

28. Vì các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ là góc trong tam giác ABC nên $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$. Do đó $\sin A + \sin B + \sin C > 0$.

29. a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$, do đó

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{3}{4}, \ \cot\alpha = \frac{4}{3}.$$

b) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$, do đó

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}49} = \sqrt{0{,}51} \approx 0{,}71.$$

Suy ra $\quad \tan\alpha = -\dfrac{0{,}7}{0{,}71} \approx -0{,}98$; $\cot\alpha \approx -1{,}01$.

c) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$, do đó

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{2}\cdot$$

d) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0$, do đó

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},\ \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\tan\alpha = -\frac{1}{3}\cdot$$

30. a) $\sin(270^o - \alpha) = \sin(360^o - (90^o + \alpha)) = -\sin(90^o + \alpha) = -\cos\alpha.$

b) $\cos(270^o - \alpha) = \cos(360^o - (90^o + \alpha)) = \cos(90^o + \alpha) = -\sin\alpha.$

c) $\sin(270^o + \alpha) = \sin(360^o - (90^o - \alpha)) = -\sin(90^o - \alpha) = -\cos\alpha.$

d) $\cos(270^o + \alpha) = \cos(360^o - (90^o - \alpha)) = \cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha.$

31. a) $\sin^2(180^o - \alpha) + \tan^2(180^o - \alpha)\tan^2(270^o + \alpha) + \sin(90^o + \alpha)\cos(\alpha - 360^o)$

$$= \sin^2\alpha + \tan^2\alpha\cot^2\alpha + \cos^2\alpha = 2.$$

b) $\dfrac{\cos(\alpha - 90^o)}{\sin(180^o - \alpha)} + \dfrac{\tan(\alpha - 180^o)\cos(180^o + \alpha)\sin(270^o + \alpha)}{\tan(270^o + \alpha)}$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\tan\alpha(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)}{-\cot\alpha} = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

c) $\dfrac{\cos(-228^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o$

$$= \frac{\cos(72^o - 360^o)\cot 72^o}{\tan(18^o - 180^o)\sin(180^o - 72^o)} - \tan 18^o$$

$$= \frac{\cos 72^o\cot 72^o}{\tan 18^o\sin 72^o} - \tan 18^o$$

$$= \frac{\cot^2 72^o}{\tan 18^o} - \tan 18^o = \frac{\tan^2 18^o}{\tan 18^o} - \tan 18^o = 0.$$

d) Ta có $\sin 70^o = \cos 20^o$. $\sin 50^o = \cos 40^o$, $\sin 40^o = \cos 50^o$. Vì vậy

$$\frac{\sin 20^o \sin 30^o \sin 40^o \sin 50^o \sin 60^o \sin 70^o}{\cos 10^o \cos 50^o}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 20^o \cos 20^o \cos 50^o \cos 40^o}{\cos 10^o \cos 50^o} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 40^o \cos 40^o}{\cos 10^o}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}\sin 80^o}{\cos 10^o} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

32. a) Với $0^o < \alpha < 90^o$ thì $0 < \cos\alpha < 1$ hay $\dfrac{1}{\cos\alpha} > 1$.

Nhân hai vế với $\sin\alpha > 0$ ta được $\tan\alpha > \sin\alpha$.

Vậy không có giá trị nào của α ($0^o < \alpha < 90^o$) để $\tan\alpha < \sin\alpha$.

b) Ta có $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$ và $\sin\alpha\cos\alpha > 0$. Do đó

$$\begin{aligned}(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha > 1.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

33. a) Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$. Ta có

$$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

Mặt khác $\cos^2\alpha = (2\sin\alpha)^2 = 4\sin^2\alpha$ nên $5\sin^2\alpha = 1$ hay

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \tan\alpha = \frac{1}{2},\ \cot\alpha = 2.$$

b) Với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$.

Ta có

$$\cot\alpha = 4\tan\alpha \Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} = 4\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{2},\ \cot\alpha = -2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

34. a) $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) - (\tan 2\alpha + \tan\alpha)$

$$= \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} - (\tan 2\alpha + \tan\alpha)$$

$$= (\tan 2\alpha + \tan\alpha)\left(\frac{1}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} - 1\right)$$

$$= \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha}(1 - 1 + \tan 2\alpha \tan\alpha) = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan\alpha.$$

b) $$\frac{4\tan\alpha(1 - \tan^2\alpha)}{(1 + \tan^2\alpha)^2} = \frac{2.2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}\cdot\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha.$$

c) $$\frac{1 + \tan^4\alpha}{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha} = \frac{1 + \tan^4\alpha}{\tan^2\alpha + \dfrac{1}{\tan^2\alpha}} = \frac{1 + \tan^4\alpha}{\dfrac{\tan^4\alpha + 1}{\tan^2\alpha}} = \tan^2\alpha.$$

d) $$\frac{\cos\alpha\sin(\alpha - 3) - \sin\alpha\cos(\alpha - 3)}{\cos\left(3 - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{2}\sin 3}$$

$$= \frac{\sin(\alpha - 3 - \alpha)}{\cos 3\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin 3\sin\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2}\sin 3} = \frac{-\sin 3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3} = -\frac{2\tan 3}{\sqrt{3}}.$$

35. a) $A = 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

$$= -\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= -(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = -1.$$

b) $B = 4[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] - \cos 4\alpha$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) - 1 + 2\sin^2 2\alpha = 3.$$

c) $C = 8(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$

$$= 8(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]$$

$$- \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$$

$$= 8\cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) - \cos 6\alpha - 7\cos 2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha - 4\cos 2\alpha \sin^2 2\alpha - \cos(4\alpha + 2\alpha)$$

$$= \cos 2\alpha - 2\sin 4\alpha \sin 2\alpha - \cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha - (\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha)$$

$$= \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0.$$

36. a) $$\frac{\tan 2\alpha}{\tan 4\alpha - \tan 2\alpha} = \frac{\tan 2\alpha}{\dfrac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} - \tan 2\alpha} = \frac{1 - \tan^2 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha} = \cos 4\alpha.$$

b) $$\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = \sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, suy ra $0 < \sin\dfrac{\alpha}{2} < \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Vậy

$$\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

c) $$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1}{3 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1}$$

$$= \frac{2(\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1)}{2(\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1)}$$

$$= \frac{(\cos 2\alpha - 1)^2}{(\cos 2\alpha + 1)^2} = \frac{(-2\sin^2\alpha)^2}{(2\cos^2\alpha)^2} = \tan^4\alpha.$$

d) $$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{(\sin 5\alpha + \sin\alpha) + \sin 3\alpha}{(\cos 5\alpha + \cos\alpha) + \cos 3\alpha}$$

$$= \frac{\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha + 1)} = \tan 3\alpha.$$

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$ trong hai trường hợp sau

a) Parabol nhận trục tung làm trục đối xứng và cắt đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ tại các điểm có hoành độ là -1 và $\frac{3}{2}$.

b) Parabol đi qua gốc toạ độ và có đỉnh là điểm $(1 ; 2)$.

2. Cho phương trình bậc hai

$$ax^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2a = 0. \qquad (E)$$

Kí hiệu S là tổng, P là tích các nghiệm (nếu có) của phương trình trên.

a) Với giá trị nào của a, phương trình (E) có nghiệm ?

b) Biện luận dấu của S và P. Từ đó suy ra dấu các nghiệm của (E).

c) Tìm hệ thức giữa S và P độc lập đối với a.

d) Với những giá trị nào của a, các nghiệm x_1, x_2 của (E) thoả mãn hệ thức $x_1 = 3x_2$? Tìm các nghiệm x_1, x_2 trong mỗi trường hợp đó.

3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

a) (1) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$;

b) (2) $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2. \end{cases}$

4. Với những giá trị nào của m, hệ phương trình sau có vô số nghiệm ?

a) (3) $\begin{cases} (m-2)x + 27y = 4,5 \\ 2x + (m+1)y = -1 \end{cases}$;

b) (4) $\begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 3y = 3. \end{cases}$

5. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13 \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$

6. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3y^3 = -8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3. \end{cases}$

7. Xác định các giá trị của m sao cho bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi giá trị của x

a) $mx^2 + 1 > 4x - 3m$;

b) $5m - 2mx > (m - 3)x^2$;

c) $(m + 4)x^2 < 2(mx - m + 3)$.

8. Với những giá trị nào của a, hiệu giữa hai nghiệm của phương trình

$$2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$$

bằng tích của chúng ?

9. Hãy xác định k để hiệu giữa các nghiệm của phương trình $5x^2 - kx + 1 = 0$ bằng 1.

10. Tìm giá trị của a sao cho tổng các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$$

bằng tổng bình phương các nghiệm đó.

11. Không giải phương trình

$$3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

hãy tính tổng lập phương các nghiệm của nó.

12. Tính $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$, trong đó x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$2x^2 - 3ax - 2 = 0.$$

13. Tìm giá trị của a sao cho phương trình

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt và đều lớn hơn 3.

14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết toạ độ trung điểm các cạnh BC, CA, AB lần lượt là $M(1 ; 2)$, $N(3 ; -5)$, $P(5 ; 7)$.

15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy hãy tìm toạ độ các đỉnh M, N của hình vuông $AMBN$, biết toạ độ hai đỉnh $A(1 ; 1)$ và $B(3 ; 5)$.

16. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian giải xong một bài tập Toán của 44 học sinh lớp 10A, trường Trung học phổ thông K

23,5	23,0	21,1	23,7	23,2	21,9	24,0	22,7
19,6	22,5	22,3	20,0	23,2	21,5	20,1	23,7
20,6	24,6	22,3	21,0	25,4	22,7	21,3	
21,2	23,6	23,1	21,6	24,2	22,6	22,0	
22,7	19,8	23,2	21,9	20,3	22,6	22,2	
21,1	20,5	24,8	22,5	20,9	25,0	23,3	

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp với các lớp như sau

[19,5 ; 20,5) ; [20,5 ; 21,5) ; [21,5 ; 22,5) ; [22,5 ; 23,5) ; [23,5 ; 24,5) ; [24,5 ; 25,5].

b) Dựa vào bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập hãy nêu nhận xét về thời gian làm một bài tập của 44 học sinh kể trên.

c) Hãy tính số trung bình cộng $\overline{x}$, phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x của các số liệu thống kê đã cho.

d) Giả sử rằng, cũng khảo sát thời gian giải xong một bài tập Toán của học sinh ở các lớp 10B, 10C của trường K, rồi tính các số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê ở từng lớp, ta thu được kết quả sau :

Ở lớp 10B có $\overline{y} = 20$ phút, $s_y^2 = 1$, $s_y = 1$ phút.

Ở lớp 10C có $\overline{z} = 22{,}4$ phút, $s_z^2 = 1$, $s_z = 1$ phút.

Hãy so sánh thời gian giải xong một bài tập Toán của học sinh ở ba lớp 10A, 10B, 10C đã cho.

e) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập được.

17. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\cot\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(\pi<\alpha<2\pi)$;

b) $\dfrac{\cos 4a\tan 2a-\sin 4a}{\cos 4a\cot 2a+\sin 4a}=-\tan^2 2a$; c) $\dfrac{\sin^2 2a+4\sin^2 a-4}{1-8\sin^2 a-\cos 4a}=\dfrac{1}{2}\cot^4 a$;

d) $1+2\cos 7a=\dfrac{\sin 10,5a}{\sin 3,5a}$; e) $\dfrac{\tan 3a}{\tan a}=\dfrac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}$.

18. Rút gọn

a) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$; b) $3-4\cos 2a+\cos 4a$;

c) $\cos 4a-\sin 4a\cot 2a$; d) $\dfrac{\cot a+\tan a}{1+\tan 2a\tan a}$.

19. Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính

a) $\cos 67^\circ 30'$ và $\cos 75^\circ$; b) $\dfrac{\cot 15^\circ+1}{2\cot 15^\circ}$;

c) $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ$.

20. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=\tan a$;

b) $\dfrac{\cot a+\tan a}{1+\tan 2\tan a}=2\cot 2a$;

c) $\dfrac{\sqrt{2}-\sin a-\cos a}{\sin a-\cos a}=-\tan\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$;

d) $\cos 2a-\cos 3a-\cos 4a+\cos 5a=-4\sin\dfrac{a}{2}\sin a\cos\dfrac{7a}{2}$.

21. Rút gọn

a) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a$;

b) $4\cos^4 a-2\cos 2a-\dfrac{1}{2}\cos 4a$;

c) $\sin^2 a\left(1+\dfrac{1}{\sin a}+\cot a\right)\left(1-\dfrac{1}{\sin a}+\cot a\right)$;

d) $\dfrac{\cos 2a}{\cos^4 a-\sin^4 a}-\dfrac{\cos^4 a+\sin^4 a}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2a}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Vì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng cho nên hàm số

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

là hàm số chẵn, do đó

$$f(x)=ax^2+bx+c=ax^2-bx+c=f(-x),\ \forall x$$

suy ra $b=0$. Ta còn phải xác định a và c.

Vì parabol cắt đường thẳng $y=\dfrac{x}{2}$ tại các điểm có hoành độ -1 và $\dfrac{3}{2}$ nên nó đi qua các điểm

$$\left(-1\,;-\frac{1}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{4}\right).$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+c=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{9a}{4}+c=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1$, $c=-\dfrac{3}{2}$.

Parabol phải tìm là $y=x^2-\dfrac{3}{2}$.

b) Vì parabol đi qua (0 ; 0) nên $y(0) = c = 0$.

Do parabol có đỉnh là (1 ; 2) nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b^2 + 8a = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a = -2, b = 4$.

Parabol phải tìm là $y = -2x^2 + 4x$.

2. a) Phải có

$$\Delta = (a+1)^2 - (a+1)^2 a^2 = (a+1)^2(1 - a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1, a \neq 0.$$

b) Ta có

$$P = (a+1)^2,$$

$P = 0 \Leftrightarrow a = -1$, khi đó $x_1 = x_2 = 0$.

$P > 0, \forall a \neq -1$, khi đó x_1, x_2 cùng dấu.

Mặt khác

$$S = \frac{2(a+1)}{a}$$

suy ra :

Với $0 < a \leq 1$ thì hai nghiệm của phương trình (E) đều dương ;

Với $-1 \leq a < 0$ thì hai nghiệm của phương trình (E) đều âm.

c) Từ $S = \dfrac{2(a+1)}{a}$ suy ra $a = \dfrac{2}{S-2}$.

Do đó $P = \left(\dfrac{2}{S-2} + 1\right)^2 = \dfrac{S^2}{(S-2)^2} \Leftrightarrow (S-2)^2 P - S^2 = 0$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow 4x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a}$,

$$\begin{cases} x_1 x_2 = (a+1)^2 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow 3x_2^2 = (a+1)^2.$$

Suy ra $(a+1)^2(4a^2-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Với $a=-1$ ta có $x_1=x_2=0$;

Với $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x_2=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$; $x_1=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$;

Với $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x_2=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$; $x_1=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$.

3. a) Hệ phương trình (1) tương đương với $\begin{cases}(1-a)^2x=1-2a^2\\ x+ay=1.\end{cases}$ Từ đó,

Với $a\neq\pm1$, hệ phương trình (1) có nghiệm $x=\dfrac{1-2a^2}{1-a^2}$; $y=\dfrac{a}{1-a^2}$;

Với $a=1$, hệ phương trình (1) trở thành $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2\end{cases}$ (vô nghiệm) ;

Với $a=-1$, hệ phương trình (1) trở thành $\begin{cases}x-y=1\\ -x+y=-2\end{cases}$ (vô nghiệm).

b) Hệ phương trình (2) tương đương với $\begin{cases}a^2x=a^2+1\\ x+(a-1)y=2.\end{cases}$ Từ đó,

Với $a\neq0$, hệ phương trình (2) có nghiệm $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$, $y=\dfrac{a+1}{a^2}$;

Với $a=0$, hệ phương trình (2) trở thành $\begin{cases}x-y=1\\ x-y=2\end{cases}$ (vô nghiệm).

4. a) Hệ phương trình (3) tương đương với

$\begin{cases}(m^2-m-56)y=-m-7\\ 2x+(m+1)y=-1.\end{cases}$ Từ đó nếu $m^2-m-56\neq0$ thì hệ có nghiệm.

Ta xét $m^2 - m - 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -7 \\ m = 8. \end{array}\right.$

Với $m = -7$ hệ phương trình (3) trở thành $\begin{cases} -9x + 27y = 4,5 \\ 2x - 6y = -1. \end{cases}$ (3a)

Vì $-\dfrac{9}{2} = \dfrac{27}{-6} = \dfrac{4,5}{-1}$ nên hệ phương trình (3a) có vô số nghiệm.

Với $m = 8$ ta có hệ $\begin{cases} 6x + 27y = 4,5 \\ 2x + 9y = -1. \end{cases}$ (3b)

Vì $\dfrac{6}{2} = \dfrac{27}{9} \neq \dfrac{4,5}{-1}$ cho nên hệ phương trình (3b) vô nghiệm.

Trả lời : $m = -7$.

b) Hệ phương trình (4) tương đương với $\begin{cases} (9 - m^2)x = 9 - 3m \\ mx + 3y \quad = 3. \end{cases}$

Tương tự câu a) ta xét trường hợp $9 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Với $m = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$ (4a)

Rõ ràng hệ phương trình (4a) có vô số nghiệm.

Với $m = -3$ hệ phương trình (4) trở thành

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ -3x + 3y = 3. \end{cases} \qquad (4b)$$

Vì $\dfrac{3}{-3} = \dfrac{-3}{3} \neq \dfrac{3}{3}$ cho nên hệ phương trình (4b) vô nghiệm.

Trả lời : $m = 3$.

5. a) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 + (x + y) = 12. \end{cases}$

Đặt $u = x + y$ ta được $u^2 + u - 12 = 0$.

Giải ra ta được $u_1 = 3$, $u_2 = -4$.

Với $u = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$ (*)

Giải hệ phương trình (*) ta được hai nghiệm $(1 ; 2)$ và $(2 ; 1)$.

Với $u = -4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 9 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Đáp số : $(1 ; 2)$ và $(2 ; 1)$.

b) Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \sqrt{xy} \end{cases}$ $(v \geq 0)$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13 \\ u - v = 3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u - v = 3 \\ u^2 - 9u + 20 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$u = 5, v = 2$$

hoặc $u = 4, v = 1$.

Vậy

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{và} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số : Hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$(4 ; 1)$; $(1 ; 4)$; $(2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3})$; $(2 + \sqrt{3} ; 2 - \sqrt{3})$.

6. a) Đặt $u = x^3$, $v = y^3$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 7 \\ uv = -8. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} u = 8 \\ v = -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} u = -1 \\ v = 8. \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(2 ; -1) \text{ và } (-1 ; 2).$$

b) Rõ ràng x, y, z đều khác 0, khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{11}{12}$.

Từ đó dễ thấy $\dfrac{1}{z} = \dfrac{11}{12} - 1 = -\dfrac{1}{12} \Rightarrow z = -12$.

Tương tự, ta có $y = \dfrac{12}{5}$, $x = \dfrac{12}{7}$.

Đáp số : $\left(\dfrac{12}{7} ; \dfrac{12}{5} ; -12\right)$

7. a) $mx^2 + 1 > 4x - 3m \Leftrightarrow mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$.

Phải có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m > 0 \\ 4 - m(3m+1) < 0. \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình trên ta được $m > 1$.

b) $5m - 2mx > (3 - m)x^2 \Leftrightarrow (m-3)x^2 - 2mx + 5m > 0$.

Cần có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m > 3 \\ m^2 - 5m(m-3) < 0. \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình ta được $m > \dfrac{15}{4}$.

c) $(m+4)x^2 < 2(mx - m + 3) \Leftrightarrow (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 6 < 0$.

Cần có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m < -4 \\ m^2 - (m+4)(2m-6) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ -m^2 - 2m + 24 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 6. \end{array}\right. \end{cases}$$

Đáp số : $m < -4$.

8. Ta có $\Delta = (a+1)^2 - 8(a-1) = a^2 + 2a + 1 - 8a + 8$

$$= a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2 \geq 0 \text{ nên phương trình đã cho có nghiệm.}$$

Xét $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 x_2^2$

hay $$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a-1}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -4a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Đáp số : $a = 2$

9. Cần có $\Delta = k^2 - 20 > 0$.

Xét $x_1 - x_2 = (x_1 + x_2) - 2x_2 = 1 \Rightarrow \dfrac{k}{5} - 2x_2 = 1$

suy ra $x_2 = \dfrac{k-5}{10}$; $x_1 = 1 + x_2 = \dfrac{k+5}{10}$.

Do đó

$$x_1x_2 = \frac{k-5}{10} \cdot \frac{k+5}{10} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow k^2 = 45.$$

Đáp số : $k = \pm 3\sqrt{5}$.

10. $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$.

Vì $\Delta' = (a-1)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Ta có $x_1 + x_2 = 2a$;

$x_1x_2 = 2a - 1$;

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

Suy ra $4a^2 - 2(2a-1) = 2a \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $a = \dfrac{1}{2}$; $a = 1$.

Đáp số : $a = \dfrac{1}{2}$; $a = 1$.

11. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = \frac{5}{3}\left[\frac{25}{9} + 2\right] = \frac{215}{27}.$$

12. Ta có $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \dfrac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]}{(x_1x_2)^3}$

$$= -\frac{3a}{2}\left[\frac{9a^2}{4} + 3\right] = -\frac{27a^3 + 36a}{8}.$$

13. Phải có

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ ac > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a - 1) > 0 \\ 9a^2 - 2a + 2 > 0 \\ \dfrac{6a}{2} > 3. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình trên ta được $a > 1$.

14. Giả sử các đỉnh của tam giác có toạ độ lần lượt là

$$A(x_1 ; y_1), B(x_2 ; y_2), C(x_3 ; y_3).$$

Theo công thức toạ độ trung điểm ta có

$$\text{(I)} \begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_M = 2 \\ x_3 + x_1 = 2x_N = 6 \\ x_1 + x_2 = 2x_P = 10 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)} \begin{cases} y_2 + y_3 = 2y_M = 4 \\ y_3 + y_1 = 2y_N = -10 \\ y_1 + y_2 = 2y_P = 14. \end{cases}$$

Cộng từng vế các phương trình của hệ (I) ta được

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 18 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

từ đó $\qquad x_1 = 7 ; x_2 = 3 ; x_3 = -1.$

Tương tự tìm được $y_1 = 0 ; y_2 = 14 ; y_3 = -10$.

Vậy $A(7 ; 0) ; B(3 ; 14) ; C(-1 ; -10)$.

15. Giả sử $M(x ; y)$ là đỉnh của hình vuông $AMBN$.

Ta có $\begin{cases} |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \\ \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ \overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 \\ (x-1)(x-3) + (y-1)(y-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $M(4 ; 2)$, $N(0 ; 4)$ hoặc $M(0 ; 4)$, $N(4 ; 2)$.

16. a) *Thời gian giải xong một bài tập Toán của 44 học sinh lớp 10A, trường Trung học phổ thông K*

Lớp thời gian (phút)	Tần số	Tần suất (%)
[19,5 ; 20,5)	5	11,36
[20,5 ; 21,5)	7	15,91
[21,5 ; 22,5)	10	22,73
[22,5 ; 23,5)	12	27,27
[23,5 ; 24,5)	6	13,64
[24,5 ; 25,5]	4	9,09
Cộng	44	100 (%)

b) *Nhận xét*

Trong 44 học sinh đã được khảo sát ta thấy

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (9,09%) là những học sinh có thời gian giải xong một bài tập Toán từ 24,5 phút đến 25,5 phút.

Chiếm tỉ lệ cao nhất (27,27%) là những học sinh có thời gian giải xong bài tập Toán đó từ 22,5 phút đến dưới 23,5 phút.

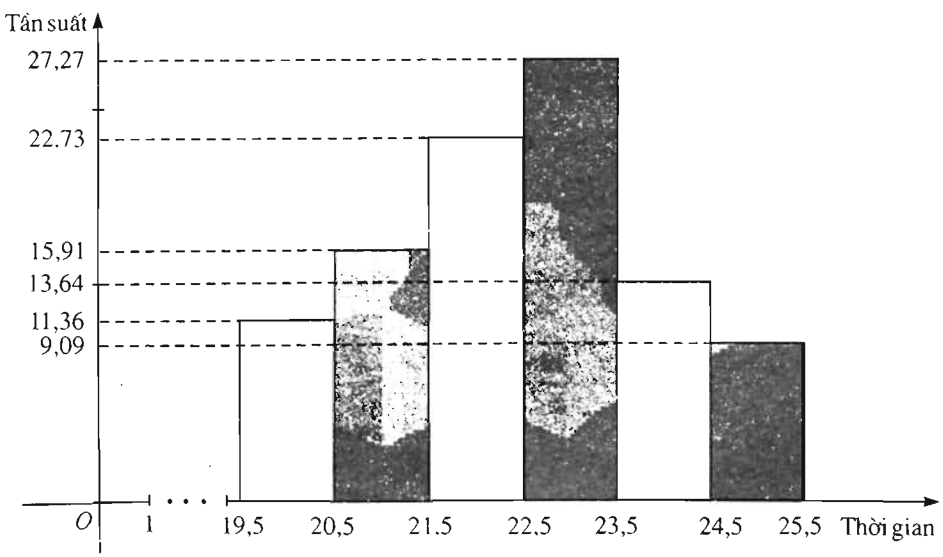
Đa số (79,55%) là những học sinh có thời gian giải xong bài tập toán đó từ 20,5 phút đến dưới 24,5 phút.

c) Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp đã lập, ta tính được $\overline{x} = 22{,}4$ phút, $s_x^2 = 2{,}1$, $s_x = 1{,}4$ phút.

d) Ta có $\overline{x} \approx \overline{z} = 22{,}4$ phút > 20 phút = $\overline{y}$ do đó ta có thời gian giải xong bài tập toán đó của học sinh ở lớp 10A và 10C là như nhau và cùng chậm hơn học sinh lớp 10B.

Đồng thời, vì $\overline{x} \approx \overline{z} = 22{,}4$ phút và $s_x^2 = 2{,}1 > 1 = s_z^2$ nên thời gian giải xong bài tập toán đó của các học sinh lớp 10C là đồng đều hơn các học sinh lớp 10A.

e) *Biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (phút) giải xong một bài tập toán của 44 học sinh lớp 10A, trường Trung học phổ thông K.*



17. a) Vì $\sqrt{1+\cos\alpha} = -\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (do $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$)

$\sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ cho nên

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}} = \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

b) $$\frac{\cos 4a\tan 2a-\sin 4a}{\cos 4a\cot 2a+\sin 4a} = \frac{\cos 4a\sin 2a-\sin 4a\cos 2a}{\cos 4a\cos 2a+\sin 4a\sin 2a}.\tan 2a$$

$$= \frac{-\sin 2a}{\cos 2a}\tan 2a = -\tan^2 2a.$$

c) $$\frac{\sin^2 2a+4\sin^2 a-4}{1-8\sin^2 a-\cos 4a} = \frac{4\sin^2 a\cos^2 a+4(\sin^2 a-1)}{1-8\sin^2 a-(1-2\sin^2 2a)}$$

$$= \frac{4\cos^2 a(\sin^2 a-1)}{8\sin^2 a(\cos^2 a-1)} = \frac{1}{2}\cot^4 a.$$

d) $$\frac{\sin 10,5a}{\sin 3,5a} = \frac{\sin(7a+3,5a)}{\sin 3,5a} = \frac{\sin 7a\cos 3,5a+\cos 7a\sin 3,5a}{\sin 3,5a}$$

$$= \frac{\sin 3,5a(2\cos^2 3,5a+\cos 7a)}{\sin 3,5a}$$

$$= (2\cos^2 3,5a-1)+1+\cos 7a$$

$$= 2\cos 7a+1.$$

e) $$\frac{\tan(a+2a)}{\tan a} = \frac{\tan a+\tan 2a}{\tan a(1-\tan a\tan 2a)} = \frac{\tan a+\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}{\tan a\left(1-\dfrac{2\tan^2 a}{1-\tan^2 a}\right)}$$

$$= \frac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}.$$

18. a) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - \sin^2 2\alpha}{4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$$= \frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \tan^4\alpha .$$

b) $3 - 4\cos 2a + \cos 4a = 3 - 4(1 - 2\sin^2 a) + (1 - 2\sin^2 2a)$

$$= 8\sin^2 a - 8\sin^2 a\cos^2 a = 8\sin^2 a\,(1 - \cos^2 a)$$

$$= 8\sin^4 a.$$

c) $\cos 4a - \sin 4a\cot 2a = 2\cos^2 2a - 1 - 2\sin 2a\cos 2a\dfrac{\cos 2a}{\sin 2a} = -1 .$

d) $\dfrac{\cot a + \tan a}{1 + \tan 2a\tan a} = \dfrac{\dfrac{\cos a}{\sin a} + \dfrac{\sin a}{\cos a}}{1 + \dfrac{\sin 2a\sin a}{\cos 2a\cos a}}$

$$= \frac{1}{\sin a\cos a}\cdot\frac{\cos a\cos 2a}{\cos 2a\cos a + \sin 2a\sin a}$$

$$= \frac{2}{\sin 2a}\cdot\frac{\cos a\cos 2a}{\cos(2a - a)} = 2\cot 2a.$$

19. a) $\cos 67^\circ 30' = \cos\dfrac{135^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 135^\circ}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} ;$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

b) $\cot 30^\circ = \dfrac{1}{\tan 2.15^\circ} = \dfrac{1 - \tan^2 15^\circ}{2\tan 15^\circ} = \dfrac{\cot^2 15^\circ - 1}{2\cot 15^\circ}.$

Đặt $x = \cot 15^\circ$ và chú ý rằng $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ta có

$$\sqrt{3} = \frac{x^2 - 1}{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $x = 2 + \sqrt{3}$ (nghiệm $x = \sqrt{3} - 2$ loại vì $\cot 15^{o} > 0$). Do đó

$$\frac{\cot 15^{o} + 1}{2\cot 15^{o}} = \frac{2 + \sqrt{3} + 1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

c) Ta có

$$\tan 20^{o}\tan 40^{o}\tan 80^{o} = -\tan 20^{o}\tan 40^{o}\tan 100^{o}$$

$$= -\tan(60^{o} - 40^{o})\tan 40^{o}\tan(60^{o} + 40^{o})$$

$$= -\frac{\tan 60^{o} - \tan 40^{o}}{1 + \tan 60^{o}\tan 40^{o}}\tan 40^{o}\frac{\tan 60^{o} + \tan 40^{o}}{1 - \tan 60^{o}\tan 40^{o}}$$

$$= -\frac{3 - \tan^{2} 40^{o}}{1 - 3\tan^{2} 40^{o}}\tan 40^{o} = -\tan 120^{o} = \sqrt{3}.$$

(Áp dụng bài tập ôn tập cuối năm 16 e) ta có $\dfrac{\tan 120^{o}}{\tan 40^{o}} = \dfrac{3 - \tan^{2} 40^{o}}{1 - 3\tan^{2} 40^{o}}$).

20. a) $$\frac{1 - \cos 2a + \sin 2a}{1 + \cos 2a + \sin 2a} = \frac{2\sin^{2} a + 2\sin a\cos a}{1 + 2\cos^{2} a - 1 + 2\sin a\cos a}$$

$$= \frac{2\sin a(\sin a + \cos a)}{2\cos a(\sin a + \cos a)} = \tan a.$$

b) $$\frac{\cot a + \tan a}{1 + \tan 2a\tan a} = \frac{\dfrac{1}{\tan a} + \tan a}{1 + \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^{2} a}\tan a}$$

$$= \frac{1 + \tan^{2} a}{\tan a} : \frac{1 - \tan^{2} a + 2\tan^{2} a}{1 - \tan^{2} a}$$

$$= \frac{1 - \tan^{2} a}{\tan a} = 2\cot 2a.$$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-\sin a-\cos a}{\sin a-\cos a}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{1-\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\cos\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{a}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}=\frac{\sin\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{a}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{-\sin\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}=-\tan\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{8}\right).$$

d) $\cos2a-\cos3a-\cos4a+\cos5a=(\cos2a-\cos4a)+(\cos5a-\cos3a)$

$=-2\sin3a\sin(-a)-2\sin4a\sin a=2\sin a(\sin3a-\sin4a)$

$=4\sin a\cos\dfrac{7a}{2}\sin\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-4\sin\dfrac{a}{2}\sin a\cos\dfrac{7a}{2}.$

21. a) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a=\dfrac{2\cos^2\dfrac{a}{2}}{2\sin^2\dfrac{a}{2}}\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a=\sin^2 a.$

b) $4\cos^4 a-2\cos2a-\dfrac{1}{2}\cos4a$

$=4\cos^4 a-2(2\cos^2 a-1)-\dfrac{1}{2}(2\cos^2 2a-1)$

$=4\cos^4 a-4\cos^2 a+2-(2\cos^2 a-1)^2+\dfrac{1}{2}$

$=4\cos^4 a-4\cos^2 a+\dfrac{5}{2}-4\cos^4 a+4\cos^2 a-1=\dfrac{3}{2}.$

c) $\sin^2 a(1 + \frac{1}{\sin a} + \cot a)(1 - \frac{1}{\sin a} + \cot a)$

$$= \sin^2 a\left[(1 + \cot a)^2 - \frac{1}{\sin^2 a}\right] = \sin^2 a(1 + \cot^2 a + 2\cot a) - 1$$

$$= \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin^2 a\frac{\cos a}{\sin a} - 1 = \sin 2a.$$

d) $\dfrac{\cos 2a}{\cos^4 a - \sin^4 a} - \dfrac{\cos^4 a + \sin^4 a}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a}$

$$= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{(\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a)} - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{1 - \frac{1}{2}(2\sin a\cos a)^2}$$

$$= 1 - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{\sin^2 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^2 a - \sin^2 a\cos^2 a}$$

$$= 1 - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{\sin^2 a(1 - \cos^2 a) + \cos^2 a(1 - \sin^2 a)} = 0.$$

MỤC LỤC

Trang

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **LÊ THỊ THANH HẰNG – NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập tái bản : **LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN THANH THUÝ – ĐINH XUÂN DUNG**
Trình bày bìa và minh hoạ : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **LÊ THỊ THANH HẰNG**
Chế bản : **CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

Mã số: CB003T1

In 35.000 cuốn (ST); khổ 17x24cm.
In tại Công ty cổ phần In Bắc Giang.
Số in: 05. Số xuất bản: 01-2011/CXB/814-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2011.

SÁCH BÀI TẬP LỚP 10

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 10
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
5. BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
6. BÀI TẬP TIN HỌC 10
7. BÀI TẬP TIẾNG ANH 10
8. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 10
9. BÀI TẬP TIẾNG NGA 10

SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- BÀI TẬP VẬT LÍ 10
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 10

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hai Phòng.
– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn

8 934994 023542

***Giá:* 12.000đ**